

로터 시스템 회전운동의 정식화 및 해석

Inelastic Transient Dynamic Analysis of Two- and Three-dimensional Stress Problems by Particular Integral Boundary Element Method

윤 성 호† 임 리 민*

Yun, Seong-Ho Ren, Li-Min

(논문접수일 : 2008년 5월 19일 ; 심사종료일 : 2008년 7월 21일)

요 지

본 논문은 로터 시스템의 디스크 회전운동을 표현하는데 있어 운동방정식을 통합하는 과정에서 기존 연구자들이 채택한 오일러 각 사용법이 일관성이 없음을 지적하였다. 기존 연구자들은 오일러 각 순서가 달라서 속도와 운동에너지도 달리 산정하였음은 물론, 운동방정식은 오직 선형 시스템만 취급해 왔다. 이러한 오일러 각 사용법의 단점을 극복하기 위하여 회전운동을 더욱 단순하게 매개화할 수 있는 4원법(quaternion)과 구 좌표계를 적용하여 비선형 시스템을 도출하였다. 이를 바탕으로 수치해석을 통하여 기존 방법과 비교하여 제안한 방법의 신뢰성과 우수성을 보였다.

핵심용어 : 오일러각, 4원법, 로터시스템, 유한회전, 관성좌표계, 이동좌표계

Abstract

This paper indicates that the use of Euler angles lacks in its consistency and exactness of analysis when it was applied to incorporate the rotational equation of motion for rotor systems by previous researcher. Kinetic energy and angular velocity are different from case to case depending on the way of choosing Euler angles and thus only the linear system has been investigated even though the rotor system has a very nonlinear behavior. A new methodology is applied by using both spherical coordinate and quaternion in the rotor rotation to overcome weaknesses of Euler angles and shows its superiority. It is found through numerical examples that the use of quaternion will be a more useful and valid tool to derive the numerical model of the rotor system.

Keywords : *euler angle, quaternion, rotor system, finite rotation, inertial frame, moving frame*

1. 서 론

로터 시스템은 가전품, 발전기, 차량, 선박, 항공기의 추진계통, 의료기기 등에 다양하게 사용되고 있다. 이러한 시스템을 이해하기 위해서는 동적인 거동과 이로 부터 파생되는 모델링 기법을 잘 검토해야 된다.

초기의 연구는 균일한 회전축에 대하여 회전관성과 자이로스코픽(gyroscopic) 모멘트를 고려하여 해석하였다(Nelson 등, 1976; Zorzi 등, 1980). 그 후 회전축의 횡진동을 관찰하기 위하여 Timoshenko 보 이론을 적용하여 균일한 회전축에 형상함수를 도입하였고(Nelson, 1980), 보 양단의 다양한 경계조건에서 윙링속도(whirling speed)를 알아내기

위해서 유한요소를 사용하였다(Chen 등, 1991). 원추형 테이퍼 축에 대하여 회전관성, 자이로스코픽은 물론 감쇠와 전단변형을 고려한 유한요소법이 도입되었다(Greenhill 등, 1985; Mohiuddin 등, 1994).

기존 연구자들이 로터가 회전할 때 좌표변환 행렬에 오일러 각(Euler angle)을 사용하여 시스템 모델을 설정하였다(Nelson 등, 1976; Mohiuddin 등, 1994, 1999; Al-Bedor, 1999). 이 때 산출된 회전 운동에너지에서 지차항만을 고려하여 선형의 운동방정식을 도출하였다. 그러나 오일러 각에 의한 유한회전 표현법을 사용하여 일반적인 회전자세를 설명하는데 있어 일관성이 없고, 도출되는 시스템 모델도 그 신뢰성을 잃어버리는 약점이 있다. 또한 여기서 관측하는 좌표계는 항상 관성좌표

† 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 부교수

Tel: 054-478-7324 ; Fax: 054-478-7319

E-mail: shyun@kumoh.ac.kr

* 금오공과대학교 자동차공학과 석사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2008년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

계(inertial frame or fixed frame)를 사용하였다. 하지만 관측 좌표계의 구별없이 유한회전을 적용할 수 있는 오일러 매개변수인 4원법(quaternion)(Dooley 등, 1991; 윤성호 등, 2005; 2008)을 로터 시스템에 적용한 경우는 없었다.

본 논문은 로터 시스템 모델을 설정하기 위한 운동방정식을 통합하는 과정에서 기존 연구자들이 채택한 디스크 회전운동의 일관성 없는 오일러 각 사용법의 단점을 지적할 것이다. 이를 극복하기 위하여 회전운동을 매개화할 수 있는 4원법을 적용한 후, 수치해석을 통하여 기존 방법과 비교하여 그 우수성을 보일 것이다.

2. 회전운동 표현

2.1 오일러 각

그림 1과 같이 $B(X, Y, Z)$ 는 시스템의 관성좌표계이고 $b(x, y, z)$ 는 회전하는 디스크에 부착된 좌표계이다. 좌표축 X 와 x 는 변형전 로터의 중심선과 일치하며, 좌표계 B 또는 b 에서 좌표축 X 또는 x 에 대하여 휘링속도(whirling speed) ω 로 회전한다. 속도에 관한 회전텐서를 구하는데 있어 오일러 각(Euler angle)을 사용할 때, 먼저 각도 ϕ 를 X 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 를 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ψ 를 z_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 이를 1-2-3 회전이라고 부른다. 회전텐서 R 는 좌표계가 변환되는 과정에서 다음과 같이 표현된다.

$$R = R^{[B]}R^{[b_1]}R^{[b_2]} = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (1)$$

회전하는 이동좌표계(moving coordinate)에서 각속도 ω^* 에 관한 사교대칭행렬(skew-symmetric matrix) $\tilde{\omega}^* = R^T \dot{R}$ 에 식 (1)을 적용하면 다음과 같다. 앞으로 $(\cdot)^*$ 는 이동좌표계

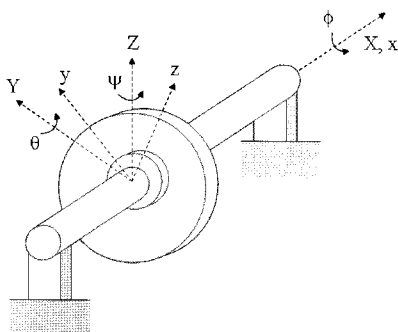


그림 1 로터 시스템의 관성좌표계 및 이동좌표계 정의

에서 측정된 물리량을 표시하고 윗 첨자가 없으면 관성좌표계에서 관찰한 물리량을 표시하도록 한다.

$$\tilde{\omega}^* = (R_\theta R_\psi)^T R_\phi^T \dot{R}_\phi (R_\theta R_\psi) + R_\psi^T (R_\theta^T \dot{R}_\theta) R_\psi + R_\psi^T \dot{R}_\psi \quad (2)$$

여기서 $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\phi} \tilde{X}$, $R_\theta^T \dot{R}_\theta = \dot{\theta} \tilde{y}_1$, $R_\psi^T \dot{R}_\psi = \dot{\psi} \tilde{z}_2$ 을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega^* = (R_\theta R_\psi)^T \dot{\phi} X^{[B]} + R_\psi^T \dot{\theta} y_1^{[b_1]} + \dot{\psi} z_2^{[b_2]} \quad (3)$$

$$X^{[B]T} = [1 \ 0 \ 0], \quad y_1^{[b_1]T} = [0 \ 1 \ 0], \quad z_2^{[b_2]T} = [0 \ 0 \ 1] \quad (4a, b, c)$$

행렬식과 각속도의 관계를 나타내는 다음 식 (5)를 이용하여 각속도를 구할 수 있다.

$$\tilde{\omega}^* = R^T \tilde{\omega} R \Leftrightarrow \omega^* = R^T \omega \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi c\theta & c\psi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 c 와 s 는 각각 정현(sine)과 역현(cosine) 함수를 나타내고, (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분이다. ϕ 는 로터가 일정한 속도 Ω 로 회전할 때의 각도이며, 이 때 비틀림 변형은 무시할 것이다.

고정된 관성좌표계(inertial coordinate)에서 각속도 ω 에 관한 사교대칭행렬 $\tilde{\omega} = \dot{R} R^T$ 에 식 (1)을 적용하면 다음과 같다.

$$\tilde{\omega} = \dot{R}_\phi R_\phi^T + R_\phi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_\phi^T + (R_\phi R_\theta) \dot{R}_\psi R_\psi^T (R_\phi R_\theta)^T \quad (7)$$

여기서 $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\phi} \tilde{X}$, $R_\theta^T \dot{R}_\theta = \dot{\theta} \tilde{y}_1$, $R_\psi^T \dot{R}_\psi = \dot{\psi} \tilde{z}_2$ 를 상기와 같이 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega = \dot{\phi} X^{[B]} + R_\phi \dot{\theta} Y^{[B]} + R_\phi R_\theta \dot{\psi} Z^{[B]} \quad (8)$$

그리고 식 (9)의 관계식을 이용하여 각속도 식 (10)을 구할 수 있다.

$$\tilde{\omega} = R \tilde{\omega}^* R^T \Leftrightarrow \omega = R \omega^* \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & -c\theta s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

다음은 3-1-3 회전을 생각해 보자. 먼저 각도 ψ 를 Z 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 ϕ 를

x_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 θ 를 z_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 이 때, 1-2-3 회전의 $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$ 와 다르다는 것에 주의하고 식 (1)과 (2)의 형태를 동일하게 사용할 수 있다. 마찬가지로 관성좌표계를 사용하면 1-2-3 회전에 사용한 식 (7)의 형태를 동일하게 사용하여 각속도를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^* = \begin{bmatrix} s\phi s\theta & c\theta & 0 \\ s\phi c\theta & -s\theta & 0 \\ c\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (11.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c\psi & s\psi s\phi \\ 0 & s\psi & -c\psi s\phi \\ 1 & 0 & c\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (11.b)$$

2.2 4원법

회전운동을 다른 방법으로 표현하기 위하여 디스크의 회전축 방향 x 축이 벡터 n 이고 크기 ϕ 로 회전하는 경우를 생각한다. 이 때 회전텐서 R 은 다음과 같다.

$$R = I + \sin\phi \tilde{n} + (1 - \cos\phi) \tilde{n}\tilde{n} \quad (12)$$

오일러 매개변수(Euler parameter)를 4개의 원소로 하는 4원소(quaternion) \hat{e} 를 다음과 같이 정의하여 회전텐서 R 을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{e} = [e_0 \ e]^T = [c\frac{\phi}{2} \ s\frac{\phi}{2} \ n]^T \quad (13)$$

$$R(e) = I + 2e_0\tilde{e} + 2\tilde{e}\tilde{e} \quad (14)$$

또한, 직교성질(orthogonality) $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 를 만족하는 단위 4원소(unit quaternion)이다. 회전좌표계와 관성좌표계에서 각속도 $\hat{\omega}^*$ 와 $\hat{\omega}$ 에 대한 4원소에서 각속도 성분은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\dot{\hat{e}} = 2C^T(\hat{e})\dot{\hat{e}} \quad (15)$$

$$\hat{\omega} = 2B^T(\hat{e})\dot{\hat{e}} = 2C(\hat{e})\dot{\hat{e}} \quad (16)$$

여기서 4×4 행렬 A, B, C 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A(\hat{e}) &= \begin{bmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0 I + \tilde{e} \end{bmatrix}, & B(\hat{e}) &= \begin{bmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0 I - \tilde{e} \end{bmatrix}, \\ C(\hat{e}) &= \begin{bmatrix} e_0 & e^T \\ e & -e_0 I - \tilde{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17a,b,c)$$

각속도 $\hat{\omega}^*$ 와 $\hat{\omega}$ 에서 스칼라 성분인 첫 번째 매개변수 ω_0 와 ω_0^* 는 단위 4원소라는 정규성(unit normality) 때문에 0이다.

$$A(\hat{e})A^T(\hat{e}) = B(\hat{e})B^T(\hat{e}) = C(\hat{e})C^T(\hat{e}) = |\hat{e}|^2 U_4 \quad (18)$$

$$\omega_0 = \omega_0^* = 2(e_0 \dot{e}_0 + e^T \dot{e}) = 2e^T \dot{\hat{e}} = 0 \quad (19)$$

여기서 $|\hat{e}|^2 = 1$, U_4 는 대각 원소가 1인 4×4 행렬이다. $A(\hat{e})$ 과 $B(\hat{e})$ 은 직교 연산자이므로 역으로 오일러 매개변수를 식 (15)와 (16)으로 부터 계산할 수 있다.

$$\hat{e} = \frac{1}{2}A(\hat{e})\hat{\omega}^*, \quad \hat{e} = \frac{1}{2}B(\hat{e})\hat{\omega} \quad (20a,b)$$

오일러 각에 의한 유한회전의 회전텐서, 즉 식 (1)에서 R 은 특정한 각 $\pm n\pi/2$ ($n = \text{정수}$)에서 특이성을 나타낼 수 있다. 이러한 과정은 삼각함수로 표현되는 행렬의 복잡한 연산을 내포하고 있다. 그리고 이러한 유한회전의 선택 방법은 12가지이어서 회전순서가 일관성이 없다. 따라서 이로부터 도출되어야 하는 시스템 방정식은 로터 회전의 해석 모델을 대표한다고 간주하기가 어려울 것으로 예상된다. 하지만 4원법에 의한 유한회전은 특이성이 나타날 수 없으며 식도 매우 간편하다. 또한 회전 축이 1개이므로 유도한 각속도의 표현은 일관성을 지녔다고 판단할 수 있다.

로터 시스템에 그림 2와 같은 구좌표계(spherical coordinate)를 정의하여 4원법을 적용하고 $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 인 단위 4원법을 생각해 보자. 여기서 회전축 X 가 $-X'$ 와 같이 ϵ_θ 만큼 회전했을 때 θ 는 Z 축과 이루는 각이다. 이 때 회전축 $-X'$ 를 XY 평면에 투영했을 때의 축을 X_Y 라고 하면 이 축과 X 축이 이루는 각을 ψ 라 하고 $-X$ 축과 이루는 각은 ϵ_ψ 이다. 이에 대한 4원소는 식 (21)과 같이 정의된다.

$$\hat{e} = [c\frac{\phi}{2} \ s\frac{\phi}{2} \ s\theta c\psi \ s\frac{\phi}{2} \ s\theta s\psi \ s\frac{\phi}{2} \ c\theta]^T \quad (21)$$

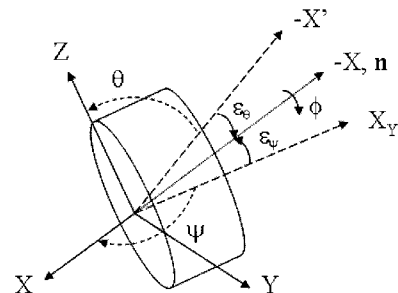


그림 2 구 좌표계를 이용한 유한 회전각의 정의

미세한 세차운동(precession)이 $-X$ 축에서 $\epsilon_\theta(t)$ 와 $\epsilon_\psi(t)$ 만큼 발생하는 디스크의 회전각은 식 (22)와 같다고 가정할 수 있으며, 이에 해당하는 4원법은 식 (23)과 같이 표현될 수 있다.

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \pm \epsilon_\theta(t), \quad \psi(t) = \pi \pm \epsilon_\psi(t) \quad (22a, b)$$

$$\hat{e} = [c \frac{\phi}{2} \quad -s \frac{\phi}{2} \quad \mp s \frac{\phi}{2} \epsilon_\psi \quad \mp s \frac{\phi}{2} \epsilon_\theta]^T \quad (23)$$

3. 시스템 및 수치해석 검토

3.1 운동에너지

오일러 각 회전의 경우 이동좌표계와 관성좌표계에서 디스크 회전에 의한 원형 운동에너지 K_{123}^* 와 K_{123} 은 각각 다음과 같다.

$$K_{123}^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J_{123} \omega^*, \quad K_{123} = \frac{1}{2} \omega^T J_{123} \omega \quad (24a, b)$$

$$K_{313}^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J_{313} \omega^*, \quad K_{313} = \frac{1}{2} \omega^T J_{313} \omega \quad (25a, b)$$

여기서 디스크의 관성모멘트가 I 일 때 관성모멘트 행렬은 다음과 같다.

$$J_{123} = I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{313} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26a, b)$$

지금까지 기존의 연구자들은 로터를 해석하기 위하여 운동에너지 식 (24)와 (25)에서 2차 항만 고려하여 선형 시스템으로 간주하였다. 이러한 축약형 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{123}^* &\approx \frac{1}{2} I \{ 2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\Omega(\psi\dot{\theta} - \theta\dot{\psi}) \} \\ K_{123} &\approx \frac{1}{2} I \{ 2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 - 4\Omega\theta\dot{\psi} \} \\ K_{313}^* &= K_{313} \approx \frac{1}{2} I \{ \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \} \end{aligned} \quad (27a, b, c, d)$$

4원법에 의한 운동에너지 K_q^* 와 K_q 는 다음과 같다.

$$K_q^* = \frac{1}{2} \hat{\omega}^{*T} J_q \hat{\omega}^* = 2e^T J_q \hat{e} |\hat{e}|^2 U_4 \quad (28)$$

$$K_q = \frac{1}{2} \hat{\omega}^T J_q \hat{\omega} = 2e^T J_q \hat{e} |\hat{e}|^2 U_4 \quad (29)$$

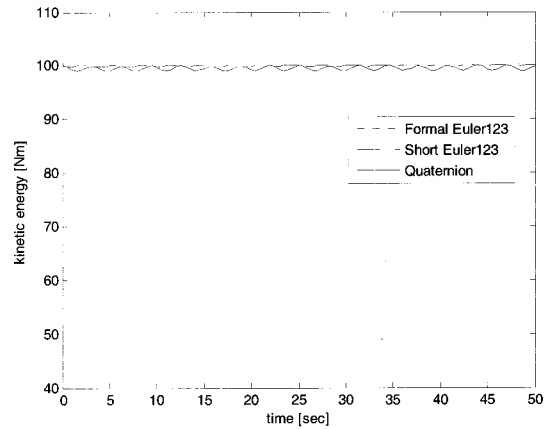


그림 3 이동좌표계에서 1-2-3 회전의 축약형 및 원형과 4원법에 의한 운동에너지 비교

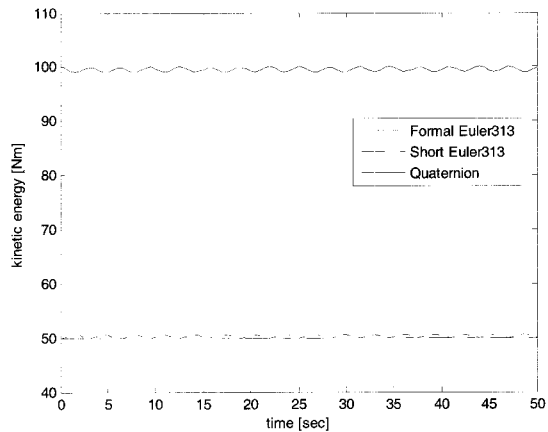


그림 4 관성좌표계에서 3-1-3 회전의 축약형 및 원형과 4원법에 의한 운동에너지 비교

$$J_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

수치예제에서 $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 이고 1-2-3회전에서는 $\dot{\phi} = \Omega = 10 \text{ rad/sec}$, $\psi(t) = \theta(t) = (\text{sint})/10$, 그러나 3-1-3 회전에서는 $\dot{\theta} = \Omega = 10 \text{ rad/sec}$, $\phi(t) = \psi(t) = (\text{sint})/10$ 이다. 구 좌표계의 4원법에서는 $\epsilon_\psi(t) = \epsilon_\theta(t) = (\text{sint})/10$ 로 정하였다. 초기조건은 회전각이 0이고, 회전속도는 1 rad/sec 이다.

그림 3과 그림 4에서 보는 바와 같이 4원법에 의하여 이동좌표계와 관성좌표계에서 산출된 에너지 $K_q^* = K_q$ 이다. 즉, 식 (20a, b)를 식 (28)과 (29)에 대입하여 $K_q^* = K_q$ 임을 증명할 수 있다. 그러나 서로 다른 오일러 각의 경우 $K_{123}^* \neq K_{123} \neq K_{313}^* = K_{313}$ 이다. 이는 식 (27)로부터 자명하다. 그림 3의 1-2-3 회전에서는 에너지량이 거의 비슷하지만 정확히 동일하지는 않다. 그림 4에서 보는 바와 같이 3-1-3 회

전에서는 에너지량이 과소평가되어 있다. 그러나 4원법으로 계산된 에너지는 어느 좌표계에서나 일정하므로 도출될 시스템 모델은 오일러 각 방법으로 도출된 것보다 더욱 일관성이 있고 신뢰도가 높음을 암시하고 있다.

3.2 각속도

식 (6), (10), (11a,b), (15), (16)으로 부터 각속도를 계산할 수 있다. 이동좌표계와 관성좌표계를 1개의 쌍으로 그림 5와 6에서 ω_2 , 그림 7과 그림 8에서 ω_3 를 비교하여 보면 4원법에 의한 각속도는 동일하다. 오일러 각 1-2-3과 3-1-3의 경우 ω_2 와 ω_3 는 좌표계에 따라 서로 다르다는 것을 관찰할 수 있다. 비록 이동좌표계에서 1-2-3 회전의 경우 4원법으로 부터 구한 각속도와 유사하지만 이는 오일러 각을 선정하는 방법의 일관성을 보장할 수가 없다. 또한 좌표계별 관측량이 상이하다는 것은 관측좌표계 선정에 혼란을 줄 뿐이다. 따라서 4원법에 의하여 시스템 모델을 결정하는 것이 타당하다고 판단된다.

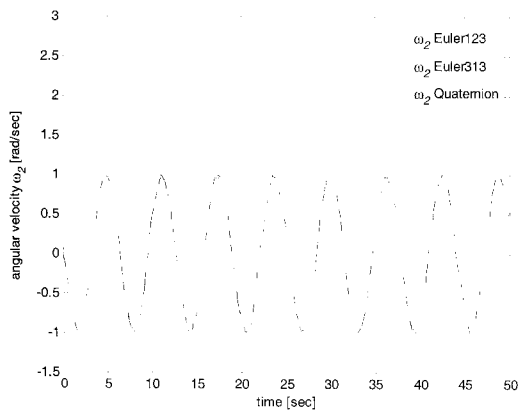


그림 5 이동좌표계에서 1-2-3, 3-1-3 회전과 4원법에 의한 각속도 ω_2 의 비교

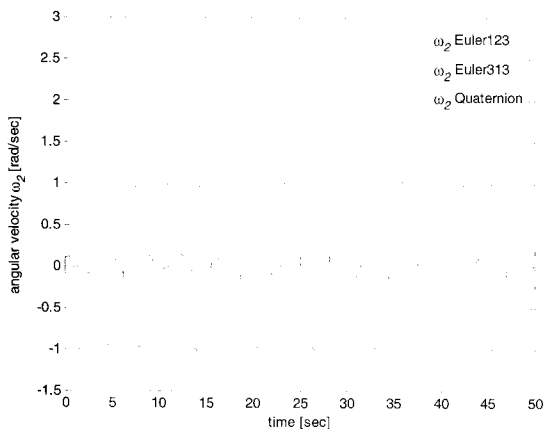


그림 6 관성좌표계에서 1-2-3, 3-1-3 회전과 4원법에 의한 각속도 ω_2 의 비교

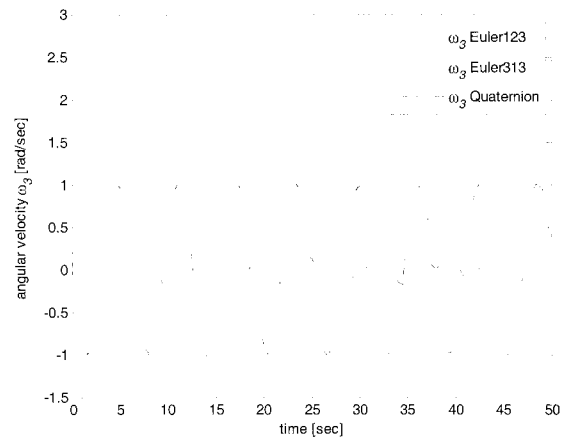


그림 7 이동좌표계에서 1-2-3, 3-1-3 회전과 4원법에 의한 각속도 ω_3 의 비교

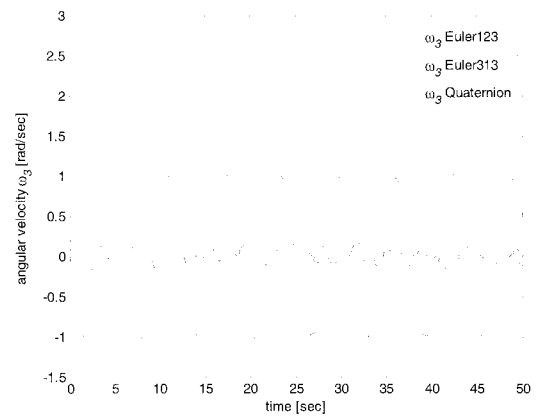


그림 8 관성좌표계에서 1-2-3, 3-1-3 회전과 4원법에 의한 각속도 ω_3 의 비교

3.3 운동방정식

디스크의 단면에서의 좌표축 (Y, Z)에서 병진에 의한 변위를 각각 (U, V)로 표시하고 디스크의 질량이 m 일 때, 운동에너지 K_t 는 다음과 같다.

$$K_t = \frac{1}{2} \{ \dot{U} \ \dot{V} \} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

회전좌표계에서 관성모멘트 행렬이 J 일 때, 회전에 의한 운동에너지 K_r^* 와 K_r 는 다음과 같다.

$$K_r^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J \omega^*, \quad K_r = \frac{1}{2} \omega^T J \omega \quad (32a,b)$$

1-2-3 및 3-1-3 회전의 경우 변위 벡터를 각각 $q^T = [U \ V \ \theta \ \psi]$, $q^T = [U \ V \ \phi \ \psi]$ 라고 표현할 때, 오일러-라그랑지 (Euler-Lagrange)식을 이용하여 도출되는 디스크의 회전운

동 방정식은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$(M_t + M_r)\ddot{q} - \Omega G\dot{q} - \Omega^2 Kq = f \quad (33)$$

여기서 직선 및 회전 운동에 의한 질량행렬을 M_t , 관성모멘트 행렬을 M_r , 자이로스코픽(gyroscopic) 행렬을 G , 외력을 F 로 표시하였다.

1-2-3 회전의 이동좌표계 경우, 질량 행렬 M_t 와 관성모멘트 행렬 M_{123}^* , 자이로스코픽(gyroscopic) 행렬 G_{123}^* 은 다음과 같이 표현된다. 여기서 $K_{123}^* = 0$, $f_{123}^* = 0$ 이다.

$$M_t = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{123}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (34a,b,c)$$

$$G_{123}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I \\ 0 & 0 & 2I & 0 \end{bmatrix}$$

1-2-3 회전의 관성좌표계 경우, $K_{123} = 0$, $f_{123} = 0$ 이고 자이로스코픽 행렬 G_{123} 만 다르다.

$$G_{123} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I \\ 0 & 0 & -2I & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

이 경우, 에너지 식의 유도과정에서 오직 2차식 항을 고려한 것처럼 선형 운동방정식만 유도된다.

3-1-3 회전의 이동좌표계 경우, 변위 벡터를 $q^T = [U \ V \ \phi \ \psi]$ 라고 표현하면 비선형 운동방정식은 다음과 같다. 또한 $f_{313}^* = 0$ 이다.

$$M_{313}^* = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2\theta & c\theta \\ 0 & 0 & c\theta & 1 \end{bmatrix}, G_{313}^* = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s2\theta & 2s\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{313}^* = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36a,b,c)$$

선형 운동방정식은 $G_{313}^* = K_{123}^* = 0$, $f_{313}^* = 0$ 이고 $M_{313}^* = M_{123}^*$ 이다.

3-1-3 회전의 관성좌표계 경우, 비선형 운동방정식은 다음과 같다. 또한 $f_{313} = 0$ 이다.

$$M_{313} = I_d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c\theta \\ 0 & 0 & c\theta & 1+s^2\theta \end{bmatrix} \quad (37a,b,c)$$

$$G_{313} = I_d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2s\theta & -s2\theta \end{bmatrix}, K_{313} = I_d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta & 0 \end{bmatrix}$$

선형 운동방정식에서는 $G_{313} = K_{123} = 0$, $f_{313} = 0$ 이고 $M_{313} = M_{123}^*$ 이다.

4원법의 경우, $q^T = [U \ V \ \epsilon_\theta \ \epsilon_\psi]$ 이고 도출되는 디스크의 회전운동 방정식은 다음과 같다.

$$M_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4s^2\frac{\phi}{2} \\ 0 & 0 & 4s^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}, G_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2s\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s\phi \end{bmatrix}$$

$$K_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\phi + c^2\frac{\phi}{2} \\ 0 & 0 & -c\phi + c^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_q = \Omega^2 I_d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -\frac{1}{2}c^2\frac{\phi}{2} \\ 0 & 2c\phi & -c^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{Bmatrix} \quad (38a,b,c,d)$$

그림 9는 1-2-3 회전의 선형 운동방정식으로부터 구한 회전각도가 주기적으로 변화하고 있다. 그러나 그림 10~12에서 3-1-3 회전의 경우 시간이 지남에 따라 선형과 비선형 모든 시스템의 회전각이 진동형 또는 직선형으로 무한대로 증가하는 현상을 보여주고 있다. 중요한 것은 오일러 각의

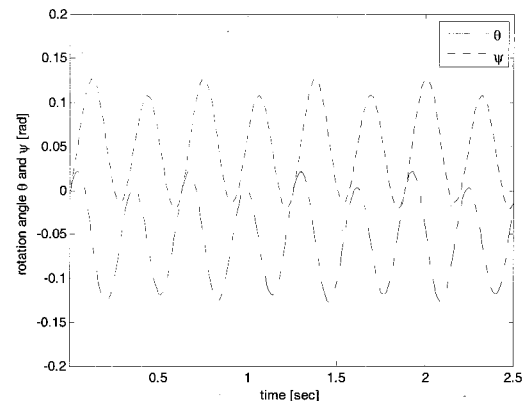


그림 9 이동좌표계에서 선형 해석시 1-2-3 회전의 회전각

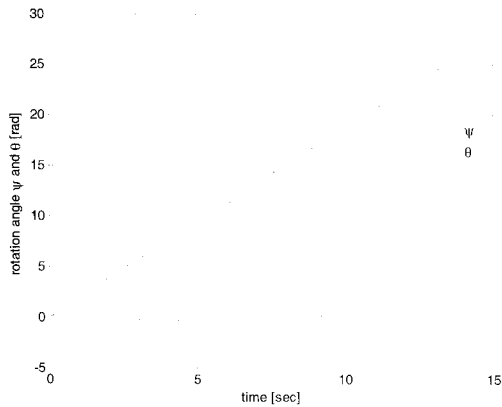


그림 10 이동좌표계에서 비선형 해석시 3-1-3 회전의 회전각

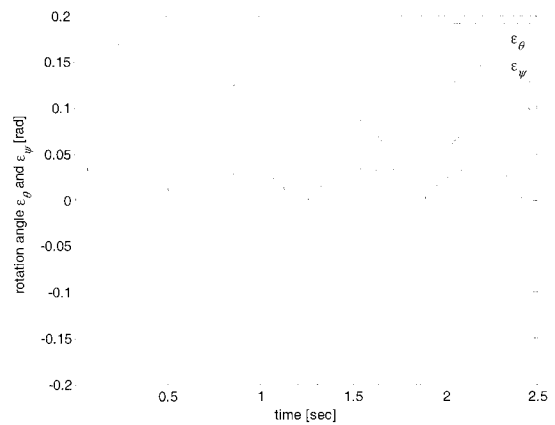


그림 13 이동 및 관성좌표계에서 4원법에 의한 회전각

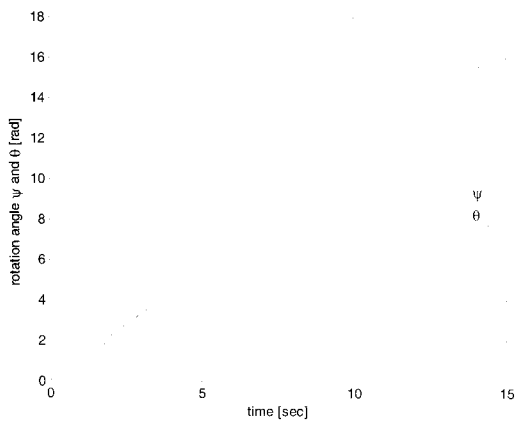


그림 11 이동좌표계에서 선형 해석시 3-1-3 회전의 회전각

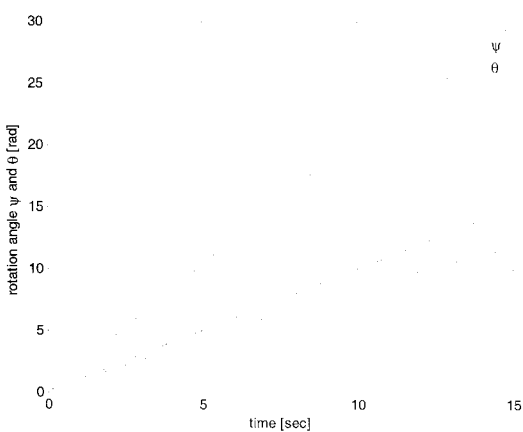


그림 12 관성좌표계에서 비선형 해석시 3-1-3 회전의 회전각

순서를 달리하면 그에 따른 회전각도 상이하게 관측된다는 것이다. 관성행렬의 원소는 삼각함수가 특이성을 나타내지 않고 연속적인 함수를 나타내고 있다. 그림 13은 4원법에 의하여 이동 또는 관성좌표계에서 관측한 회전각은 식 (38a)에서 보는 바와 같이 관성행렬이 특이성을 나타내는 특정한 각이 주기적으로 존재함을 알 수 있다.

4. 결 론

로터 시스템의 회전운동을 해석하는데 있어 오일러 각을 채택한 방법의 약점을 극복하고자 4원법을 사용하였다. 대표적으로 오일러 각의 순서 1-2-3 및 3-1-3 회전과 4원법에 의한 이동좌표계와 관성좌표계에서 수치해석을 통하여 동적인 물리량을 검토하였다.

로터의 회전 운동에너지를 비교하면 상이한 오일러 각에 따른 에너지량과 속도 성분은 상이함을 발견하였으나, 4원법으로 산출한 경우에는 어느 좌표계에서도 항상 동일함을 알 수 있어 시스템 모델을 설정하는데 더욱 유리함을 알 수 있다.

시스템 방정식을 해석한 결과를 비교하여 보면, 1-2-3 회전과는 달리 3-1-3 오일러 각의 경우 시스템이 선형 또는 비선형에 관계없이 회전각이 무한대로 증가하여 시스템이 불안정한 상태를 보여 주고 있다. 4원법의 경우 비록 로터축의 특정한 회전각이 특이성을 나타내지만 시스템이 안정된 상태에서 주기적인 세차운동을 하고 있음을 발견할 수 있다. 그리고 4원법의 경우 일정한 운동에너지로부터 산출된 시스템 방정식 때문에 더욱 신뢰도가 높음을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 2007년도 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구된 논문임.

참 고 문 헌

- 윤성호, 이동현 (2005) 4원법과 유한요소를 이용한 유연체 동역학의 해석기법, 한국전산구조공학회 논문집, 18(2), pp.141~149.
- 윤성호, 임리민 (2008) 로터 시스템 회전운동 선형 및 비선형

- 성, 한국전산구조공학회 학술대회 논문집, pp.190~196.
- Al-Bedoor, B.O.** (1999) Dynamic Model of Coupled Shaft Torsional and Blade Bending Deformations in Rotors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169, pp.177~190.
- Chen L.W., Ku D.M.** (1991) Finite Element Analysis of Natural Whirl Speed Rotating Shaft, *Computers and Structures*, 40, pp.741~747.
- Dooley J.R., McCarthy J.M.** (1991) Spatial Rigid Body Dynamics using Dual Quaternion Components, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, CA, USA, pp.90~95.
- Greenhill L.M., Brickford J.D., Nelson, H.D.** (1985) A Conical Beam Finite Element for Rotor Dynamic Analysis," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 107, pp.421~430.
- Mohiuddin M.A., Khulief Y.A.** (1994) Modal characteristics of rotors using a conical shaft finite element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115, pp.125~144.
- Nelson, H.D.** (1980) A Finite Rotating Shaft Element using Timoshenko Beam Theory, *Journal of Mechanical Engineering Design*, 102, pp.793~803.
- Nelson, H.D., McVaugh J.M.** (1976) The Dynamics of Rotor-bearing Systems using Finite Element, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 98, pp.593~600.
- Zorzi E.S., Nelson, H.D.** (1980) The Dynamics of Rotor-bearing Systems with Axial Torque-A Finite Element Approach, *Journal of Mechanical Engineering Design*, 102, pp.158~161.