

계단형 외팔보의 등가보 변환에 의한 기본고유진동수 해석

Fundamental Natural Frequency Analysis of Stepped Cantilever Beams by Equivalent Beam Transformation Technique

문 상 필†

홍 순 조*

Moon, Sang-Pil

Hong, Soon-Jo

(논문접수일 : 2008년 5월 22일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 3일)

요 지

보의 고유진동수는 진동해석 뿐만 아니라 구조물의 동적특성을 파악하는데 중요한 역할을 한다. 보의 단면이 불연속적으로 변하는 계단형 보의 고유진동수 해석은 복잡하다. 이런 계단형 보의 진동해석은 Rayleigh-Ritz법, FEM 등과 같은 근사해석법이 흔히 사용되는데 이들 해석의 정확성은 분할요소의 수, 계산의 반복수, 가정치점곡선의 형상에 따라 좌우된다. 본 연구에서는 계단형 외팔보의 등가보 변환 방법을 이용한 기본고유진동수의 근사해석방법을 제시하고자 하였으며 여러 예제에 대하여 제안방법과 유한요소해석 결과를 비교하여 그 적용성과 신뢰성을 검증하였다.

핵심용어 : 계단형 외팔보, 기본고유진동수, 등가강성, 등가질량, 등가보

Abstract

The natural frequency of a beam plays an important role in not only vibration analysis but also understanding its dynamic characteristics. It is complicated to analyse the natural frequency of a stepped beam with discontinuously varying section. Approximate analysis methods such as Rayleigh-Ritz method, FEM, etc. are frequently used for the vibration analysis of stepped beams. In such a case, accuracy of these methods depends upon the number of partitioned elements, the number of the iterations in calculation and the assumed mode shape. This study presents an approximate analysis method for the fundamental natural frequency analysis of stepped cantilever beam, using equivalent beam transformation technique. Validity and usefulness are verified by comparing the proposed method with FEM for several example problems.

Keywords : stepped cantilever beam, fundamental natural frequency, equivalent stiffness, equivalent mass, equivalent beam

1. 서 론

변단면 보에는 단면이 연속적으로 변하는 테이퍼 보(tapered beam)와 불연속적으로 변하는 계단형 보(stepped beam)등이 있다. 실제 구조에서 변단면 보는 균등단면 보에 비해 역학적으로 합리적일 뿐만 아니라 미적으로도 유리한 경우가 많다. 또한 교량이나 건축물에서 보 하부에 설비공간을 확보할 수 있는 기능적 장점도 있다. 이러한 이점 때문에 변단면 보는 건축 및 토목을 비롯한 여러 공학 분야에서 광범위하게 활용되고 있지만 변단면 보에 대한 해석의 복잡성 때문에 설계자들이 기피

하는 경향이 있다.

변단면 보의 진동해석은 균등단면 보와 달리 보의 강성 EI 와 질량 m 이 일정하지 않기 때문에 해석과정이 복잡해진다. 특히 계단형 보는 테이퍼 보와 달리 강성 EI 와 질량 m 이 보의 축에 따라 불연속적으로 변하기 때문에 그 해석이 더욱 복잡해진다. 계단형 보의 해석방법으로 집중질량에 의한 다자유도모델에 대하여 Rayleigh-Ritz방법(Biggs, 1982), 유한요소법(Paz, 1997), Stodola방법(Hurty 등, 1967) 등이 제안되어 있지만 이들 해석방법은 가정치점곡선의 적합성 여부, 분할요소의 수, 또는 계산의 반복수에 따라 해석결과의

† 책임저자. 정회원 · (주)희림종합건축사사무소 건축구조기술사

Tel: 02-3410-8708 ; Fax: 02-3410-9077

E-mail: fse21@heerim.com

* 정회원 · 우석대학교 건축학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 10월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

정확성이 좌우되므로 신뢰성이 높은 결과를 얻기 위해서는 상당한 수고가 요구될 수 있다.

이러한 해석상의 복잡성과 비경제성을 극복하기 위하여 다자유도계 모델의 단자유도계 변환에 의한 해석방법 및 활용에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다(문상필 등, 2006; 송호산 등, 2003; 천태삼 등, 1995). 본 연구에서는 계단형 외팔보를 동역학적으로 등가의 균등단면 외팔보로 변환하는 방법을 유도하고 이를 이용하여 등가 단자유도로 변환한 계단형 외팔보의 기본고유진동수를 구하는 방법을 제안하고자 한다.

2. 오일러 보의 진동

2.1 진동방정식

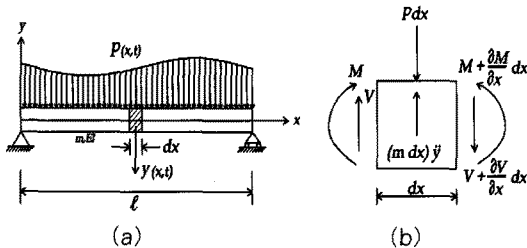


그림 1 보의 횡진동

그림 1과 같이 단면이 일정한 보의 횡진동(transverse vibration)을 생각하자. 전단변형과 회전관성모멘트를 무시하면 이 오일러 보의 진동방정식은 다음과 같이 된다(Biggs, 1982; Paz, 1997).

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x,t) \quad (1)$$

여기서, m 은 질량, P 는 동적 분포하중, y 는 변위, EI 는 보의 휩강성이다.

2.2 자유진동의 해

오일러 보의 진동방정식 (1)의 해 $y = y(x,t)$ 을 다음과 같이 가정한다.

$$y(x,t) = f(t) \phi(x) \quad (2)$$

식 (2)의 양변을 시간 t 에 관해 2차 편미분을 하면 다음을 얻는다.

$$\ddot{y}(x,t) = \ddot{f}(t) \phi(x) \quad (3)$$

여기서, $\dot{y} \equiv \frac{\partial y}{\partial t}$ 이다.

또한, 식 (2) 양변을 x 에 관해 4차 편미분을 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(t) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$EI f(t) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} + m \phi(x) \ddot{f}(t) = P(x,t) \quad (5)$$

여기서 하중 $P(x,t) = 0$ 일 때 식 (5)는 자유진동 상태에 관한 식으로 되며 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$EI f(t) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} + m \phi(x) \ddot{f}(t) = 0 \quad (6)$$

또는

$$\frac{EI}{m \phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \quad (7)$$

식 (7)의 좌변은 독립변수 x 에 관한 식이며 우변은 독립변수 시간 t 에 관한 식이므로 양변이 항상 등식관계가 성립한다는 것은 양변 값이 어떤 상수라는 것을 의미하므로 이 값을 ω^2 로 놓으면 식 (7)로부터 다음의 두 식을 얻는다.

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - a^4 \phi(x) = 0 \quad (9)$$

여기서, $a^4 \equiv \frac{m \omega^2}{EI}$ 이다.

미분방정식 (8)과 (9)의 일반해는 각각

$$f(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = C \sin(\omega t + \psi) \quad (10)$$

$$\phi(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax \quad (11)$$

형태로 된다. C_1, C_2 는 초기조건에 의해 결정될 적분상수이며

A_1, A_2, A_3, A_4 는 경계조건에 의해 결정될 적분상수이다.

2.3 균등단면 외팔보의 고유진동모드

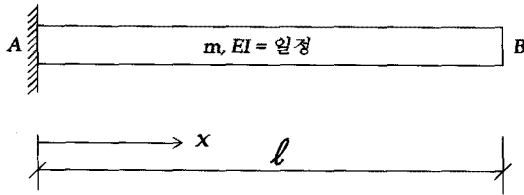


그림 2 균등단면 외팔보

그림 2의 외팔보는 고정단에서 처짐 $y=0$, 처짐각 $dy/dx=0$ 이고 자유단에서 전단 $V=0$, 모멘트 $M=0$ 이며 식 (2)에서 $f(t) \neq 0$ 이므로 경계조건은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} x=0 \text{에서 } \phi(0) &= 0 \text{ 과 } \phi'(0) = 0 \\ x=l \text{에서 } \phi''(l) &= 0 \text{ 과 } \phi'''(l) = 0 \end{aligned}$$

첫 번째의 두 경계조건을 식 (11)에 적용하면 $A_4 = -A_2$, $A_3 = -A_1$ 의 관계를 얻으며 두 번째 조건으로부터 $\cos a_1 l \cdot \cosh a_1 l + 1 = 0$ 의 조건식을 얻는다. 이 조건식을 만족하는 최소 a 값은 $a_1 = (0.596868)\pi/l$ 이다. 이에 대응하는 ω_1 은 다음과 같이 구해진다.

$$\omega_1 = \frac{(0.596868)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (12)$$

이 ω_1 이 균등단면 외팔보의 1차모드에 대한 고유진동수이다. 그리고 균등단면 외팔보에서 고유진동수 ω_1 에 대응하는 고유모드함수 $\phi_1(x)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\phi_1(x) = A_n [\beta_1 (\sin a_1 x - \sinh a_1 x) + \cosh a_1 x - \cos a_1 x] \quad (13)$$

여기서, A_n 은 임의의 상수이며 β_1 는 다음과 같이 된다.

$$\beta_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_1 = -\frac{\cos a_1 l + \cosh a_1 l}{\sin a_1 l + \sinh a_1 l} \quad (14)$$

3. 계단형 외팔보의 등가변환

앞에서 오일러보 이론을 이용하여 균등단면 외팔보에 대한 고유진동수와 고유모드함수 유도과정을 기술하였다. 이를 이용

하여 계단형 외팔보를 동역학적 등가보로 변환하기 위한 등가강성 $(EI)_e$ 와 등가질량 m_e 를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

계단형 외팔보의 등가강성 $(EI)_e$ 는 계단형 보의 최대 처짐과 균등단면 보로 변환한 등가보의 등가강성 $(EI)_e$ 에 의한 최대 처짐이 같다는 조건을 적용하여 구하게 된다. 한편, 계단형 외팔보의 등가질량 m_e 는 균등단면 외팔보의 고유모드함수식 (13)을 이용하여 구한 계단형 외팔보의 질량과 등가보로 변환한 등가질량 m_e 가 같다는 가정을 적용하여 구하고자 한다.

3.1 계단형 외팔보의 등가강성

그림 3과 같은 계단형 외팔보의 등가강성 $(EI)_e$ 는 등분포 단위하중 위하중에 의한 계단형 외팔보의 자유단 처짐과 균등단면 외팔보로 변환한 등가 외팔보의 자유단 처짐이 같다고 가정한다.

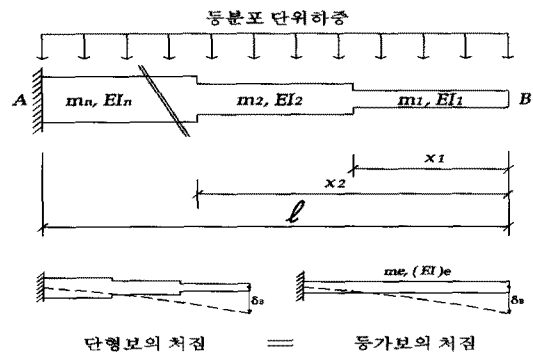


그림 3 계단형 외팔보

모멘트면적법에 의한 외팔보의 자유단 처짐 δ_B 를 표현하면 다음과 같다.

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M}{EI(x)} x dx = \int_0^l \frac{M}{(EI)_e} x dx \quad (15)$$

상기 식으로부터 등가강성 $(EI)_e$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(EI)_e = \frac{\int_0^l M x dx}{\int_0^l \frac{M}{EI(x)} x dx} = \frac{\int_0^l \frac{x^3}{2} dx}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{EI_i} \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \frac{x^3}{2} dx} \quad (16)$$

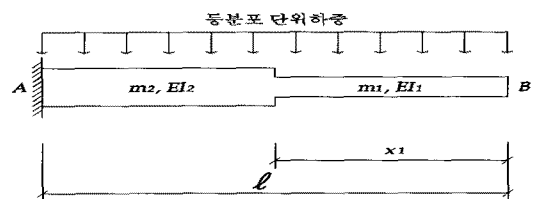


그림 4 단면이 2종류인 계단형 외팔보

그림 4와 같이 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 경우에 식 (16)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 (EI)_e &= \frac{\int_0^\ell \frac{x^3}{2} dx}{\frac{1}{EI_1} \int_0^{x_1} \frac{x^3}{2} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{x_1}^\ell \frac{x^3}{2} dx} \\
 &= \frac{\frac{\ell^4}{8}}{\frac{1}{EI_1} \left(\frac{x_1^4}{8} \right) + \frac{1}{EI_2} \left(\frac{\ell^4}{8} - \frac{x_1^4}{8} \right)} \\
 &= \frac{\frac{\ell^4}{8}}{\left(\frac{x_1^4}{8} \right) \left(\frac{1}{EI_1} - \frac{1}{EI_2} \right) + \frac{\ell^4}{8EI_2}} \quad (17)
 \end{aligned}$$

식 (17)에 길이비 $a = x_1/\ell$, 강성비 $k_I = EI_2/EI_1$ 를 적용하여 정리하면 단면이 2종류일 경우 계단형 외팔보의 등가강성 $(EI)_e$ 는 다음과 같이 표기할 수 있다.

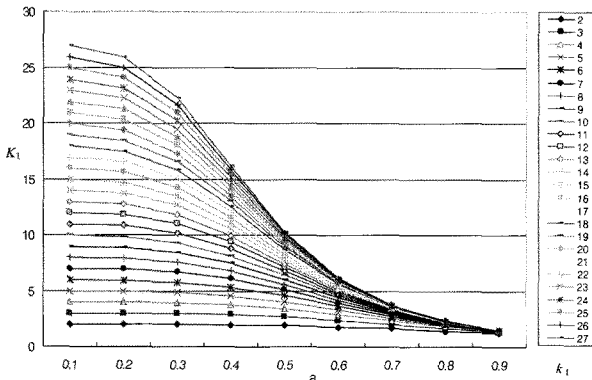


그림 5 단면이 2종류인 계단형 외팔보 길이비 a 에 따른 등가강성 형상계수 K_I

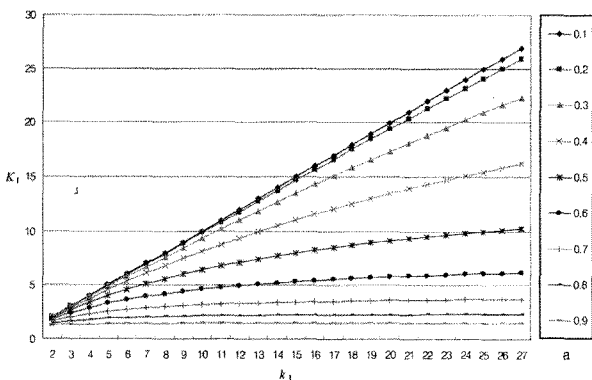


그림 6 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 강성비 k_I 에 따른 등가강성 형상계수 K_I

$$(EI)_e = K_I EI_1 \quad (18)$$

여기서 K_I 는 등가강성 형상계수로서 다음과 같다.

$$K_I = \frac{k_I}{a^4(k_I - 1) + 1} \quad (19)$$

그림 5와 그림 6은 그림 4와 같은 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 길이비 $a = x_1/\ell$ 와 강성비 $k_I = EI_2/EI_1$ 에 대한 식 (19)의 등가강성 형상계수 K_I 를 나타낸 그림이다. 그림 5는 길이비 a 에 따른 등가강성 형상계수 K_I 의 변화를 나타낸 그래프이고 그림 6은 강성비 k_I 에 대한 등가강성 형상계수 K_I 로 표시한 것이다. 두 그림에서 계단형 외팔보의 강성비 k_I 가 클수록, 길이비 a 가 작을수록 등가형상계수 K_I 는 증가하는 것을 보여주고 있다.

3.2 계단형 외팔보의 등가질량

계단형 외팔보의 등가질량 m_e 는 계단형 외팔보의 모드형상과 균등단면외팔보의 모드형상이 같다고 가정하고 운동에너지(kinetic energy) 질량관계식 $\int m(x) \phi^2 dx$ (Hurty 등, 1967)에 균등단면 외팔보의 고유모드함수를 적용하여 구한 계단형 외팔보의 질량 $m(x)$ 에 의한 운동에너지와 균등단면 보로 변환했을 때의 등가질량 m_e 에 의한 운동에너지가 같다고 가정하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int m(x) \phi^2 dx = \int m_e \phi^2 dx \quad (20)$$

여기서, $m(x)$, m_e , ϕ 는 각각 계단형 외팔보의 질량, 균등단면의 보로 변환했을 때의 등가질량, 균등단면 외팔보의 고유모드함수이다.

위 두 식으로부터 1차모드에 대한 등가질량 m_e 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 m_e &= \frac{\int m(x) \phi_1^2 dx}{\int \phi_1^2 dx} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \phi_1^2 dx}{\int_0^\ell \phi_1^2 dx} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i [I\phi_1^2]_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}}}{\ell} \quad (21)
 \end{aligned}$$

식 (21)에서 $I\phi_1^2$ 는 균등단면 외팔보의 고유모드함수 ϕ_1^2 을

적분한 값이며 그 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \theta_1^2 = & x + \frac{(1-\beta_1^2)}{4a_1} \sin 2a_1 x - \frac{\beta_1}{2a_1} \cos 2a_1 x \\
 & + \frac{(1+\beta_1^2)}{4a_1} \sinh 2a_1 x + \frac{\beta_1^2}{2a_1} \cosh 2a_1 x \\
 & - \frac{2\beta_1}{a_1} \sin a_1 x \sinh a_1 x \\
 & - \frac{(1+\beta_1^2)}{a_1} \sin a_1 x \cosh a_1 x \\
 & - \frac{(1-\beta_1^2)}{a_1} \cos a_1 x \sinh a_1 x
 \end{aligned} \tag{22}$$

그림 4와 같은 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 경우에는 식 (21)에 길이비 $a = x_1/\ell$ 와 질량비 $k_m = m_2/m_1$ 을 적용하여 정리하면 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$m_e = K_m m_1 \tag{23}$$

여기서 K_m 은 등가질량 형상계수이다.

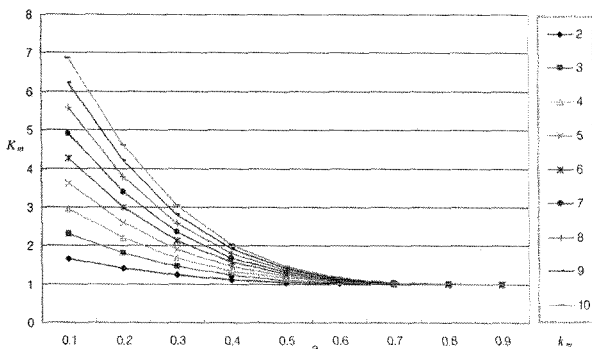


그림 7 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 길이비 a 에 따른 등가질량 형상계수 K_m

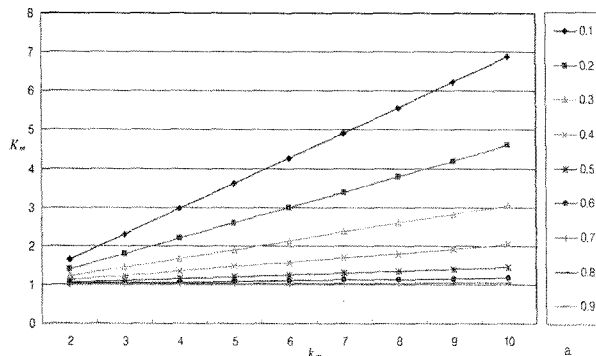


그림 8 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 질량비 k_m 에 따른 등가질량 형상계수 K_m

그림 7과 그림 8은 그림 4와 같이 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 길이비 $a = x_1/\ell$ 와 질량비 $k_m = m_2/m_1$ 에 대한 등가질량 형상계수 K_m 을 나타낸 그림이다. 그림 7은 길이비 a 에 따른 등가질량 형상계수 K_m 으로 나타낸 그래프이고 그림 8은 질량비 k_m 에 대한 등가질량 형상계수 K_m 으로 나타낸 것이다. 두 그림에서 길이비 $a = 0.7 \sim 0.9$ 의 범위에서는 질량비 k_m 의 크기에 관계없이 등가질량 형상계수 K_m 이 큰 변화가 없이 $K_m = 1$ 의 값에 근접함을 보여주고 있다. 그러나 길이비 a 가 감소할수록, 질량비 k_m 이 증가할수록 등가질량 형상계수 K_m 은 증가하였다.

3.3. 계단형 외팔보의 기본고유진동수

균등단면 외팔보의 기본고유진동수를 구하는 식 (12)에 계단형 외팔보의 등가강성 $(EI)_e$ 와 등가질량 m_e 을 대입하면 계단형 외팔보의 기본고유진동수는 다음과 같다.

$$\omega_1 = \frac{(0.596868)^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{(EI)_e}{m_e}} \tag{24}$$

등가강성에 관한 식 (18)과 등가질량에 관한 식 (23)을 식 (24)에 대입하면 계단형 외팔보의 기본고유진동수를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\omega_1 = \frac{(0.596868)^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{K_I \cdot EI_1}{K_m \cdot m_1}} = \omega_0 \sqrt{\frac{K_I}{K_m}} \tag{24a}$$

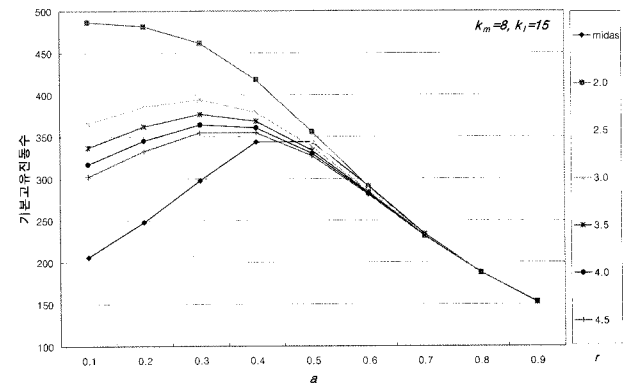
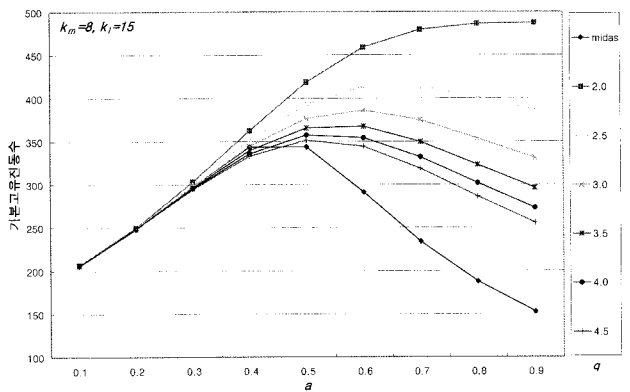
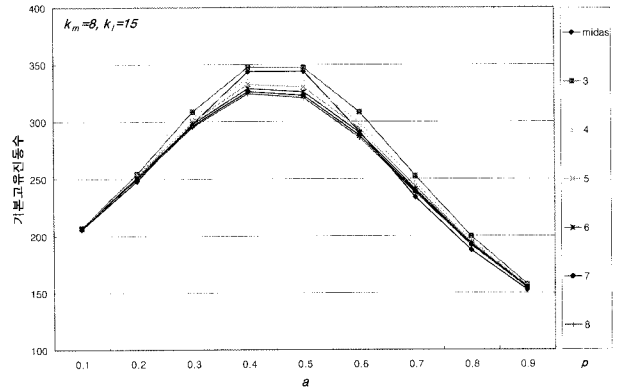
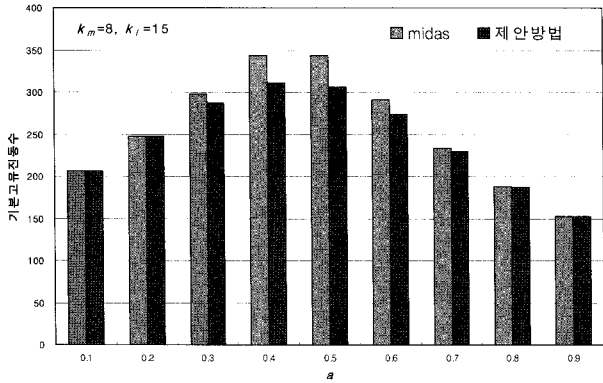
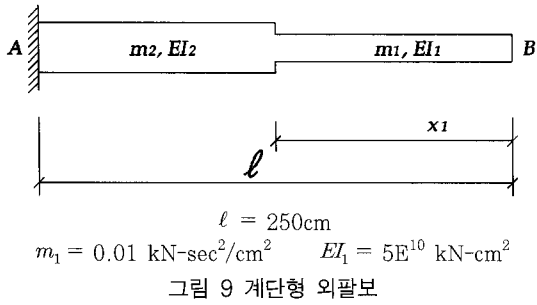
여기서 ω_0 은 강성 EI_1 과 질량 m_1 에 대한 고유진동수이며

$$\omega_0 = \frac{(0.596868) \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}} \text{ 이다.}$$

4. 계단형 외팔보의 보정계수

계단형 외팔보에 대하여 등가강성과 등가질량을 적용한 등가보 변환에 의한 기본고유진동수의 제안식을 검증하기 위하여 그림 9에 표현된 모델에서 $m_1 = 0.01 \text{ kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$, $EI_1 = 5E^{10} \text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ 은 고정시키고 x_1, m_2, EI_2 를 변화시켜 등가보 변환에 의한 기본고유진동수를 산정하였으며 계단형 외팔보를 20등분한 유한요소 해석결과와 비교하였다.

그림 10은 여러 단면변화에 대한 해석 중 질량비 $k_m = 8$ 과 강성비 $k_I = 15$ 인 경우의 기본고유진동수를 비교하고 있다. 그림 10에서 계단형 외팔보의 등가보 변환에 의한 기본



고유진동수는 유한요소법의 해석결과와 비교하면 길이비가 0.5일 경우 최대 약 12.5%의 오차가 발생되는 것으로 나타났으며 다른 단면변화에서도 비슷한 결과가 나타났다. 이와 같은 등가보 변환에 의한 계단형 보의 기본고유진동수 해석에서 발생하는 오차는 보의 실제 강성에 의한 처짐 곡선과 등가강성에 의한 처짐 곡선의 차이, 계단형 외팔보와 균등단면 외팔보의 모드형상이 같다는 가정에서 생긴 운동에너지의 차이 때문으로 추정된다. 그러므로 계단형 외팔보의 등가보 변환에 의한 해석결과의 정확도를 유지하기 위해서는 기본고유진동수에 관한 식 (24)에 보정계수를 도입하는 것이 필요한 것으로 판단된다. 따라서 식 (24), 식 (24a)에 보정계수 α 를 다음과 같이 도입한다.

$$\omega_1 = \alpha \cdot \frac{(0.596868)^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{(EI)_e}{m_e}} \quad (25)$$

$$\omega_1 = \alpha \cdot \omega_0 \sqrt{\frac{K_I}{K_m}} \quad (25a)$$

보정계수는 실제 강성에 의한 처짐각과 등가강성에 의한 처짐각의 관계 또는 강성비 및 질량비와의 상관관계로 표시할 수 있을 것이다. 보정계수는 $\alpha = \sqrt{\theta/\theta_{(EI)_e}}$, $\alpha = \sqrt{EI_{\max}/(EI)_e}$, $\alpha = \sqrt{K_m}$ 를 선택하였으며 그림9의 모델에서 x_1, m_2, EI_2 를 변화시킨 등가보 변환에 의한 해석 결과에 보정계수의 p, q, r 를 변화하면서 식 (25)를 적용하였을 때의 기본고유진동수를 산정하

여 유한요소법에 의한 결과치와 근접한 결과를 보여주는 보정계수를 선택하는 것으로 하였다. 보정계수에서 θ 는 자유단의 처짐각이고 $\theta_{(EI)_e}$ 은 등가변환보에 대한 처짐각이다.

그림 11에서 그림 13은 그림 9의 모델의 여러 단면변화 중에서 질량비 $k_m=8$ 과 강성비 $k_t=15$ 단면에 대하여 보정계수의 p, q, r 를 변화시켜 적용하였을 때의 기본고유진동수를 비교하고 있다.

그림 11은 보정계수의 p 변화에 따른 기본고유진동수 비

교를 보여주는 그림으로 길이비 $a = 0.1 \sim 0.3$ 범위에서는 $p = 6$, 길이비 $a = 0.4 \sim 0.5$ 범위에서는 $p = 3$, 길이비 $a = 0.7 \sim 0.9$ 범위에서는 $p = 8$ 을 적용한 보정계수에 의한 기본 고유진동수는 유한요소법에 의한 해석결과와 근접하였다.

그림 12는 보정계수의 q 변화에 따른 기본고유진동수 비교를 보여주는 그림으로 길이비 $a = 0.1 \sim 0.4$ 범위에서 $q = 3.0, 3.5$ 을 적용한 보정계수에 대한 기본고유진동수는 유한요소법에 의한 결과와 근접하였으며 길이비 $a = 0.4$ 를 초과할 경우에는 보정계수의 q 변화에 관계없이 그 오차가 컸다.

그림 13은 보정계수의 r 변화에 따른 기본고유진동수 비교를 보여주는 그림으로 길이비 $a = 0.1 \sim 0.6$ 범위에서는 모든 r 의 값에 의한 기본고유진동수는 유한요소법에 의한 결과와 오차가 컸으며 길이비 $a = 0.7 \sim 0.9$ 범위에서는 모든 r 의 변화에 관계없이 유한요소법에 의한 해석결과와 근접하였다.

그림 11에서 그림 13과 같은 방법으로 여러 계단형 외팔보에 대하여 보정계수의 p, q, r 을 변화시키면서 등가보 변환에 의한 기본고유진동수의 결과와 유한요소법에 의한 해석결과를 비교분석한 결과, 보정계수 α 는 다음 3가지 경우가 도출되었다.

$$\frac{EI_{\max}}{(EI)_e} < \frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}} \text{ 일 경우 } \alpha = \sqrt[3.5]{\frac{EI_{\max}}{(EI)_e}} \quad (26a)$$

$$\frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}} < K_m < \frac{EI_{\max}}{(EI)_{e_m}} \text{ 일 경우 } \alpha = \sqrt{\frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}}} \quad (26b)$$

$$K_m < \frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}} < \frac{EI_{\max}}{(EI)_{e_m}} \text{ 일 경우 } \alpha = \sqrt[2.5]{K_m} \quad (26c)$$

다만, 식 (26c)에서 K_m 과 $\theta/\theta_{(EI)_e}$ 의 차이가 5%미만일 경우에는 식 (26b)의 α 값을 사용할 때 오차가 줄어드는 것으로 나타났다.

그림 14는 그림 9의 계단형 외팔보 모델을 x_1, m_2, EI_2 를 변화시킨 여러 단면 중에서 질량비 $k_m = 8$ 과 강성비 $k_I = 15$

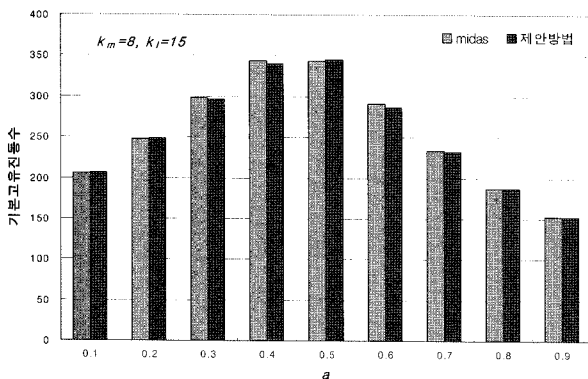


그림 14 보정계수를 적용한 계단형 외팔보의 기본고유진동수 비교

인 경우에 대하여 보정계수를 적용한 등가보 변환에 의한 기본고유진동수와 유한요소 해석결과를 비교한 그림으로써 보정계수를 적용한 등가보 변환에 의한 기본고유진동수는 유한요소법의 해석결과와 매우 근접한 결과를 보여주고 있다.

계단형 외팔보 자유단의 처짐각 θ 와 등가변환보에 대한 처짐각 $\theta_{(EI)_e}$ 는 다음과 같은 과정으로 구한다.

$$\theta = \int_0^\ell \frac{M}{EI_I} dx = \int_0^\ell \frac{2}{EI_I} dx \quad (27)$$

$$\theta_{(EI)_e} = \int_0^\ell \frac{x^2}{2(EI)_e} dx = \frac{\ell^3}{6(EI)_e} \quad (28)$$

그림 4와 같은 단면이 2종류인 계단형 외팔보일 경우에는 식 (27)과 식 (28)은 길이비 $a = x_1/\ell$ 와 강성비 $k_I = EI_2/EI_1$ 을 적용하면 다음 두 식과 같이 a 와 k_I 의 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\ell \frac{x^2}{EI_I} dx = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{x_1} + \frac{1}{EI_2} \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x_1}^\ell \\ &= \frac{x_1^3}{6} \left(\frac{1}{EI_1} - \frac{1}{EI_2} \right) + \frac{\ell^3}{6EI_2} \\ &= \frac{\ell^3}{6k_I EI_1} [a^3(k_I - 1) + 1] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \theta_{(EI)_e} &= \frac{\ell^3}{6(EI)_e} = \frac{\ell^3}{6K_I \cdot EI_1} \\ &= \frac{\ell^3}{6k_I EI_1} [a^4(k_I - 1) + 1] \end{aligned} \quad (30)$$

또한, 식 (29)와 식 (30)에 의해 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 처짐각과 등가변환보에 대한 처짐각의 비는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}} = \frac{a^3(k_I - 1) + 1}{a^4(k_I - 1) + 1} \quad (31)$$

그림 15는 식 (31)의 길이비 a 에 따른 처짐각비를 나타낸 그림으로 강성비 $k_I = 10$ 이하일 경우에는 길이비 $a = 0.6 \sim 0.7$ 일 때 처짐각비가 최대가 되며, 강성비 k_I 가 증가할수록 길이비 $a = 0.5$ 일 때 처짐각비는 최대를 보여주고 있다.

그림 16은 식 (31)의 강성비 k_I 에 대한 처짐각비를 나타낸 그림으로 길이비 $a = 0.3 \sim 0.6$ 의 범위일 경우에는 강성비 k_I 의 증가에 따라 급격한 처짐각비의 변화를 보여주고 있다.

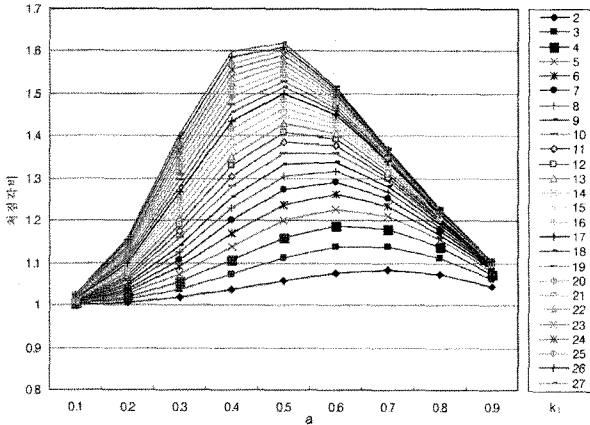


그림 15 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 길이비 a 에 따른 처짐각비 $\frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}}$

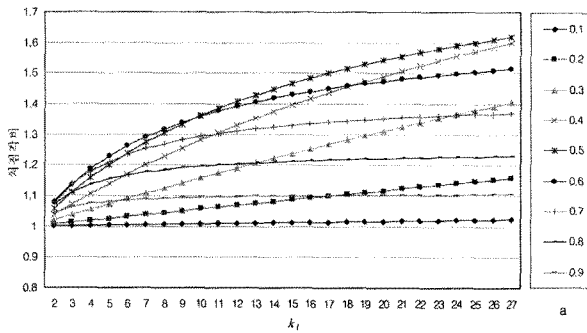


그림 16 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 강성비 k_1 에 따른 처짐각비 $\frac{\theta}{\theta_{(EI)_e}}$

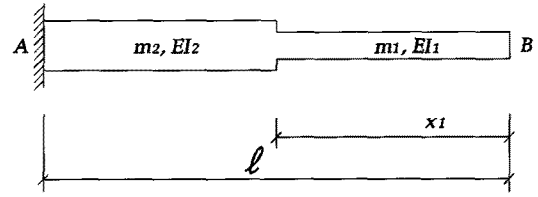
5. 수치 해의 검증

본 연구에서 제안한 등가강성(EI_e)와 등가질량(m_e)를 적용한 등가보 변환에 의한 계단형 외팔보의 기본고유진동수 해석에 대한 적용성과 신뢰성을 검증하기 위하여 여러 예제모델에 대하여 유한요소법의 해석결과와 비교하였다.

예제모델들의 해석 및 검증 순서는 다음과 같이 한다.

- ① 식 (16)과 식 (21)을 이용하여 등가강성(EI_e)와 등가질량 m_e 을 구한다.
- ② 식 (26a), 식 (26b), 식 (26c)를 이용하여 보정계수를 구한다.
- ③ 식 (25)를 이용하여 계단형 외팔보의 기본고유진동수를 구한다.
- ④ 유한요소법(MIDAS)에 의한 해석결과와 비교한다.

단면이 2종류인 예제모델에 대해서는 그림 17의 예제모델을 대상으로 하였으며 표 1은 그림 17의 예제모델에 대한 본 연구



$x_1 = 125\text{cm}$ $l = 250\text{cm}$
 $m_1 = 0.01\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$ $EI_1 = 5E^{10}\text{kN}\cdot\text{cm}^2$
 $m_2 = 0.02\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$ $EI_2 = 2E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2$

그림 17 단면이 2종류인 계단형 외팔보의 예제모델

표 1 그림 15예제모델의 해석 결과 비교

제안방법			유한요소법(MIDAS)
$\omega_1 = 229.73 \text{ rad/sec}$			
$(EI)_e = 1.6842E^{11} \text{ kN}\cdot\text{cm}^2$			
$m_e = 0.01051 \text{ kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$			
$\theta/\theta_{(EI)_e}$	$EI_{\max}/(EI)_e$	K_m	
1.1579	1.1875	1.0508	
$\alpha = 1.0200$			

의 등가강성(EI_e)와 등가질량 m_e 를 이용한 등가보 변환에 의한 기본고유진동수 해석결과와 유한요소법(MIDAS)의 해석결과와의 비교한 것으로 등가보 변환에 의한 기본고유진동수 해석 결과는 유한요소법에 의한 해석결과와 매우 근접하였다.

표 2는 그림 17의 예제모델을 x_1 과 m_2 및 EI_2 를 임의로 변화시켜서 본 연구의 등가강성(EI_e)와 등가질량 m_e 를 적용한 등가보 변환에 의한 해석결과와 유한요소법에 의한 해석결과를 비교한 것으로 이 들의 결과들도 매우 근접하고 있다.

그림 17의 예제모델을 질량 및 강성을 변화시켜 동일 강성비로 분류하여 질량비의 변화에 대한 고유진동수를 비교하여 그림 18에 나타냈다. 그림 18에서 동일한 강성비 k_1 를 갖는 단면이 2종류인 계단형 외팔보는 길이비 a 가 0.6이상 일 경우에는 보의 질량비 k_m 에 관계없이 기본고유진동수는 길이비 a 의 종류별로 거의 동일한 것으로 나타났다. 또한, 대부분의 조건에서 길이비 a 가 0.4~0.5사이에서 가장 높은 고유진동수가 산출되었다.

또한, 단면이 3종류 이상인 계단형 외팔보의 등가보 변환에 의한 기본고유진동수 해석의 타당성을 검증하기 위하여 그림 19의 예제모델 및 그림 20의 예제모델에 대한 본 연구의 해석결과와 유한요소법에 의한 해석결과를 비교하였다.

표 3은 그림 19 단면이 3종류인 계단형 외팔보의 예제모델에 대한 본 연구의 등가보 변환에 의한 기본고유진동수 해석결과와 유한요소 해석결과를 비교한 것으로 두 결과는 매우 근접함을 보여주고 있다. 표 4는 그림 20 단면이 5종류인 계단형 외팔보의 예제모델에 대한 등가보 변환에 의한 기

표 2 그림 17 예제모델의 단면변화에 따른 기본고유진동수의 비교
(단위 : rad/sec)

질량비 k_m	길이비 a	$k_f = 6$		$k_f = 10$		$k_f = 15$	
		제안방법	MIDAS	제안방법	MIDAS	제안방법	MIDAS
4	0.2	207.41	206.62	267.40	266.67	326.94	326.48
	0.4	258.89	257.57	328.06	325.77	393.36	388.66
	0.6	238.75	240.37	268.83	271.97	288.87	292.56
	0.8	176.46	176.67	183.72	183.81	187.70	187.70
6	0.2	177.62	176.64	228.99	228.00	279.98	279.20
	0.4	239.23	238.62	303.15	303.54	363.49	364.86
	0.6	237.94	238.64	267.92	270.85	287.89	291.87
	0.8	176.43	176.64	183.69	183.80	187.67	187.70
8	0.2	157.82	156.77	203.47	202.37	248.78	247.82
	0.4	223.46	222.94	283.17	284.66	339.53	343.62
	0.6	237.16	236.89	267.04	269.71	286.94	291.17
	0.8	176.41	176.63	183.67	183.80	187.65	187.69

MIDAS의 결과는 보를 20등분한 해석값임.

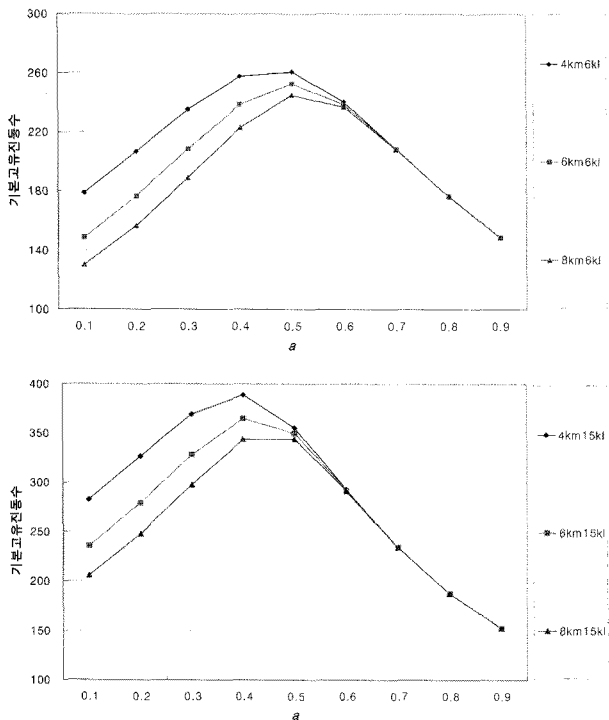
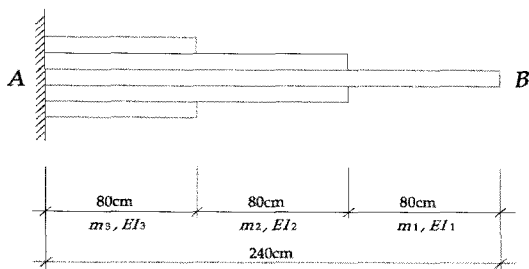
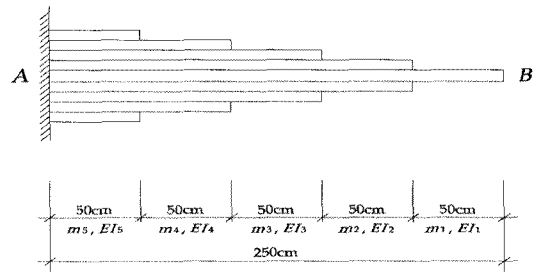


그림 18 질량비 변화에 따른 계단형 외팔보의 기본고유진동수 비교



$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0.01\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_1 &= 5E^{10}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_2 &= 0.02\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_2 &= 2E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_3 &= 0.03\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_3 &= 4E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

그림 19 단면이 3종류인 계단형 외팔보의 예제모델



$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0.01\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_1 &= 5E^{10}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_2 &= 0.02\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_2 &= 2E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_3 &= 0.03\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_3 &= 4E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_4 &= 0.04\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_4 &= 6E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2 \\
 m_5 &= 0.05\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2 & EI_5 &= 8E^{11}\text{kN}\cdot\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

그림 20 단면이 5종류인 계단형 외팔보의 예제모델

표 3 그림 19 예제모델의 해석 결과 비교

제안 방법			유한요소법(MIDAS)
$\omega_1 = 323.17\text{rad/sec}$			$\omega_1 = 323.00\text{rad/sec}$ * 18등분 해석.
$(EI)_e = 3.1456E^{11} \text{ kN}\cdot\text{cm}^2$			
$m_e = 0.0119 \text{ kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$			
$\theta/\theta_{(EI)e}$	$EI_{\max}/(EI)e$	K_m	
1.1942	1.1875	1.1904	
$\alpha = 1.0300$			

표 4 그림 20 예제모델의 해석 결과 비교

제안 방법			유한요소법(MIDAS)
$\omega_1 = 367.75\text{rad/sec}$			$\omega_1 = 369.89\text{rad/sec}$ * 20등분 해석.
$(EI)_e = 6.1856E^{11} \text{ kN}\cdot\text{cm}^2$			
$m_e = 0.01534\text{kN}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$			
$\theta/\theta_{(EI)e}$	$EI_{\max}/(EI)e$	K_m	
1.1897	1.2933	1.5338	
$\alpha = 1.0924$			

본고유진동수의 해석결과와 유한요소법에 의한 해석결과를 비교한 것으로 두 결과는 매우 근접함을 보여주고 있다.

6. 결론

본 연구에서는 계단형 외팔보를 동역학적으로 등가의 균등 단면 보로 변환하는 방법과 이를 이용하여 오일러-베르누이 보 이론을 기초로 계단형 외팔보의 기본고유진동수 해석방법을 제안하였다. 여러 모델에 대하여 계단형 외팔보의 등가보 변환에 의한 기본고유진동수의 해석결과와 유한요소법에 의한 기본고유진동수 해석결과를 비교분석하여 계단형 외팔보를 등가보로 변환시 발생하는 오차를 줄이기 위한 보정계수를 결정하였다. 여러 예제에 대하여 제안된 방법에 의한 결과와 유한요소법(MIDAS/GEN)의 해석결과를 비교하여 그 적용성 및 신

뢰성을 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 제안한 등가보 변환에 의한 계단형 외팔보의 기본고유진동수 해석결과는 집중질량에 의한 다자유도계의 모델 해석법의 기본고유진동수 해석결과와 매우 근접하므로 계단형 외팔보의 등가단자유도계 해석방법은 타당성이 있다고 사료된다.
- 2) 등가보 변환에 의한 계단형 외팔보의 기본고유진동수 해석법은 요소 분할이나 반복적인 계산과정없이 동적 특성을 추정할 수 있어 실용적이라 판단된다.
- 3) 동일한 강성비 k_f 를 갖는 단면이 2종류인 계단형 외팔보는 길이비 a 가 0.6이상일 경우에는 질량비 k_m 에 관계없이 기본고유진동수는 길이비 a 의 종류별로 거의 동일한 것으로 나타났다. 또한, 동일한 강성비와 질량비인 단면조건인 계단형 외팔보는 길이비 a 가 0.4~0.5범위의 단면조건에서 가장 높은 기본고유진동수가 산출되었다.

참 고 문 헌

문상필, 정재철 (2006) 대칭단형 단순보의 등가보 변환에 의한 고유치해석, 한국전산구조공학회 논문집, 19(1), pp.55~62.
 송호산, 김부식 (2003) 비선형 변위모드를 이용한 다층 골조

구조물의 등가 단자유도계 변환, 대한건축학회 논문집, 19(9), pp.25~33.
 천태삼, 정일영 (1995) 전단벽-골조 구조물의 등가수평강성 평가, 대한건축학회 논문집, 11(10), pp.347~356.
 Belytschko, T., Midle, W. L. (1980) Flexural Wave Propagation Behavior of Lumped Mass Approximations, *Computer and Structures*, 12, pp. 805~812.
 Biggs, J. M. (1982) *Structural Dynamics*, McGraw Hill Book Co., New York.
 Church, A. H. (1963) *Mechanical Vibration*(2nd ED.), John Wiley and Sons, New York.
 Clough, R. W., Penzien, J. (1993) *Dynamics of Structures*, McGraw Hill Book Co.
 Hurty, W. C., Rubinstein, M. F. (1967) *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.
 Paz, M. (1997) *Structural Dynamics Theory and Computation*(4th ED.), CHAPMAN & HALL, New York.
 Snowdon, J. C. (1968) *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*, John Wiley and Sons, New York.
 Thomson, W. T. (1981) *Theory of Vibration with Application* (2nd ED), Prentice Hall, New Jersey.
 William, T. T. (1980) *Theory of Vibration with Application*(2nd ED.), Prentice-Hall INC.