

단면적이 일정한 직사각형 중공단면을 갖는 아치의 자유진동

Free Vibrations of Arches with Rectangular Hollow Section having Constant Area

이 태 은† 이 병 구* 박 광 규**
Lee, Tae-Eun Lee, Byoung-Koo Park, Kwang-Kyou
(논문접수일 : 2008년 3월 12일 ; 심사종료일 : 2008년 5월 14일)

요 지

본 논문은 단면적이 일정한 직사각형 중공단면을 갖는 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 극좌표계에서 유도하였으며, 이 미분방정식에는 회전관성효과를 고려하였다. 본 연구에서는 원호아치에 비해 구조적 안정성이 우수한 포물선형 아치를 대상아치의 선형으로 결정하였으며, 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전의 단부조건을 고려하였다. 미분방정식을 효율적으로 해석하여 정확한 고유진동수를 산정할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하고, 문헌과 본 연구의 결과를 비교하여 본 연구에서 유도된 이론식 및 수치해석 과정의 타당성을 검증하였으며, 단면폭비, 두께비 및 형상비 등과 같은 제 변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

핵심용어 : 자유진동, 포물선 아치, 직사각형 중공단면, 일정 단면적, 고유진동수

Abstract

This paper deals with the free vibrations of arches with rectangular hollow section having constant area. The differential equations governing free vibrations of arches are derived in polar coordinates, in which the effect of rotatory inertia is included. Natural frequencies is computed numerically for parabolic arches with clamped-clamped, clamped-hinged and hinged-hinged ends. Comparisons of natural frequencies between this study and reference are made to validate theories and numerical methods developed herein. The lowest four natural frequency parameters are reported, with the rotatory inertia, as functions of three non-dimensional system parameters: the breadth ratio, the thickness ratio and the shape ratio

Keywords : free vibration, parabolic arches, rectangular hollow section, constant area, natural frequency

1. 서 론

아치는 축력이 거동을 지배하므로 구조적으로 매우 이상적일 뿐만 아니라 그 외관이 수려하여 예부터 교량 등 각종 구조물에 많이 이용되었다. 과거에는 아치의 재료로 인장보다 압축력에 대한 저항능력이 우수한 암석이나 콘크리트를 사용하였으나 최근에는 강재의 고강도화 및 경량화가 실현되면서 대부분의 아치구조에 강재가 이용되고 있다.

강재를 이용한 아치는 평판을 이용하여 원형 또는 사각형으로 제작하는 중공단면이 대부분이며, 이러한 중공단면은 폭과 높이 및 두께를 적절히 조절하여 동일한 단면적에서 보다

큰 동적안정성을 확보할 수 있으므로 적절한 단면폭 및 두께를 결정하는 것은 최적설계의 개념에서 고유진동수를 증진시킬 수 있는 합리적인 방법이다(Haftka 등, 1990).

강재를 이용한 아치는 다른 구조재료에 비하여 진동에 취약한 단점이 있어 아치의 재료로 강재를 이용하는 경우 아치구조의 동적거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요구되고 있다(Hikami, 1982). 비교적 세장한 강재 아치에 풍압이 가해지면 와류에 의하여 진동이 발생할 수 있으며, 이러한 진동이 구조물의 고유진동수와 유사해지면 다소 큰 진폭의 진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 반복적으로 큰 응력을 발생시켜 피로파괴의 원인이 되거나 좌굴에 대한 안전

† 책임저자, 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수
Tel: 063-850-6718 ; Fax: 063-857-7204
E-mail: telee@wonkwang.ac.kr

* 교신저자, 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 정회원 · 대전대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 10월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2008년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

도가 저하하여 종종 구조물의 안정성에 문제를 일으키기도 한다. 아치교를 통행하는 차량에 의해 발생하는 동하중도 이와 유사한 문제점을 야기할 수 있다. 이렇듯 아치구조의 거동에 진동이 미치는 영향은 상당히 크기 때문에 아치구조의 자유진동특성에 대한 연구는 매우 중요한 연구과제이다.

아치의 자유진동해석에 관한 연구는 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔으며, 최근에는 연구분야도 세분화되고 있는 추세이다. 기존의 연구에서 아치의 선형은 이론적 전개가 비교적 용이한 원호아치를 주 대상으로 하였으나(Johnson, 1982; Auciello and De Rosa, 1994) 최근에는 다양한 선형에 대한 연구가 진행되고 있으며, (Wilson and Lee, 1995; Oh 등, 2002) 아치의 구조적 안정성을 향상시킬 수 있는 단면형상에 대한 연구도 활발히 수행되고 있다(Maurizi 등, 1991; Lee and Oh, 1996).

본 연구에서는 아치의 선형으로 원호아치에 비해 구조적 안정성이 우수하여 널리 사용되고 있는 포물선 아치를 채택하였으며, 아치의 단면은 강아치교에 가장 널리 쓰이는 직사각형 중공단면을 채택함으로써 실구조물에 대한 적용성을 강화시켰다. 단면적이 일정한 직사각형 중공단면을 갖는 포물선아치의 자유진동특성을 고찰함으로써 아치의 진동에 대한 이론을 확장하고, 실제 아치구조물의 설계 및 공용중인 아치구조의 유지관리에 더욱 정확한 동적해석 자료를 제공하는데 본 연구의 목적이 있다.

2. 수학적 모형

2.1 단면의 정의

그림 1은 본 연구에서 채택한 직사각형 중공단면을 나타낸 것으로, b 는 단면의 폭, d 는 단면의 깊이, t_1 은 수직판의 두께, t_2 는 수평판의 두께이다.

본 연구에서는 직사각형단면의 형상을 정의하기 위하여 직사각형단면의 폭에 대한 깊이의 비를 다음과 같이 형상비 m 으로 정의하였다.

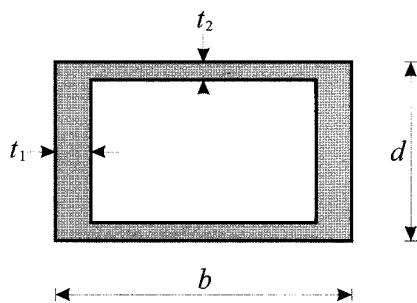


그림 1 직사각형 중공단면

$$m = \frac{d}{b} \quad (1)$$

또한 중공단면의 형상을 정의하기 위하여 단면폭에 대한 수직판의 두께의 비와 단면의 깊이에 대한 수평판의 두께의 비를 각각 n_1 , n_2 로 정의하였다.

$$n_1 = \frac{t_1}{b} \leq 0.5 \quad (2a)$$

$$n_2 = \frac{t_2}{d} = \frac{t_2}{mb} \leq 0.5 \quad (2b)$$

위의 식들을 이용하여 직사각형 중공단면의 단면적 A 와 단면2차모멘트 I 를 나타내면 다음과 같다.

$$A = mb^2(1 - c_1c_2) = \text{constant} \quad (3)$$

$$I = \frac{1}{12} m^3 b^4 (1 - c_1c_2^3) \quad (4)$$

위의 식들에서 c_1 과 c_2 는 다음과 같다.

$$c_1 = 1 - 2n_1 \quad (5a)$$

$$c_2 = 1 - 2n_2 \quad (5b)$$

식 (3), (4)를 이용하면 아치 단면의 회전반경 r 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = mb \sqrt{\frac{1 - c_1c_2^3}{12(1 - c_1c_2)}} \quad (6)$$

2.2 지배미분방정식

그림 2는 지간길이 l , 아치높이 h , $y = y(x)$ 의 임의 선형을 갖는 본 연구대상 아치의 기하학적 형상을 나타낸 그림

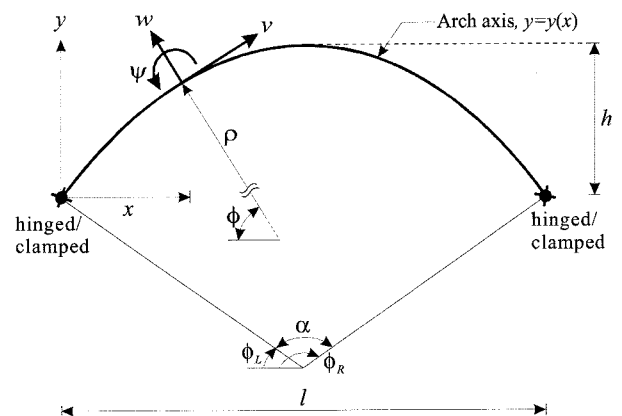


그림 2 아치의 기하학적 형상 및 제 변수

이다. 이 그림에서 (x, y) 는 아치의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며, ρ 및 ϕ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다. v, w 및 ψ 는 각각 접선방향 변위, 곡률중심방향 변위 및 단면 회전각을 나타내며, α 는 중심각, ϕ_L 및 ϕ_R 은 각각 좌단과 우단에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다.

그림 2에 보인 아치가 면내 진동하게 되면 진동변위에 의하여 아치단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생한다. 또한 질량을가지고 있는 아치가 진동함으로서 아치의 미소요소에는 곡률중심방향 관성력 F_w , 접선방향 관성력 F_v 및 회전관성우력 C_ψ 가 발생한다.

그림 3은 아치의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력을 나타낸 것이며, 아치의 미소요소에 작용하는 이 힘들의 접선방향 분력, 곡률중심방향 분력 및 모멘트에 대한 동적 평형방정식을 세우면 각각 다음의 식 (7)~(9)와 같다.

$$N' + Q + \rho F_v = 0 \quad (7)$$

$$Q' - N + \rho F_w = 0 \quad (8)$$

$$M' - \rho Q - \rho C_\psi = 0 \quad (9)$$

여기서 $(\prime) = d/d\phi$ 의 미분연산자이다.

변위에 의해 발생하는 합응력 및 단면회전각은 다음의 식들과 같이 나타낼 수 있다(Borg et al., 1959).

$$N = \frac{EA}{\rho} \left[(v' + w) + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 (w'' + w) \right] \quad (10)$$

$$M = -\frac{EA r^2}{\rho} (w'' + w) \quad (11)$$

$$\psi = \frac{1}{\rho} (w' - v) \quad (12)$$

여기서 E 는 아치 재료의 탄성계수이다.

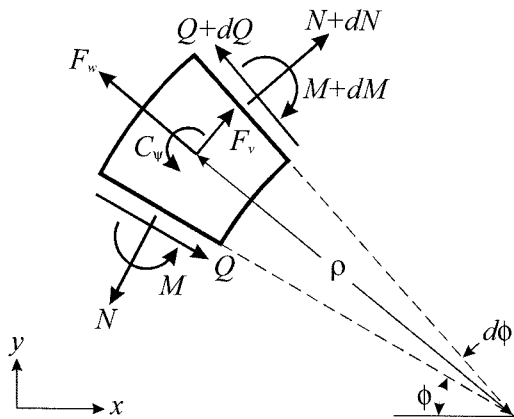


그림 3 미소요소에 작용하는 힘

아치의 진동을 조화진동으로 가정하면 곡률중심방향 관성력 F_w , 접선방향 관성력 F_v 및 회전관성우력 C_ψ 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다(Lee and Wilson, 1990).

$$F_w = \gamma A \omega_i^2 w \quad (13)$$

$$F_v = \gamma A \omega_i^2 v \quad (14)$$

$$C_\psi = \gamma A r^2 \omega_i^2 \psi = \frac{\gamma A r^2 \omega_i^2}{\rho} (w' - v) \quad (15)$$

여기서 γ 는 부재재료의 질량밀도이며, ω_i 는 고유각진동수 (rad/sec), i 는 모드번호이다.

식 (10), (11)로부터 $dN/d\phi$ 와 $dM/d\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$N' = \frac{EA}{\rho} \left[(v'' + w') + \frac{r^2 \rho'}{\rho^2} (w''' + w'') - \frac{\rho'}{\rho} (v' + w) - \frac{3r^2 \rho'}{\rho^3} (w'' + w) \right] \quad (16)$$

$$M' = -\frac{EA r^2}{\rho^2} \left[(w''' + w'') - \frac{2\rho'}{\rho} (w'' + w) \right] \quad (17)$$

식 (15), (17)을 식 (9)에 대입하고 전단력 Q 에 대하여 정리하면 다음 식 (18)과 같고, 이를 미분하여 $dQ/d\phi$ 를 식 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = -\frac{EA r^2}{\rho^3} \left[(w''' + w'') - \frac{2\rho'}{\rho} (w'' + w) \right] - \frac{\gamma A r^2 \omega_i^2}{\rho} (w' - v) \quad (18)$$

$$Q' = -\frac{EA r^2}{\rho^3} \left[(w'''' + w''') - \frac{5\rho'}{\rho} (w''' + w'') + \frac{2}{\rho} \left(\frac{4\rho'^2}{\rho} - \rho'' \right) (w'' + w) \right] - \frac{\gamma A r^2 \omega_i^2}{\rho} \left[(w'' - v') - \frac{\rho'}{\rho} (w' - v) \right] \quad (19)$$

본 연구에서는 수치해석 과정의 효율성을 높이기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \delta = \frac{w}{l}, \quad \lambda = \frac{v}{l} \quad (20 \sim 23)$$

$$f = \frac{h}{l}, \quad g = \frac{b}{l}, \quad \zeta = \frac{\rho}{l} \quad (24 \sim 26)$$

$$C_i = \pi^4 \omega_i \sqrt{\frac{\gamma}{E}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

위의 식들에서 (ξ, η) 는 무차원 직교좌표계, δ, λ, f 는 w, v, h 를 지간길이 l 로 정규화 한 것이고, g 는 단면폭 비, ζ 는 무차원 곡률반경, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (3)과 식 (25)로부터 다음과 같은 무차원 단면적 k 를 얻을 수 있다.

$$k = \frac{A}{l^2} = mg^2(1 - c_1 c_2) \quad (28)$$

이상에서 얻어진 합응력식 (10), (11), (16)~(19) 및 관성력식 (13)~(15)를 동적 평형방정식 (7), (8)에 대입하고, 단면적 및 단면회전반경을 나타내는 식 (3), (6)과 무차원 변수식 (20)~(27)을 이용하면 본 연구대상 아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta'''' &= 5a_1 \delta'''' + \left(a_2 - \frac{a_3}{a_4} \frac{C_i^2}{\pi^8} \right) \delta'' + a_1 \left(1 + \frac{a_3}{a_4} \frac{C_i^2}{\pi^8} \right) \delta' \\ &+ \left(1 + a_2 - a_3 a_4 + a_3^2 \frac{C_i^2}{\pi^8} \right) \delta \\ &+ a_3 \left(\frac{1}{a_4} \frac{C_i^2}{\pi^8} - a_4 \right) \lambda' - \frac{a_1 a_3}{a_4} \frac{C_i^2}{\pi^8} \lambda \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \lambda'' &= \frac{a_1}{a_3 a_4} \delta'' + \left(\frac{1}{a_4^2} \frac{C_i^2}{\pi^8} - 1 \right) \delta' + a_1 \left(1 + \frac{1}{a_3 a_4} \right) \delta \\ &+ a_1 \lambda' - \left(a_3 + \frac{1}{a_4} \right) \frac{1}{a_4} \frac{C_i^2}{\pi^8} \lambda \end{aligned} \quad (30)$$

위의 미분방정식에 포함된 계수 $a_1 \sim a_3$ 는 아치의 곡률항 ζ, ζ', ζ'' 로 구성되며, a_4 는 무차원 변수 e, g, c_1, c_2 로 구성된다. 여기서 c_1, c_2 는 식 (5a), (5b)에 정의한바와 같이 n_1, n_2 로 표현되는 식들이다.

$$a_1 = \frac{\zeta'}{\zeta} \quad (31a)$$

$$a_2 = \frac{2\zeta''}{\zeta} - 8 \left(\frac{\zeta'}{\zeta} \right)^2 - 2 \quad (31b)$$

$$a_3 = \zeta^2 \quad (31c)$$

$$a_4 = \frac{1}{m^2 g^2} \left[\frac{12(1 - c_1 c_2)}{1 - c_1 c_2^3} \right] \quad (31d)$$

미분방정식 식 (29), (30)을 수치해석하기 위해서는 단부 조건에 대한 경계조건이 필요하며, 아치의 단부조건에 따른 경계조건을 식 (20)~(23)의 무차원 변수들을 이용하여 유도하면 다음과 같다.

회전단인 경우 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 휨모멘트 M 이 "0"이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (32)$$

$$\delta = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (33)$$

$$\delta' = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (34)$$

고정단은 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 단면회전각 ψ 가 "0"이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (35)$$

$$\delta = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (36)$$

$$\delta' = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (37)$$

2.3 형상함수

앞에서 유도한 무차원 미분방정식 식 (29), (30)을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_3$ 에 포함되어 있는 형상함수 ζ', ζ'' 이 정의되어야한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. 그림 2에 주어진 $y = y(x)$ 의 선형식은 무차원 변수인 식 (20), (21)에 의하여 다음과 같이 무차원 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (38)$$

아치축상 임의점에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도 ϕ 와 곡률반경 ζ 은 다음 식들과 같다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (39)$$

$$\zeta = \left(\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (40)$$

나머지 변화곡률계수 ζ' 과 ζ'' 은 다음 식들로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (41)$$

$$\zeta'' = \frac{d\zeta'}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (42)$$

이상의 식 (38)~(42)를 이용하면 주어진 곡선부재의 선형

에 대한 변화곡률항인 ζ' 과 ζ'' 을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 대상 아치의 선형으로 포물선형의 아치를 채택하였다.

포물선 아치에서 그림 2와 같은 아치의 기하학적 제변수가 정의되면 다음과 같이 포물선 아치의 무차원 선형식을 얻을 수 있다(Lee and Wilson, 1990).

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (43)$$

식 (43)을 식 (39)~(42)에 대입하고 정리하면 포물선 아치의 자유진동해석에서 필요한 ϕ 및 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 을 각각 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \quad (44)$$

$$\zeta = \frac{1}{8f}[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (45)$$

$$\zeta' = \frac{3}{2}(2\xi - 1)[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (46)$$

$$\zeta'' = \frac{3}{8f}[1 + 64f^2(2\xi - 1)^2] \times [1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (47)$$

포물선 아치의 중심각 α 는 식 (44)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha = 2 \tan^{-1}(4f) \quad (49)$$

3. 수치해석 결과 및 토의

3.1 수치해석 방법 및 검증

이상에서 유도한 상미분방정식 식 (29), (30)에 경계조건 식 (32)~(37) 및 형상 함수식 식 (44)~(47)을 대입하면 포물선 아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다.

유도된 미분방정식 식 (29), (30)을 수치적분하기 위해서는 6개의 초기조건이 필요하나 각 단부조건별로 3개의 초기조건만을 알고 있다. 따라서 각 단부조건별로 미지의 경계조건과 미분방정식에 포함된 불확정량인 무차원 고유진동수 C_i 를 가정하고 좌단 ($\phi = \phi_L$)에서 우단 ($\phi = \phi_R$)까지 수치적분을 시행한다. 수치적분의 결과로 우단 ($\phi = \phi_R$)의 경계조건을 만족하는 행렬식 D 를 산정할 수 있으며, 이러한 과정에서 가정한 C_i 값이 대상 구조의 고유한 값이라면 수치적분의 결과로 우단에서 얻어지는 행렬식 $D=0$ 이어야 한다.

본 연구에서는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식의 수치적분기법으로 정확도가 매우 높아 진동문제에 많이 이용되고 있는 제4차 Runge-Kutta법(Al-Khafaji and Tooley, 1986)을 이용하였으며, 지배미분방정식에 포함된 고유진동수를 산정하기 위한 비선형방정식의 수치해석 방법으로 정확성과 효율성이 높아 많은 공학문제에 이용되고 있는 Regula-Falsi법(Al-Khafaji and Tooley, 1986)을 이용하였다.

그림 4는 미분방정식의 수치적분 과정에서 아치 중심각의 분할에 따른 수치해의 정확성을 평가하기 위한 수렴해석의 결과를 나타낸 것이다. 고정-고정의 단부조건을 갖고, $g=0.03$, $m=0.7$, $n_1=n_2=0.01$, $f=0.3$ 인 중공단면 아치를 대상으로 수렴해석을 실시한 결과 아치 중심각의 분할갯수가 약 40($1/\Delta\alpha=0.025$)인 경우 제4모드까지의 모든 수치해는 유효숫자 4자리까지 수렴하였으나 본 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 분할개수를 100($1/\Delta\alpha=0.01$)으로 하여 모든 결과를 산출하였다.

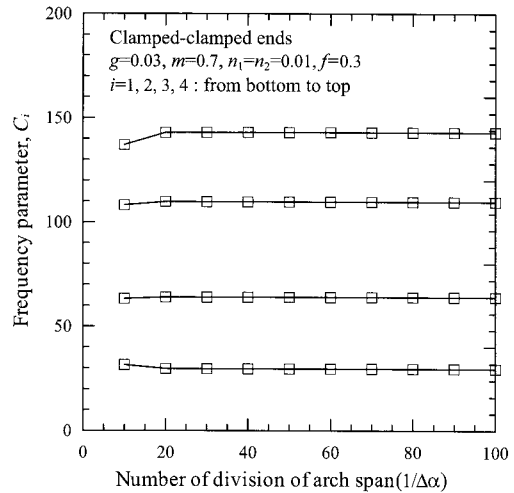


그림 4 수렴해석

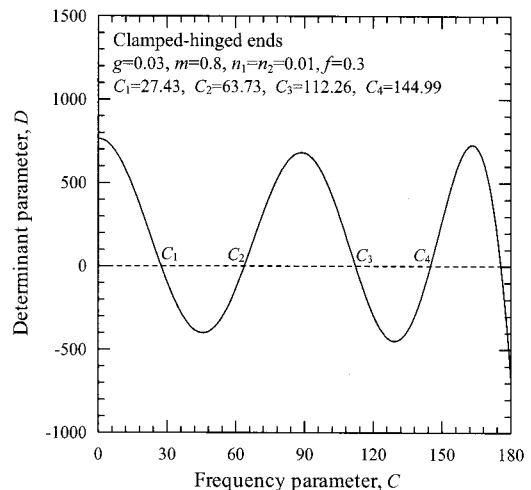


그림 5 D-C 관계 곡선

그림 5는 본 연구에서 비선형 방정식의 해법에 이용한 Regula-Falsi법에 의하여 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하는 과정을 나타낸 것으로, 고정-회전의 단부조건을 갖고, $g=0.03$, $m=0.8$, $n_1=n_2=0.01$, $f=0.3$ 인 아치를 대상으로 하였다. 이 그림을 살펴보면 가정한 무차원 고유진동수 C 의 증가에 따라 행렬값 D 는 감소와 증가를 반복하며, $D=0$ 이 되는 C 값이 존재함을 알 수 있다. 이때의 C 가 대상 아치의 고유치이며, 행렬값 D 의 부호가 바뀌는 곳에서 고유치가 존재하므로 Regula-Falsi법을 이용하여 무차원 고유진동수를 산정하였다. 이러한 과정을 반복적으로 수행하면 구하고자 하는 차수의 무차원 고유진동수를 산정할 수 있으며, 본 연구에서는 최저차 4모드의 무차원 고유진동수를 산정하였다.

표 1은 본 연구의 이론적 전개과정 및 수치해석과정의 타당성을 검증하기 위하여 본 연구의 수치해와 문헌(Lee and Wilson, 1990)의 결과를 비교한 것이다. 문헌의 결과는 세장비가 10, 20, 30, 50, 100인 경우에 대한 값이므로 본 연구에서는 단면폭비 g , 형상비 m 및 두께비 n_1 , n_2 를 적절히 조절하여 문헌의 세장비와 일치시켰다. 또한 문헌과 본 연구에서 무차원 고유진동수에 대한 정의가 다르므로 이를 일치시킨 후 무차원 고유진동수를 산정하였다. 이 표를 살펴보면 본 연구에서 채택한 직사각형 중공단면의 폭과 깊

이 및 두께를 적절히 조절하여 문헌의 세장비와 일치시킨 결과 문헌의 값과 본 연구의 수치해는 최대오차가 0.37%로 매우 작게 나타나 본 연구에서 유도한 이론식 및 수치해석과정의 타당성을 검증할 수 있다.

3.2 변수연구

그림 6은 무차원 단면적 k 가 일정할 때 단면폭비 g 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 본 연구에서는 무차원 단면적 k 값으로 $k=5 \times 10^{-5}$ 을 사용하였으며, 이 값은 $g=0.04$, $m=0.8$, $n_1=n_2=0.01$ 의 값을 갖는 실용적인 아치의 제원을 이용하여 계산한 것이다. k 가 일정하기 위해서는 단면폭비 g 가 증가할 때 단면의 깊이가 감소하여야 하며, 식 (28)로부터 $m=kg^{-2}(1-c_1c_2)^{-1}$ 로 구할 수 있다. 고정-고정, $k=5 \times 10^{-5}$, $f=0.3$ 인 아치를 대상으로 단면폭비 g 를 변화시키면서 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 고찰하였다. 이 그림에서 실선은 $n_1=0.01$, $n_2=0.02$, 점선은 $n_1=0.02$, $n_2=0.01$ 로 두 가지 경우 모두 g 값이 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 감소하였으며, 작은 g 에서 감소율은 더 크게 나타났다. 동일한 단면적에서는 g 값이 증가하면 깊이가 감소하게 되므로 세장비가 증가하여 무차원 고유진동수가 감소하는 것으로 판단된다. 또한 $n_2 > n_1$ 인 실선이 $n_1 > n_2$ 인 점선보다 같은 g 값에서 무차원 고유진동수가 크게 나타나 동일한 단면적을 갖는 중공단면의 경우 수직판의 두께보다 수평판의 두께가 크면 진동에 대한 강성이 커짐을 알 수 있다.

표 1 본 연구와 문헌(Lee and Wilson, 1990)의 C_i 값 비교

아치 제원	단면 제원	세장비	C_i	본 연구	문헌	오차 (%)*
회전 - 회전 $f=0.1$	$g=0.10$ $m=2.30$ $n_1=0.01$ $n_2=0.02$	10	C_1	10.98	10.94	0.37
			C_2	28.75	28.72	0.10
			C_3	33.80	33.73	0.21
	$g=0.08$ $m=1.45$ $n_1=0.01$ $n_2=0.02$	20	C_1	16.32	16.30	0.12
			C_2	34.75	34.71	0.12
			C_3	62.74	62.75	0.02
	$g=0.06$ $m=1.25$ $n_1=0.01$ $n_2=0.03$	30	C_1	22.38	22.37	0.04
			C_2	35.73	35.71	0.06
			C_3	80.36	80.31	0.06
	$g=0.05$ $m=1.00$ $n_1=0.02$ $n_2=0.02$	50	C_1	35.16	35.15	0.03
			C_2	36.25	36.23	0.06
			C_3	83.13	83.10	0.04
	$g=0.04$ $m=0.65$ $n_1=0.06$ $n_2=0.06$	100	C_1	36.47	36.45	0.05
			C_2	64.79	64.76	0.05
			C_3	89.09	89.06	0.03

* Deviation(%) = |(this study-reference)/reference| × 100

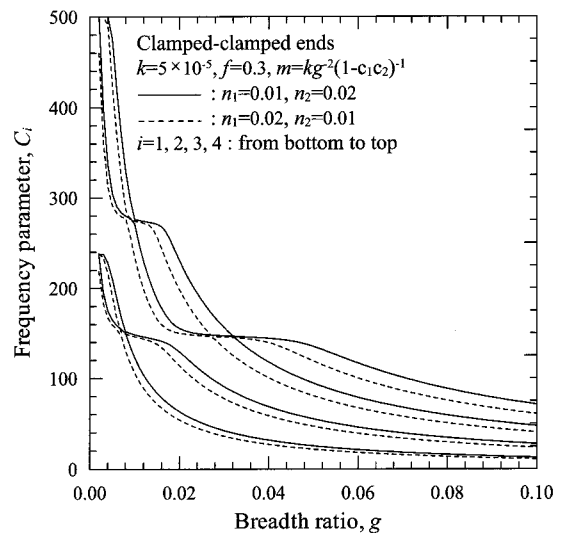


그림 6 g 에 따른 C_i 의 변화

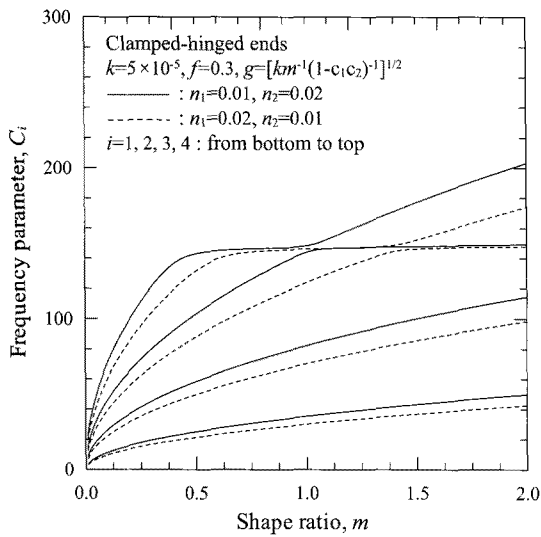


그림 7 m 에 따른 C_i 의 변화

그림 7은 무차원 단면적 k 가 일정할 때 형상비 m 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. k 가 일정하기 위해서는 형상비 m 이 증가할 때 단면폭비 g 가 감소하여야 하며, 식 (28)로부터 $g = [km^{-1}(1 - c_1c_2)^{-1}]^{1/2}$ 로 산정할 수 있다. 고정-회전, $k = 5 \times 10^{-5}$, $f = 0.3$ 인 아치를 대상으로 형상비 m 을 변화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 이 그림에서 실선은 $n_1 = 0.01$, $n_2 = 0.02$, 점선은 $n_1 = 0.02$, $n_2 = 0.01$ 로 두 가지 경우 모두 m 값이 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 증가하는 것으로 나타났다. 이때 작은 m 값에서 C_i 값의 증가가 크게 나타나고, m 이 점차 증가하면 C_i 의 증가율은 다소 감소하게 되며, 일부 모드는 m 값이 일정값에 도달하면 C_i 가 특정 값으로 수렴해감을 알 수 있다. 따라서 직사각형 중공단면 아치의 진동에 대한 강성을 증가시키기 위하여 단면의 깊이를 증가시키는 것은 매우 효과적인 방법이나 깊이를 특정 값 이상으로 크게 증가시키는 것은 무의미하며, 특히 $m > 1$ 이면 아치가 횡방향 좌굴을 일으킬 가능성이 크므로 이러한 점을 감안한 범위 내에서 단면폭과 깊이의 비율을 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 진동에 대한 강성이 보다 큰 단면의 확보가 가능할 것으로 사료된다. 또한 그림 6에서와 같이 $n_2 > n_1$ 인 실선이 $n_1 > n_2$ 인 점선보다 동일 m 값에서 무차원 고유진동수가 크게 나타나 수평판의 두께가 진동에 미치는 영향이 더 크음을 알 수 있다.

그림 8은 두께비 n_1 , n_2 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 회전-회전, $g = 0.03$, $m = 0.7$, $f = 0.3$ 인 아치를 대상으로 두께비 n_1 , n_2 를 변화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. n_1 값이 증

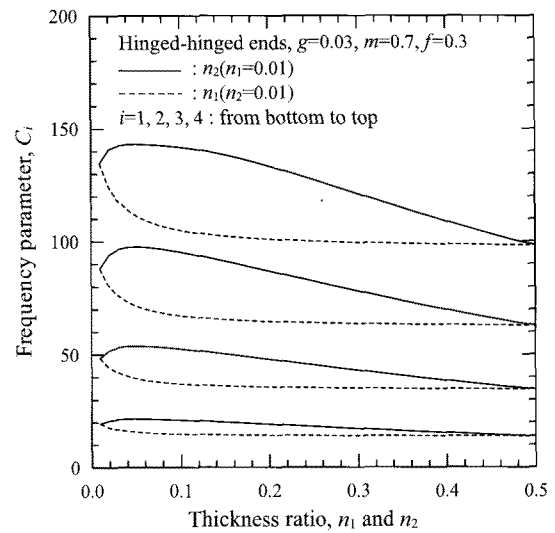


그림 8 n_1 , n_2 에 따른 C_i 의 변화

가하면 중공단면의 수직판이 점점 두꺼워지며, n_2 값이 증가하면 수평판이 점점 두꺼워져 $n_1 = 0.5$ 또는 $n_2 = 0.5$ 이면 속이 완전히 채워진 중실단면을 의미한다. 이 그림에서 점선으로 나타낸 n_1 값이 증가하면 무차원 고유진동수는 감소하며, 작은 n_1 에서 감소율이 더 크음을 알 수 있다. 이는 중공단면의 폭과 깊이가 일정하고, 수직판이 두꺼워지면 단면적 A 와 단면2차모멘트 I 가 증가하게 되는데, 이 때 A 의 증가율이 I 의 증가율보다 크게 나타나 단면회전반경 r 값이 감소하게 되며, 이는 세장비의 증가를 가져와 결론적으로 무차원 고유진동수가 감소하는 것으로 분석되었다. 한편 실선으로 나타낸 n_2 값이 증가하면 C_i 는 일시적으로 증가하다가 감소하는데, 이는 n_2 값이 매우 작을 때에는 수평판의 두께가 증가하면 단면회전반경 r 이 증가하여 상으로 무차원 고유진동수가 증가하며, n_2 값이 특정값 이상으로 증가하면 단면회전반경 r 이 감소하여 무차원 고유진동수가 증가하며, n_2 값이 특정 값 이원 고유진동수가 감소하는 것으로 판단된다.

한편 이 그림에서 $n_1 = n_2 = 0.01$ 인 중공단면에 비하여 $n_1 = n_2 = 0.5$ 인 중실단면의 제1고유진동수 값은 28.56% 정도 감소하는 것으로 나타났다. 따라서 중공단면을 갖는 아치구조의 고유진동수를 증가시키기 위하여 단면의 두께만을 증가시키는 것은 바람직하지 않으며, 단면폭과 깊이 및 두께를 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 보다 큰 고유진동수를 갖는 단면의 선택이 가능할 것으로 판단된다. 또한 현장 여건상 폭과 깊이를 조절할 수 없는 경우에는 수직판보다 수평판의 두께를 조절하는 것이 진동에 대한 강성을 제어할 수 있는 효과적인 방법이다.

5. 결 론

본 논문은 단면적이 일정한 직사각형 중공단면을 갖는 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 중공단면의 형상으로 가장 널리 이용되고 있는 직사각형단면을 채택하였으며, 원호아치에 비해 구조적 안정성이 우수한 포물선형 아치를 대상아치의 선형으로 결정하였다. 대상아치의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하고, 미분방정식을 효율적으로 해석하여 정확한 고유진동수를 산정할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였으며, 제 변수 변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

- ① 직사각형 중공단면의 단면적이 일정할 때 단면폭이 증가하면 무차원 고유진동수는 감소한다.
- ② 직사각형 중공단면의 단면적이 일정할 때 단면의 높이가 증가하면 무차원 고유진동수는 증가한다.
- ③ 동일한 단면적을 갖는 중공단면의 경우 수직판의 두께보다 수평판의 두께가 크면 진동에 대한 강성이 크다.
- ④ 단면폭과 단면높이가 동일한 경우 중실단면에 비하여 중공단면의 무차원 고유진동수가 크다.

본 연구의 결과를 이용하면 직사각형 중공단면 아치의 단면폭과 깊이 및 두께의 비율을 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 진동에 대한 강성이 보다 큰 단면의 확보가 가능할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

오상진, 서종원, 이병구 (2002) 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 최저차 대칭 및 역대칭 고

- 유진동, 한국전산구조공학회 논문집, 15(2), pp.367~377.
- Al-Khafaji, A.W., Tooley, J.R. (1986) Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Auciello, N.M., De Rosa, M.A. (1994) Free Vibrations of Circular Arches : A Review, *Journal of Sound and Vibration*, 176(4), pp.433~458.
- Borg, S.F., Gennaro, J.J. (1959) Advanced Structural Analysis, New Jersey: Van Nostrand.
- Haftka, R.T., Grudal, Z., Kamat, M.P. (1990) Element of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher.
- Hikami, Y. (1982) Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation, IHI Report, 6, pp.47~52.
- Johnson, E.R. (1982) Load-Frequency Relations for a Clamped Shallow Circular Arch, *AIAA Journal*, 20, pp.1763~1765.
- Lee, B.K., Oh, S.J. (1996) Planar Free Vibrations of Stepped Arches, Proceeding of 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Seoul, pp.815~820.
- Lee, B.K., Wilson, J.F. (1990) Free Vibrations of Arches with Variable Curvature, *Journal of Sound and Vibration*, 136(1), pp.75~89.
- Maurizi, M. J., Rossi R. E., Belles, P. M. (1991) Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width, *Journal of Sound and Vibration*, 144(3), pp.357~361.
- Wilson, J.F., Lee, B.K. (1995) Free Vibrations of Catenary Arches with Unsymmetric Axes, *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, 3(5), pp.511~525.