

탄성계수의 불확실성에 의한 복합적층판 구조의 응답변화도

Response Variability of Laminated Composite Plates with Random Elastic Modulus

노 혁 천†

Noh, Hyuk-Chun

(논문접수일 : 2008년 2월 27일 ; 심사종료일 : 2008년 5월 19일)

요 지

본 연구에서는 역학적 특성이 우수하여 다양한 구조에 적용되고 있는 복합적층판에 대한 추계론적 유한요소해석 정식화를 제안한다. 정식화의 제시는 추계론적 수치해석기법 중 그 정확도가 매우 높은 것으로 알려져 있는 가중적분법에 기초하였다. 공간적 불확실성을 가지는 인수로써는 두 재료층에 대한 탄성계수와 면내 전단탄성계수가 고려되었다. 이들 재료인수들은 독립적인 추계장함수로 모델링 되었으며, 이들 추계장이 구조거동에 미치는 영향은 지수함수형태의 자기 및 상호상관함수를 적용하여 산정하였다. 수치예제를 통하여 복합적층판이 등방성 및 이방성의 재료에 의한 판 구조에 비하여 거동의 변동계수가 낮음을 보여주었으며, 제안된 해석법의 검증을 위하여 몬테카를로 해석을 동시에 수행하고 그 결과를 상호 비교하였다.

핵심용어 : 응답변화도, 추계론적 유한요소해석, 복합적층판, 가중적분법, 몬테카를로 해석

Abstract

In this study, we suggest a stochastic finite element scheme for the probabilistic analysis of the composite laminated plates, which have been applied to variety of mechanical structures due to their high strength to weight ratios. The applied concept in the formulation is the weighted integral method, which has been shown to give the most accurate results among others. We take into account the elastic modulus and in-plane shear modulus as random. For individual random parameters, independent stochastic field functions are assumed, and the effect of these random parameters on the response are estimated based on the exponentially varying auto- and cross-correlation functions. Based on example analyses, we suggest that composite plates show a less coefficient of variation than plates of isotropic and orthotropic materials. For the validation of the proposed scheme, Monte Carlo analysis is also performed, and the results are compared with each other.

Keywords : response variability, stochastic finite element method, laminated composite plate, weighted integral method, monte carlo analysis

1. 서 론

복합재료는 무게에 비하여 강도 및 강성이 큰 특성으로 인해 많은 구조에 적용되어 왔다. 복합재료를 이용할 경우 적층의 형태와 각 층의 주축 회전에 따라 다양한 특성을 가지는 적층판을 형성할 수 있다(Reddy, 1997). 그러나 이들 적층판의 재료 상수들은 내재적으로 높은 정도의 공간적 불확실성(uncertainty 또는 randomness)을 가지고 있다. 이들 재료상수의 공간적 불확실성 정도와 특징은 생산과정 중의 품질관리에 의하여 결정된다. 일반적으로 적층판 재료인수의 공간적 임의성은 보통

의 강재에 비하여 매우 크게 되는데(Singh 등, 2002), 이는 적층판의 생산과정에 개입되는 많은 종류의 인수들에 기인한다. 이와 같은 재료상수의 불균일성은 적층판의 거동 자체에 불확실성을 유발하며, 따라서 이들 적층판 구조에 대한 추계론적 거동해석은 적층판을 이용한 구조의 해석/설계에서 매우 중요한 사항중의 하나라고 할 수 있다(Onkar 등, 2007).

적층구조에 작용하는 자유진동하중(random excitation)에 의한 통계학적 거동평가에 대한 연구는 매우 광범위하게 이루어져왔다(Nigam, 1994). 일면, 하중의 임의성에 따른 구조의 자유진동 해석은 매우 일반화 되어있다고 보아도 좋을 것이다.

† 책임저자, 정희원 · 세종대학교 토목환경공학과 교수
Tel: 02-3408-3292 ; Fax: 02-3408-4332
E-mail: cpebach@sejong.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 10월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2008년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

그러나 재료인수의 공간적 불확실성에 의한 적층구조의 확률론적 거동해석은 매우 국한되어 있다(Singh 등, 2002). 불확실성을 포함하는 문제에 대한 해를 통계학적 측면에서 제공하는 몬테카를로 해석(Vinckenroy and Wilde, 1995)은 그 적용성이 높는데, 이는 해석의 개념이 단순하고 고도의 이론이 필요하지 않기 때문이다. 그러나 이 해석법은 재료인수의 공간적 분포를 표현하는 추계장을 수치적으로 생성해야 하는 어려움이 있다. 특히 복합적층구조의 경우 개입되는 불확실 인수가 많으므로 추계장의 수치적 생성은 이론적 측면 및 시간적 경제성에서 매우 비효율적이다. 따라서, 통계학적 접근에 기초하지 않는, 몬테카를로 해석에 대한 대안으로서의 새로운 추계론적 해석법의 개발이 요구되어 왔고, 이에 따라 다수의 해석법이 제안되어 왔다(Antonio and Hoffbauer, 2007; Deodatis 등, 1991; Lal 등, 2007; Lawrence 1987; Noh, 2004; Noh and Park, 2006; Ngah and Young, 2007; Papadopoulous 등 2005; 2006). 이들 제안되어 온 해석법 중 가중적분법(weighted integral method)은 보, 트러스(Deodatis, 1991)는 물론 평면응력, 평면변형률(Deodatis 등 1991; Noh, 2006; Noh and Park, 2006)구조와 평판(최창근 등, 1995; Graham and Deodatis, 1998; Noh, 2006) 그리고 반무한영역(최창근 등, 1999) 등에 성공적으로 적용되어왔으며, 기타의 다른 해석법에 비하여 이론적으로 난해하지 않으며, 정확성이 높은 장점을 가지고 있다(Schuëller, 2001).

본 연구에서는 적층구조의 개별 층을 구성하는 화이버(fiber)와 충전재(matrix)가 결정하는 두 직교방향의 재료탄성계수 E_1, E_2 와 면 내의 전단탄성계수 G_{12} 를 불확실인수로 설정하고, 이들 인수의 공간적 불확실성이 적층판의 구조 거동에 미치는 추계론적 관점에서의 영향 평가를 위한 해석법을 가중적분법에 근거하여 제시한다. 이를 위하여 개별 불확실인수에 대하여 추계장함수(stochastic field function)를 가정하고, 적합행렬에서 개별 추계장함수의 영향을 분리하여 적합행렬을 몇 개의 부행렬로 재구성하고, 이들에 대한 순차적 고려를 통하여 추계론적 유한요소해석을 수행하는 정식화를 제안하였다. 제안된 해석법은 몬테카를로 해석과 비교하여 그 타당성을 보였다.

2. 층상형 복합재료

2.1 구성행렬

연속체의 고전적인 구성관계는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

일반적인 표기법을 사용하고 적용 대상을 평면문제에 국한한다면, 복합체의 k -번째 층(lamina)에 대한 주재료방향으로의 구성관계는 면 내 거동과 면에 수직한 방향으로의 전단 거동에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}^{(k)},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2)$$

위 행렬식의 각 요소들은 다음과 같다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3)$$

식 (3)에서 보는 바와 같이 복합재료의 구성관계는 각 층 주축방향으로 개별적인 재료탄성계수 E_1, E_2 와 전단탄성계수 G_{12} , 두 방향에 대한 포아송비 ν_{12}, ν_{21} 그리고 면 외 방향으로의 전단탄성계수 G_{23}, G_{13} 으로 표현된다. 면 외 방향에 대한 전단탄성계수는 주로 실험을 통하여 결정되며, ν_{ij} 는 i -방향으로의 축변형률에 대한 j -방향으로의 횡변형률의 비를 의미한다. 두 축 방향으로의 개별 재료탄성계수 E_1, E_2 와 면 내 전단탄성계수 G_{12} , 포아송비 ν_{12} 는 복합재료를 구성하는 두 재료가 차지하는 체적비율과 각 재료의 재료상수를 이용하여 결정할 수 있다.

2.2 구성행렬에서의 불확실 인수

재료물성치의 공간적 임의성을 고려한 추계론적 해석은 일반적으로 재료물성치가 평균항(mean component)과 변동항(deviator component)의 합으로 표현된다고 가정하며, 복합재료를 구성하는 두 재료에 대하여 개별적으로 다른 공간적 불확실성을 가정할 수 있다. 따라서, 복합재료의 세 인수는 독립적인 추계장을 가지는 것으로 모델링 된다. 즉,

$$E_1 = \bar{E}_1 [1 + f(\mathbf{x})], \quad E_2 = \bar{E}_2 [1 + g(\mathbf{x})],$$

$$G_{12} = \bar{G}_{12} [1 + h(\mathbf{x})] \quad (4)$$

여기서 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$ 는 각 재료상수의 공간적 불확실성을 표현해 주는 추계장함수를 나타내며, $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{G}_{12}$ 는 해당 재료상수의 평균값을 나타낸다. 식 (4)는 개별 추계장의 평균이 0임을 함의하고 있다. 즉, $E[f, g, h] = 0.0$. 세 인수에 대한 개별 추계장들은 $-1 + \delta \leq f, g, h \leq 1 - \delta$ 의 범위에 있으며, 이때 δ 는 $0 < \delta < 1$ 범위에 속하는 임의의 상수이다.

2.3 구성행렬의 추계론적 재구성

1, 2 방향의 재료탄성계수와 전단탄성계수에 대하여 식 (4)의 가정을 적용하면, (k)번째의 층에 대한 재료행렬은 다음과 같이 개별 불확실인수의 추계장에 대하여 분해할 수 있다.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_o + \mathbf{Q}_f + \mathbf{Q}_g + \mathbf{Q}_h \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{Q}_o = Q_{ij}(f, g, h = 0.0)$ 이고, \mathbf{Q}_f 는 $Q_{f,11} = \bar{E}_1 f / \mu$, \mathbf{Q}_g 는 $Q_{g,22} = \bar{E}_2 g / \mu$, $Q_{g,12} = \nu_{12} \bar{E}_2 g / \mu$, 그리고 \mathbf{Q}_h 는 $Q_{h,33} = \bar{G}_{12} h$ 등이 영이 아니며, 나머지 인수들은 영의 값을 가진다. 각 식에서 $\mu = 1 - \nu_{12} \nu_{21}$ 을 나타낸다. 여기서부터는 표기의 단순화를 위하여 위치벡터 \mathbf{x} 를 생략한다.

복합재료는 일반적으로 적층된 형태로 사용되며, 이 경우 각 층은 특정방향으로 주축이 회전된 상태로 전체 강성에 기여하게 된다. 따라서, 각 층은 해당되는 회전량 θ 에 따른 변환행렬로 변환되어야 한다(Reddy, 1997). 이 경우 식 (5)는 변환과정에 의해 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}_o + f\hat{\mathbf{Q}}_f + g\hat{\mathbf{Q}}_g + h\hat{\mathbf{Q}}_h \quad (6)$$

식 (6)의 각 행렬은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{Q}}_o = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_f = \bar{Q}_{11} \begin{bmatrix} c^4 & s^2 c^2 & s c^3 \\ & s^4 & s^3 c \\ & & s^2 c^2 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_g = \bar{Q}_{12} \begin{bmatrix} 2s^2 c^2 & s^4 + c^4 & -s c^3 + s^3 c \\ & 2s^2 c^2 & -s^3 c + s c^3 \\ & & -2s^2 c^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \bar{Q}_{22} \begin{bmatrix} s^4 & s^2 c^2 & -s^3 c \\ & c^4 & -s c^3 \\ & & s^2 c^2 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_h = \bar{Q}_{66} \begin{bmatrix} 4s^2 c^2 & -4s^2 c^2 & -2s c^3 + 2s^3 c \\ & 4s^2 c^2 & -2s^3 c + 2s c^3 \\ & & -2s^2 c^2 + s^4 + c^4 \end{bmatrix} \quad (7d)$$

여기서 $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$, $\bar{Q}_{ij} = Q_{ij}(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{G}_{12})$ 이고, s, c 는 각각 $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ 를 의미하며, 모든 행렬은 대칭행렬이다. 응력에 대한 합력 계산을 통한 축방향, 축과 횡의 조합, 그리고 횡에 대한 영향을 나타내는 구성행렬의 각 요소 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 적층 수 N 인 복합구조에 대하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-t/2}^{t/2} \hat{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \hat{Q}_{ij}(z_{k+1}^m - z_k^m) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 m 은 A, B, D 에 대하여 각각 1, 2, 3의 값을 가진다. 결과적으로, 전체 구성행렬은 다음과 같이 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ 를 포함하는 5×5 의 행렬로 표현되며, 식 (7a)에 의한 평균구성행렬 그리고 (7b)~(7c)에 의해 추계장을 포함하는 가감구성행렬의 합으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_o + f\mathbf{C}_f + g\mathbf{C}_g + h\mathbf{C}_h \quad (9)$$

면 외 방향 전단의 경우, θ 만큼의 주축 회전에 따른 각 층의 변환된 행렬요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{44} &= Q_{44} c^2 + Q_{55} s^2 \\ \hat{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) s c \\ \hat{Q}_{66} &= Q_{44} s^2 + Q_{55} c^2 \end{aligned} \quad (10)$$

복합재료에 대한 면 외 전단변형의 경우 전단탄성계수인 G_{23}, G_{13} 에 대한 이론적 산정이 어려우며 주로 시험을 통해서 값을 결정한다. 나아가, 얇은 판의 경우 면 외 전단거동에 의한 변형은 횡에 의한 것보다 매우 작으므로 본 연구의 정식화에서는 이에 의한 거동은 제외하기로 한다.

3. 변위의 불확실성에 대한 평가 정식화

3.1 추계성을 포함한 요소강성행렬

에너지범함수에 대한 변분을 통하여 얻어지는 유한요소의 요소강성행렬은 일반적으로 $\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$ 로 쓸 수 있으므로, 전 절에서 얻어진 식 (9)의 재료행렬 \mathbf{C} 를 대입하면 요소강성행렬 \mathbf{k} 는 식 (11)과 같이 확정론적강성행렬 \mathbf{k}_o 와 가감강성행렬 $\Delta \mathbf{k}$ 로 구성됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_V \mathbf{B}^T (\mathbf{C}_o + f\mathbf{C}_f + g\mathbf{C}_g + h\mathbf{C}_h) \mathbf{B} dV \\ &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_o \mathbf{B} dV + \int_V \mathbf{B}^T (f\mathbf{C}_f + g\mathbf{C}_g + h\mathbf{C}_h) \mathbf{B} dV \\ &= \mathbf{k}_o + \Delta \mathbf{k} \end{aligned} \tag{11}$$

가감강성행렬은 이론적으로 복합재료의 직교하는 두 방향 재료탄성계수에 대한 부분과 전단탄성계수에 대한 부분 등 세 부분으로 구성된다. 여기서 변위-변형률 행렬 \mathbf{B} 는 행렬 내에 존재하는 n_p 개의 독립다항식 $p_i, i = 1, 2, \dots, n_p$ 와 그 계수로 이루어진 상수행렬 \mathbf{B}_i 의 곱의 합으로 볼 수 있으므로, 이를 식 (11)에 대입하면, 가감강성행렬을 아래와 같이 재정리할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_f \mathbf{B}_j X_{fij} + \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_g \mathbf{B}_j X_{gij} + \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_h \mathbf{B}_j X_{hij} \tag{12}$$

여기서, X_{aij} 는 추계론적 적분(stochastic integral) 또는 가중적분(weighted integral)으로 알려진 항으로서, 가중적분법에서는 이를 개별 유한요소 내의 확률변수(random variable)로 정의하며, 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} X_{aij} &= \int_V s(\mathbf{x}) p_i p_j dV, \\ s(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \text{ or } g(\mathbf{x}) \text{ or } h(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{13}$$

그러므로 식 (11)~(13)으로부터 요소강성행렬은 확률변수 X_{sij} 의 함수가 되며, 요소강성행렬의 조합으로 얻어지는 구조강성행렬 \mathbf{K} 와 변위벡터 \mathbf{U} 역시 확률변수 X_{sij} 의 함수가 됨을 쉽게 알 수 있다. 확률변수 X_{sij} 는 식 (12)에서 알 수 있는 바와 같이 개별 유한요소에 대하여 $n_r = 3r_s$ 개수가 존재한다. 여기서, $r_s = n_p(n_p + 1)/2$ 이다. 다음절부터는 확률변수

X_{sij} 를 X_r 로 표기하고자 하며, 이 경우 아래첨자 r 의 범위는 $r = 1, 2, \dots, n_r$ 이 된다.

3.2 변위벡터의 평균과 분산

변위벡터가 확률변수 X_r 의 함수로 표현되므로 이를 확률변수의 평균 \bar{X}_r 를 중심으로 1차 Taylor 전개하는 것이 가능하다. 확률변수 X_r 이 해석영역 내의 유한요소 내에서 정의되기 때문에 Taylor 전개식은 유한요소와 확률변수에 대한 이중합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}|_E + \sum_e \sum_r (X_r - \bar{X}_r) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_r} \Big|_E \tag{14}$$

위의 식에서는 수식의 복잡성을 피하기 위하여, 그 의미가 확실한, 요소 'e'에 대한 첨자 표기는 생략하였다. 식 (14)에서 $\square|_E$ 는 평균에서의 연산을 의미한다. 식 (14)의 두번째 항에 나타난 변위벡터에 대한 편미분은 평형식 $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}$ 의 확률변수에 대한 편미분을 통하여 강성행렬에 대한 편미분으로 대체될 수 있으며, 따라서 다음과 같이 수정된다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}|_E - \mathbf{K}_o^{-1} \sum_e \sum_r (X_r - \bar{X}_r) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_r} \mathbf{U} \Big|_E \tag{15}$$

식 (15)에서 \mathbf{K}_o 는 전체구조에 대한 확정론적 강성행렬이며, 본 정식화의 경우 평균강성행렬과 동일하다.

변위의 평균은 식 (15)에 대한 평균연산을 통하여 얻는다. 확률변수 X_r 의 평균은 \bar{X}_r 이므로 식 (15)에서 평균변위는 확정론적 변위와 동일한 값으로 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{U}} = E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}|_E \tag{16}$$

평균변위 $\bar{\mathbf{U}}$ 는 간단하게 $\mathbf{U}|_E = \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{F}$ 로 얻게 되며, 따라서 확정론적 해석 결과와 동일한 결과를 얻게 된다.

변위의 공분산은 평균을 중심으로 한 변화량의 제곱에 대한 평균연산으로서 아래와 같이 정의된다.

$$\text{Cov}[\mathbf{U}] = E[\Delta \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^T] \tag{17}$$

여기서, 변위의 평균중심 변화량 $\Delta \mathbf{U}$ 는 식 (15)와 (16)으로부터 얻을 수 있고 이를 사용하면 변위의 공분산은 다음과 같다.

$$Cov[\mathbf{U}] = \mathbf{K}_o^{-1} E \left(\sum_{e_1} \sum_{e_2} (\Delta \mathbf{k}_{f_1} + \Delta \mathbf{k}_{g_1} + \Delta \mathbf{k}_{h_1}) \right. \\ \left. \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T (\Delta \mathbf{k}_{f_2} + \Delta \mathbf{k}_{g_2} + \Delta \mathbf{k}_{h_2})^T \right) \mathbf{K}_o^{-T} \quad (18)$$

여기서 개별 추계장에 대한 가감강성행렬은 전체구조 크기로 확장되어 계산에 이용해야 한다. 식 (18)에서 $\Delta \mathbf{k}_{s_i} \bar{\mathbf{U}}$ 는 하중 벡터와 등가의 성질을 가지므로 이를 $\Delta \mathbf{F}_{s_i} = \Delta \mathbf{k}_{s_i} \bar{\mathbf{U}}$ 라 놓을 수 있으므로 식 (18)은 구체적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Cov[\mathbf{U}] = \mathbf{K}_o^{-1} \sum_{e_1} \sum_{e_2} \left\{ E[\Delta \mathbf{F}_{f_1} \Delta \mathbf{F}_{f_2}^T] + E[\Delta \mathbf{F}_{g_1} \Delta \mathbf{F}_{g_2}^T] \right. \\ + E[\Delta \mathbf{F}_{h_1} \Delta \mathbf{F}_{h_2}^T] + 2E[\Delta \mathbf{F}_{f_1} \Delta \mathbf{F}_{g_2}^T] + 2E[\Delta \mathbf{F}_{g_1} \Delta \mathbf{F}_{h_2}^T] \\ \left. + 2E[\Delta \mathbf{F}_{h_1} \Delta \mathbf{F}_{f_2}^T] \right\} \mathbf{K}_o^{-T} \quad (19)$$

식 (19)의 개별 항에 대한 구체적인 적분식은 아래와 같다.

$$E[\Delta \mathbf{F}_{s_1} \Delta \mathbf{F}_{s_2}^T] = \int_{V_1} \int_{V_2} E[s_1(\mathbf{r}_1) s_2(\mathbf{r}_2)] \\ \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{s_1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{s_2} \mathbf{B} dV_2 dV_1 \quad (20)$$

여기서 s_i 는 고려중인 불확실인수의 추계장으로서 $s_i = f_i, g_i, h_i$ 이다.

3.3 상관함수의 정의 및 적용 상관함수

적분식 (20)의 추계장함수의 곱에 대한 평균연산은 정의에 따라 자기상관함수(auto-correlation function) 또는 상호상관함수(cross-correlation function)로 변환된다.

$$R_{s_1 s_2}(\xi) = E[s_1(\mathbf{x}_1) s_2(\mathbf{x}_2)]; \quad \xi = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad (21)$$

상대거리벡터 $\xi = \langle \xi, \eta \rangle$ 는 고려중인 두 유한요소 e_1, e_2 에 속한 두 점의 위치벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 에 의해 정의된다. 상관함수 $R_{s_1 s_2}(\xi)$ 는 두 추계장함수 s_1 과 s_2 가 같을 경우 자기상관함수를 나타내며, 다를 경우에는 상호상관함수가 된다. 두 추계장 사이의 상관관계를 정의하는 상호상관함수는 상관관계계수를 도입하여 정의할 수 있다. 본 연구에서는 상관관계거리(correlation distance) d_i 에 따라 지수함수적으로 감소하는 아래의 상관함수를 사용하였다.

$$R_{ss}(\xi) = \sigma_{ss}^2 \exp \left\{ -\frac{|\xi|}{d_1} - \frac{|\eta|}{d_2} \right\} \quad (22)$$

상관관계거리 d_i 는 추계장의 공간적 특성을 표현해 주는 인수로 해석영역 내의 두 점이 평균적으로 d_i 거리에 위치할 때 동일한 부호를 나타내는 성질을 말해준다. 수치계산에 사용한 상관관계거리는 $d = d_1 = d_2$ 이며, 결과그래프는 상관관계거리 d 에 대한 자연대수 값인 $D = \text{Log } d$ 의 값에 대하여 나타내었다. 수치계산상의 단순화를 위하여 상호상관함수는 자기상관함수와 동일한 형태인 것으로 가정하였다. 따라서, 상관관계계수 γ_{st} 를 도입하면 상호상관함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{st}(\xi) = \gamma_{st} R_{ss}(\xi) \text{ 또는 } \gamma_{st} R_u(\xi), \quad -1 \leq \gamma_{st} \leq 1 \quad (23)$$

4. 수치예제해석

본 연구에서는 정상겹침(cross-ply)과 각겹침(angle-ply)으로 배열된 복합적층판에 대한 해석을 통하여 복합재료로 형성된 평판구조의 응답변화도를 살펴본다. 정상겹침은 주축 화이버(fiber)의 방향이 x -축과 일치하거나 직각을 이루는 형태로 각 층이 겹쳐진 경우를 말하며, 각겹침은 주축화이버가 x -축과 임의의 각을 이루며 적층된 형태를 말한다(그림 1). 그러

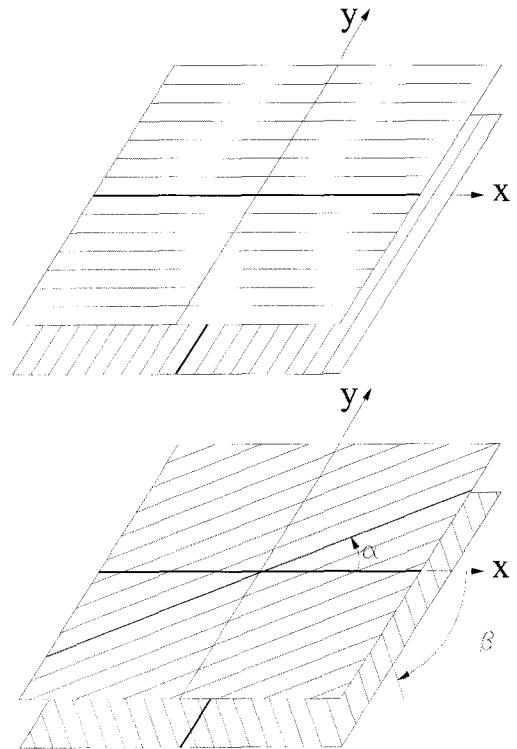


그림 1 복합적층판의 정상겹침(cross-ply)과 각겹침(angle-ply)

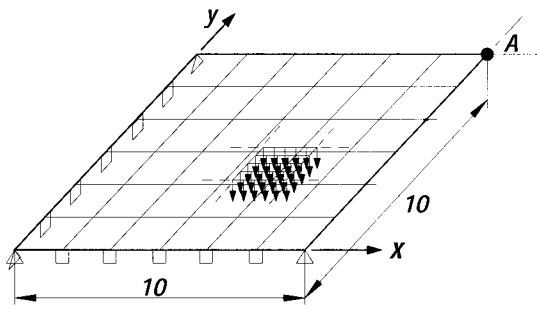


그림 2 예제평판

므로 정상접침은 $(0/90)$, r 의 형식으로, 각접침은 $(a/-b)$, r 의 형식으로 표기할 수 있다. 여기서 r 은 적층단위체의 수를 나타내며 본 연구에서는 4의 값을 주로 사용하였다. 두께방향으로 는 두께의 중심면에 대하여 대칭(symmetric)인 경우와 반대칭(anti-symmetric)인 경우로 나눌 수 있다.

4.1 예제구조 및 재료물성치

그림 2의 예제평판은 Graphite Epoxy로 이루어진 복합적층판으로서 가로와 세로가 20인 정방형평판이며, 6×6의 요소망으로 모델링하였다. 작용하중으로 상부에 등분포하중을 아래 방향으로 작용하였고, 대칭성을 이용할 수 있을 경우 1/4 모델링을 택하였다. 해석에서는 정상접침인 경우 $(0/90)$ 4의 적층형태에서 대칭과 반대칭인 경우에 대해 고찰하였고, 각접침인 경우 $(45/-45)$ 4의 적층형태에서 대칭과 반대칭인 경우에 대해 고찰하였다.

정식화과정에서 제시한 바와 같이 공간적 임의성을 가지는 재료인수는 양 주축방향으로의 탄성계수 E_1, E_2 와 면내 전단탄성계수 G_{12} 이다. 이들의 확률론적 수치는 $\bar{E}_1 = 131\text{GPa}$, $\bar{E}_2 = 10.343\text{GPa}$ 그리고 $\bar{G}_{12} = 6.895\text{GPa}$ 이며, 이들 불확실인수의 변동계수(coefficient of variation: COV)는 0.1로 설정하였다. 포아송비 ν_{12} 는 0.22로 가정하였고, 면 외 방향의 전단탄성계수 G_{23}, G_{13} 는 6.2055 GPa이다. 평판의 두께 t 는 0.1로 택하였는데, 이때 평판의 형상비 $\log(L/t)$ 은 2.3의 값을 가진다. 여기서 L 은 구조의 특성길이로서 본 예제에서는 20이다. 경계조건으로는 단순지지(simple support)와 고정지지(clamped support) 두 경우를 가정하였고, 각각에 대한 결과를 제시한다. 응답변화도(변동계수, COV)는 평판의 중앙점인 그림 2의 A점 수직변위에 대하여 제시한다. 제안 해석법의 검증을 위하여 수행한 몬테카를로 해석의 경우, 이에 필요한 추계장(random field or stochastic field)의 생성은 통계학적전처리방법(Yamazaki and Shinozuka, 1990)에 의하였고, 국부평균법(local averaging scheme)을 적용한 해석을

수행하였다.

4.2 단순지지 복합적층판의 응답변화도 해석

4.2.1 응답변화도에 미치는 상관관계계수 γ_{st} 의 영향
본 연구에서는 주축방향으로의 탄성계수 E_1, E_2 와 면내전단탄성계수 G_{12} 를 불확실재료인수로 고려하고 있으므로 이들 사이에 존재하는 $\gamma_{E_1 E_2}, \gamma_{E_1 G_{12}}, \gamma_{E_2 G_{12}}$ 등 세 종류의 상관관계를 고려하여야 한다. 그러나 이들 세 상관관계는 서로 독립이 아니며, 셋 중 하나는 나머지 둘의 상태에 따라 결정된다. 식 (23)에 나타난 바와 같이 상관관계계수는 $\gamma_{st} \in [-1, +1]$ 이다. 일반적으로 구조의 응답변화도는 상관관계계수 -1과 +1 사이에서 단조변화를 보이므로(Noh, 2006) 본 연구에서는 상관관계계수의 양단 값인 -1(완전 음의 상관관계)과 +1(완전 양의 상관관계)에 대한 결과만을 제시한다. 세 개(혹은 독립인 두 개)의 상관관계계수 사이의 관계는 표 1과 같이 정리할 수 있다.

응답변화도에 대한 세 인수 사이의 상관관계에 따른 영향은 표 1에 네 종류로 제시된 상관관계상태를 기준으로 나타내었다.

그림 3은 변위의 응답변화도를 상관관계거리 d 의 함수로 나타낸 것으로 접침각 45도인 각접침과 정상접침의 두 종류에 대한 해석 결과이다. 적층의 수는 두 경우 모두 8개이며 대칭적층의 상태에 있다. 몬테카를로 해석(MCS)에 의한 결과는 응답변화도가 최대 및 최소를 보이는 상관관계상태 1과 3에 대해서만 제시하였다.

응답변화도는 상관관계거리 d 의 값에 따라 다양한 값을 나타내고 있으나, 상관관계거리가 상대적으로 매우 큰 상태($D=3.0$)에서 고찰해 보면 최대값은 상관관계상태 1인 정상접침에서 0.0997(0.1012), 그리고 최소값은 상관관계상태 3인 정상접침에서 0.0502(0.0504)의 값을 나타냈다(괄호 안은 MCS결과). 전체적인 결과에서 알 수 있는 것은, 등방성재료로 구성된 평판의 경우 응답변화도의 최대값은 $D=3$ 에서 추계장의 변동계수에 근사한 값(현재 해석에서는 0.1)을 나타내는 반면(최창근, 노혁천 1995; Graham and Deodatis, 1998), 복합적층판의 경우 응답변화도가 상대적으로 적게 나타남을 알 수 있다.

응답변화도에서 최대값을 나타내는 경우인 상관관계상태 1

표 1 상관관계상태의 정의

상관관계상태	$\gamma_{E_1 E_2}$	$\gamma_{E_1 G_{12}}$	$\gamma_{E_2 G_{12}}$ ($\gamma_{E_1 E_2}, \gamma_{E_1 G_{12}}$ 에 의존)
1	+1	+1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	-1	-1	+1

의 경우는 세 개의 불확실인수 E_1, E_2 그리고 G_{12} 가 공간적으로 동일한 변화양상을 가지는 경우로서 실제에서는 발생하기 힘든 이상적 상태라고 할 수 있으며, 실제의 경우는 상관관계상태 2, 3, 4에 가깝거나 적어도 1의 상태는 아니라고 볼 수 있다. 그러므로 복합적층판의 경우 등방성의 판에 비하여 재료상수의 임의성에 의한 응답변화도가 적을 것으로 기대할 수 있으며, 이는 재료의 공간적 임의성이 구조의 거동에 미치는 영향이 등방성재료로 구성된 판보다 적음을 말해주는 것으로서, 복합적층판이 추계론적 거동에서도 역학적으로 우수함을 보여주는 결과라고 할 수 있다.

그림 3에서 특기할만한 사항은 각겹침의 경우 상관관계상태 1과 2 그리고 3과 4가 각각 같은 값을 보이고 있다는 것이다. 이러한 결과는 단순지지된 (45/-45)_r 겹침 적층판의 경우 변위의 변동계수는 단순히 두 주축방향의 탄성계수인 E_1, E_2 사이

의 상관관계에만 의존한다는 사실을 말해주며, 면내 전단탄성계수 G_{12} 에 의해서는 영향 받지 않음을 말해준다.

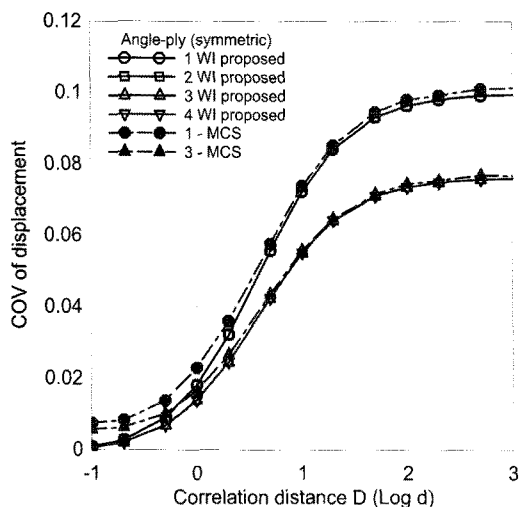
MCS의 경우 제안된 해석법에 의한 결과보다 다소가 큰 값을 제시하고 있으나, 전체적인 경향은 제안방법과 MCS는 상호 잘 일치하는 결과를 보이고 있다. MCS가 제안해석법에 비하여 큰 값을 주는 이유는 제안 해석법이 식 (15)에서 보는 바와 같이 1차의 Taylor 전개에 의한 선형해석법이기 때문이다. 그러나 불확실인수의 변동계수가 0.1 정도인 경우에 대해서는 만족할 만한 결과를 제시함을 알 수 있다. 상관관계거리 d 가 작은 경우(그림 3에서 -1과 0 사이)에는 MCS의 결과가 0에 접근하고 있지 못하다. 이는 추계장의 형태가 백색잡음형태임에 반해 이를 모사하기 위한 요소망은 6×6의 크기로 상대적으로 매우 조악하기 때문이다(Noh, 2006).

4.2.2 각겹침 (α), 에서 겹침각 α 의 영향

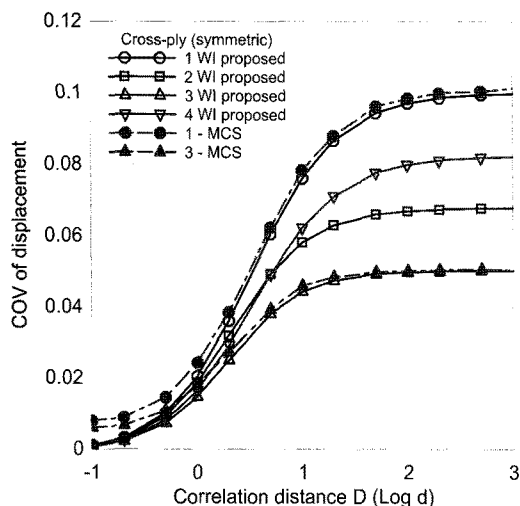
그림 4는 그림 1에 나타낸 각겹침 (α), 에서 $r=4$ 에 대한 해석 결과로서 겹침각 α 를 0에서 90까지 변화시킴에 따른 응답변화도의 변화를 나타낸 것이다. 예상되는 바와 같이 겹침각 45~90사이에서의 응답변화도 값은 0~45사이의 값과 대칭인 값을 나타내고 있다. 여기서 겹침각이 0(또는 90)인 경우는 2방성재료에 대한 결과로 볼 수 있다. 따라서 그림 4와 같이 겹침각 $\alpha \in (0, 45]$ 에서의 변동계수의 값이 겹침각 0에서의 값보다 적은 결과는 복합적층판이 2방성재료 판에 비하여 거동의 불확실성이 낮음을 보여준다고 할 수 있다. 정도의 차이는 있으나 이러한 양상은 대칭겹침과 비대칭겹침에서 동일하게 나타나고 있다.

4.2.3 평판 두께에 따른 전단거동의 영향 정도

전단변형을 고려하는 Reissner-Mindlin 평판의 경우 평판 두께는 전단변형거동을 결정짓는다. 그림 5는 전단변형의 영향을 고찰하기 위하여 두께비가 10 ($t=0.1$ vs. $t=1.0$)인 두 복합적층판을 해석한 결과를 제시하고 있다. 그림에서 보는 바와



(a) 각겹침



(b) 정상겹침

그림 3 상관관계에 따른 복합적층판의 응답변화도: (a) 각겹침, (b) 정상겹침

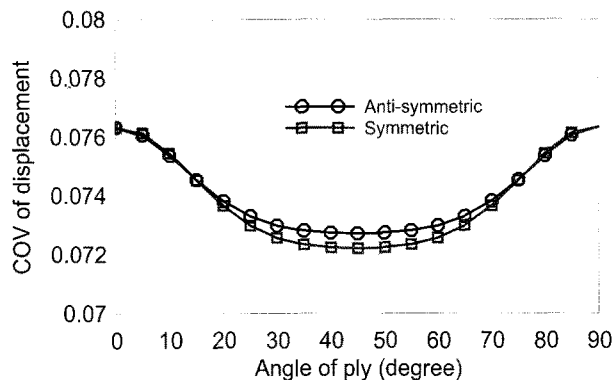
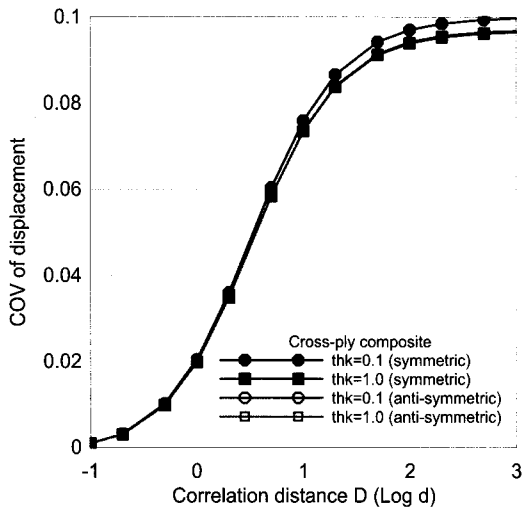
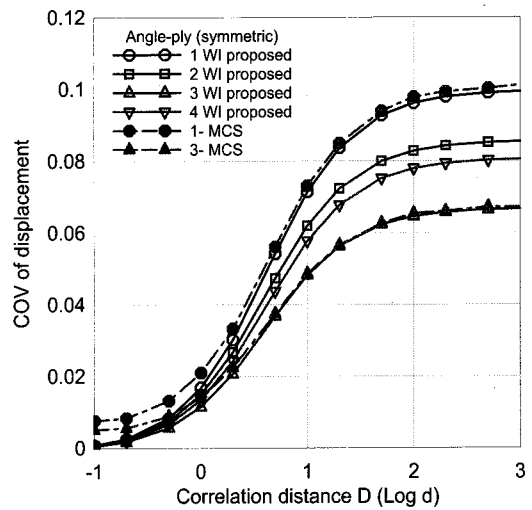


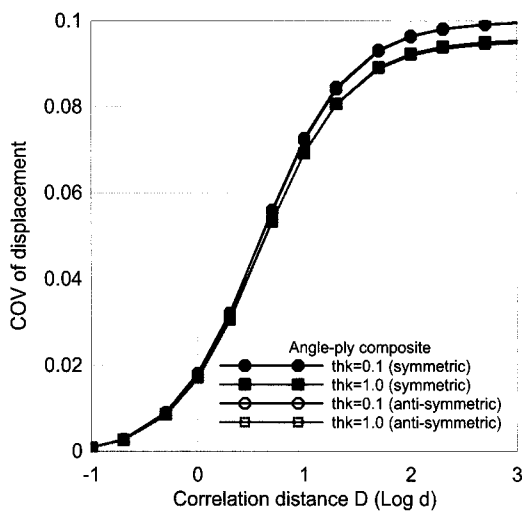
그림 4 응답변화도에 미치는 겹침각의 영향(D=1.0)



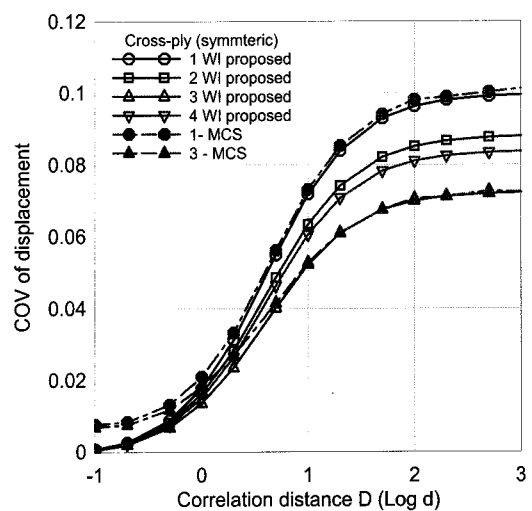
(a)



(a) 각겹침



(b)



(b) 정상겹침

그림 5 복합적층판의 두께에 따른 응답변화도의 변화: (a) 정상겹침, (b) 각겹침

그림 6 상관관계에 따른 복합적층판의 응답변화도: (a) 각겹침, (b) 정상겹침

같이 두께가 두꺼운 판의 경우 전체 거동에서 전단이 차지하는 비중이 상대적으로 크므로 얇은 판에 응답변화도가 비하여 적은 것을 알 수 있다. 즉, 현재 해석의 경우 두께방향의 전단변형에 대한 재료인수인 G_{23} , G_{13} 의 불확실성이 고려되지 않고 있으므로 응답변화도 자체는 적은 값으로 평가되고 있는 것이다. 현재 해석결과인 단순지지 복합적층판의 경우, 상관관계거리 $D=3.0$ 에서, 정상겹침에서는 3.2%, 각겹침에서는 4.1% 정도의 차이를 나타내었다.

4.3 고정지지 복합적층판의 응답변화도 해석

4.3.1 응답변화도에 미치는 상관관계계수 γ_{ab} 의 영향

그림 6은 변위의 응답변화도를 상관관계거리 d 의 함수로 나타낸 것으로 겹침각 45도인 각겹침과 정상겹침의 두 종류의 복

합적층판에 대한 해석 결과이다. 적층수는 8개이고 대칭적층 상태이다.

상관관계거리가 상대적으로 매우 큰 상태($D=3.0$)에서 변동계수의 최대/최소값은 최대값의 경우 상관관계상태 1인 정상겹침에서 0.0995(0.1012), 그리고 최소값은 상관관계상태 3인 각겹침에서 0.0667(0.0672)이다(괄호 안은 MCS결과). 불확실인수로 고려중인 세 인수 사이의 상관관계상태는 실제로 2, 3, 4의 상태에 가깝기 때문에, 단순지지 복합적층판에서의 결과와 유사하게, 복합적층판은 등방성 판에 비하여 응답변화도가 상대적으로 적게 나타남을 알 수 있다.

단순지지 경계를 가진 (45/-45)_r 겹침 적층판에서는 상관관계상태 1과 2 그리고 3과 4에서 동일한 변동계수가 나타났으나, 고정지지 경계에서는 이러한 현상이 나타나지 않고 있다. 이는 단순지지에 비하여 상대적으로 변형에 대한 구속이 강한

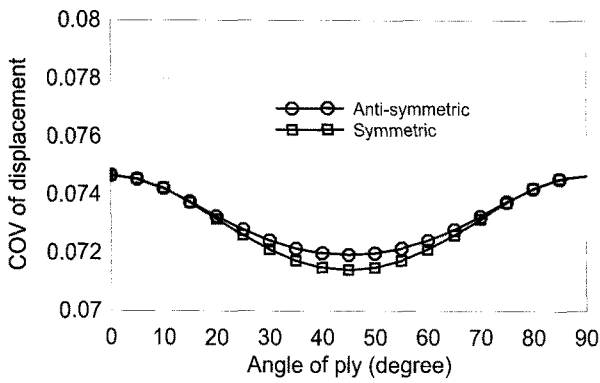


그림 7 응답변화도에 미치는 겹침각의 영향(D=1.0)

고정지점의 영향에 따라 변위에 대한 응답변화도가 다르게 평가되는 것으로 판단할 수 있으며, 면내 전단탄성계수 G_{12} 의 불확실성에 의한 영향이 나타남을 보여주고 있다.

고정지지 판에 대해서도 MCS에 의한 결과는 응답변화도가 최대 및 최소를 보이는 상관관계상태 1과 3에 대해서만 제시하였다. 단순지지 판에 대한 해석과 마찬가지로 MCS의 결과와 제안방법에 의한 결과는 상호 잘 일치하고 있다.

4.3.2 임의각겹침 ($a/-a$)에서 겹침각 a 의 영향

그림 7은 각겹침 ($a/-a$)에서 $r=4$ 에 대한 해석 결과로서 겹침각 a 를 0에서 90까지 변화시키기에 따른 응답변화도에 영향을 나타낸 것이다. 단순지지 판의 경우에 비하여 응답변화도가 적게 나타나는 것을 제외하면, 겹침각 45도를 기준으로 한 응답변화도의 대칭성과 2방성재료 대비 응답변화도 크기의 감소 등의 전체적인 경향은 단순지지 적층판과 유사한 특성을 보여주고 있다.

4.3.3 평판 두께에 따른 전단저동의 영향 정도

고정지지 복합적층판의 두께에 따른 응답변화도의 변동은 그림 8에 나타내었다. 단순지지 판의 경우와 확연히 구분되는 결과는 두께에 따른 응답변화도의 변동이 상대적으로 크게 나타난다는 것이다. 두께가 다른 적층판에 대한 응답변화도의 차이는 4.2.3절에서 설명된 바와 같이 두께방향의 전단변형에 대한 재료인수 G_{23} , G_{13} 의 불확실성이 고려되지 않음으로 인해서 면외 전단변형의 비중이 큰 두꺼운 적층판에 대한 응답변화도 자체가 적게 평가되기 때문이다. 고정지지 복합적층판의 경우, $D=3.0$ 에서, 정상겹침에서는 12.9%, 각겹침에서는 12.1% 정도의 큰 차이를 나타내었으며, 이는 단순지지 복합적층판에 비하여 3~4배에 달하는 결과이다. 이와 같이 단순지지에 비하여 고정지지의 경우 두께의 변화에 따른 차이가 큰 이유는 고정지지에 따른 회전변위의 제한으로 두께가 두꺼운 적층판의 경우 전단변형이 전체 거동에서 차지하는 부분이 상대적으로 크

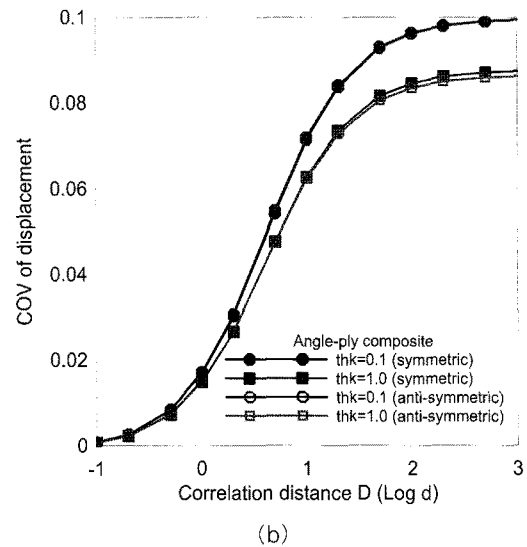
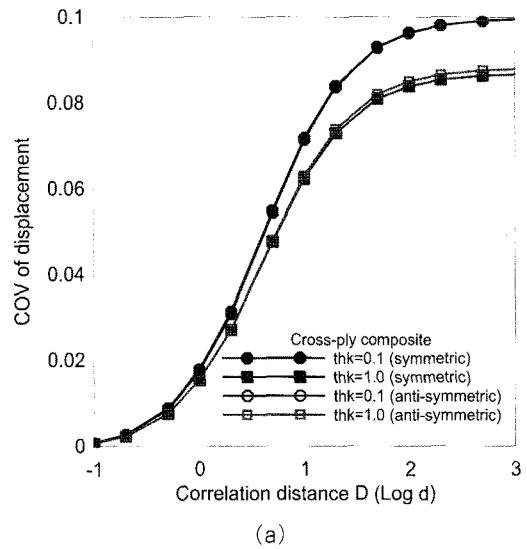


그림 8 복합적층판의 두께에 따른 응답변화도의 변화: (a) 정상겹침, (b) 각겹침

기 때문인 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 복합적층판 구조에서 재료탄성계수의 공간적 불확실성에 의한 구조 거동의 불확실성 상정을 위한 추계론적 유한요소해석법을 제안하였다. 이를 위하여 가중적분법의 개념을 적용하였고, 이를 통하여 평균항과 변동항으로 표현된 재료탄성계수의 공간적 불확실성을 자기상관함수와 상호상관함수로 모델링하여 사용하였다. 변위의 평균과 공분산에 대한 산정식은 확률변수의 함수로 표현되는 변위벡터에 대한 1차 Taylor 전개를 통하여 유도하였다.

복합적층형태의 구조는 적층방식과 각 층 화이버의 방향 구성에 따라 매우 다양한 구조적 특성을 가지는 형식으로 구조를

형성할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 추계장의 상관관계거리 d , 겹침각 a 및 판의 두께 t 등의 변화에 한정하여 재료탄성계수의 공간적 임의성에 의한 변위의 응답변화도(변동계수)를 산정/제시하였다. 복합적층판 거동의 주요 특징 중의 하나는 등방성이나 이방성재료 판에 비하여 재료인수의 불확실성에 의한 응답의 변화도가 적게 평가된 것으로, 이러한 결과는 복합재료에 의한 적층판의 구조적 우수성을 보여주는 결과라고 판단된다. 제안된 해석법에 의한 결과의 적절성은 몬테카를로 해석의 수행과 그 결과의 상호비교로 검토하였다. 제안한 해석법은 지점조건에 관계없이 몬테카를로 해석에 매우 근사한 결과를 보여주었으며, 이를 통하여 본 연구에서 제안한 해석법의 적절성을 제시할 수 있었다.

구조의 경계조건에 따른 응답변화도에의 영향을 평가하기 위하여 단순지지와 고정지지 경계를 가지는 복합적층판에 대한 해석을 수행하였는데, 복합적층판의 지점조건 변화가 가장 크게 영향을 미치는 경우는 판의 두께 변화에 의한 전단거동의 전체거동에 대한 영향 정도인 것으로 나타났다. 이에 대한 직접적인 영향인자는 면 외 방향 전단탄성계수의 공간적 임의성의 고려 여부이다. 이러한 영향은 두꺼운 판의 경우에 크게 나타났다. 따라서, 두꺼운 판의 경우 면 외 전단탄성계수의 공간적 임의성을 동시에 고려할 필요가 있는 것으로 판단된다. 그러나 4.2.1과 4.3.1의 결과를 비교해보면 경계조건의 변화 시 면내 전단탄성계수도 복합적층판 구조의 불확실 거동에 영향을 미친다는 사실을 알 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 세종대학교 교내연구비 지원에 의한 논문이며 이에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- 최창근, 노혁천 (1995) 평판구조의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회논문집, 8(2), pp.127~136.
- 최창근, 노혁천 (1999) 가중적분법을 이용한 반무한영역의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회논문집, 12(2), pp.129~140.
- Antonio C.C., Hoffbauer L.N. (2007) Uncertainty analysis based on sensitivity applied to angle-ply composite structures, *Reliability Engineering & System Safety*, 92(10), pp.1353~1362.
- Deodatis, G. (1991) Weighted integral method I: Stochastic stiffness matrix, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 117(8), pp.1851~1864.
- Deodatis, G., Wall, W., Shinozuka, M. (1991) Analysis of two-dimensional stochastic systems by the weighted integral method, In Spanos, P.D. and Brebbia, C.A. editors, *Computational Stochastic Mechanics*, pp.395~406.
- Graham, L., Deodatis, G. (1998) Variability response functions for stochastic plate bending problems, *Structural Safety*, 20, pp.167~188.
- Lal A., Singh B.N., Kumar R. (2007) Natural frequency of laminated composite plate resting on an elastic foundation with uncertain system properties, *Structural Engineering and Mechanics*, 27(2), pp.199~222.
- Lawrence, M.A. (1987) Basis random variables in finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.1849~1863.
- Ngah, M.F., Young, A. (2007) Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures, *Composite Structures*, 78, pp.447~456.
- Nigam, N.C., Narayanan S. (1994) Applications of random vibrations. New Delhi: Narosa.
- Noh, H.C. (2004) A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45~47), pp.4857~4873.
- Noh, H.C. (2006) Effect of Multiple Uncertain Material Properties on Statistical Behavior of In-plane and Plate Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19~22), pp.2697~2718.
- Noh, H.C., Park, T. (2006) Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method, *Computers and Structures*, 84(31~32), pp.2363~2372.
- Onkar, A.K., Upadhyay, C.S., Yadav, D. (2007) Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method, *Composite Structures*, 77, pp.79~91.
- Papadopoulos, V., Deodatis, G., Papadrakakis, M. (2005) Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12~16), pp.1385~1404.

- Papadopoulos, V., Papadrakakis, M., Deodatis, G.** (2006) Analysis of mean and mean square response of general linear stochastic finite element systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41~43), pp.5454~5471.
- Reddy, J.N.** (1997) Mechanics of Laminated Composite Plates, *Theory and Analysis*, CRC.
- Schuëuller, G.I.** (2001) Computational Stochastic Mechanics-Recent Advances, *Computers and Structures*, 79, pp.2225~2234.
- Singh, B.N., Yadav, D., Iyengar, N.G.R.** (2002) Free vibration of composite cylindrical panels with random material properties, *Composite Structures*, 58, pp.435~442.
- Vinckenroy G., Wilde W.P.** (1995) The use of Monte Carlo techniques in statistical finite element methods for the determination of the structural behavior of composite materials structural components, *Composite Structures*, 32, pp.247~253.
- Yamazaki, F., Shinozuka, M.** (1990) Simulation of stochastic fields by statistical preconditioning, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 116(2), pp.268~287.