

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-B.2008.32.6.429

2차원 압축공기-물의 압축성 이상 유동 수치 해석

박찬욱* · 이승수†

(2007년 12월 7일 접수, 2008년 2월 22일 심사완료)

Numerical Analysis for Two-Dimensional Compressible and Two-Phase Flow Fields of Air-Water in Eulerian Grid Framework

Chan Wook Park and Sungsu Lee

Key Words: Two-phase(이상), Compressible Flow(압축성유동), Volume Fraction(체적분율), Riemann Solver(리만해법), Roe Flux(로 유량), Pressure Oscillation(압력진동), Pressure Relaxation(압력이완)

Abstract

Two-phase compressible flow fields of air-water are investigated numerically in the fixed Eulerian grid framework. The phase interface is captured via volume fractions of each phase. A way to model two phase compressible flows as a single phase one is found based on an equivalent equation of states of Tait's type for a multiphase cell. The equivalent single phase field is discretized using the Roe's approximate Riemann solver. Two approaches are tried to suppress the pressure oscillation phenomena at the phase interface, a passive advection of volume fraction and a direct pressure relaxation with the compressible form of volume fraction equation. The direct pressure equalizing method suppresses pressure oscillation successfully and generates sharp discontinuities, transmitting and reflecting acoustic waves naturally at the phase interface. In discretizing the compressible form of volume fraction equation, phase interfaces are geometrically reconstructed to minimize the numerical diffusion of volume fraction and relevant variables. The motion of a projectile in a water-filled tube which is fired by the release of highly pressurized air is simulated presuming the flow field as a two dimensional one, and several design factors affecting the projectile movement are investigated.

1. 서론

밀폐된 영역 내에서 가상의 격막(diaphragm)으로 분리되어있던 고압의 압축공기와 저압의 물이 순간적으로 격벽이 제거되는 경우 발생하는 압축공기의 팽창현상은 액체가 가득 차있는 밀폐된 용기 내에 고압기체가 주입되어 작동하는 많은 유체기계의 근본적인 유동 현상에서 나타난다. 또한 수중 폭발에 의한 물체의 움직임이나 주위 유동 현상 등의 초기 메커니즘 규명에

매우 중요한 역할을 할 수 있다.

이러한 분자 차원의 섞임이 없는 (immiscible) 다유체 압축성 유동의 수치 해석에 있어서 가장 어려운 문제는 다유체의 상경계에서 나타나는 압력의 비정상적 교란 현상이었다. Larouturou⁽¹⁾는 비열비 γ 가 서로 다른 두 기체의 1차원 압축성 유동을 보존 형태의 Euler 방정식과 질량분율식 및 질량분율의 대수식으로 나타낸 γ 를 취하는 폴리트로픽 상태방정식으로 모델링하여 해석하였다. 이 과정에서 보존형태 질량분율식의 이산화에 필요한 셀 경계에서의 플럭스를 Euler 질량보존식의 질량 플럭스와 질량분율과의 곱의 형태로 유도하여 질량분율이 음이 되는 문제점을 해결하

† 책임저자, 회원, 충북대학교 토목공학부
E-mail : joshua@cbnu.ac.kr
TEL : (043)261-3344

* 대불대학교, 기계공학과

였으나, 두 기체의 경계에서 발생하는 압력 교란은 해결하지 못하였다. 한편 Karni⁽²⁾는 보존형태 Euler 방정식과 보존형태 비열비 수동수송식을 밀도, 입자속도, 압력 및 비열비 γ 를 미지량으로 취하는 비 보존형태로 전환시켜 이산화 하였다. 두 기체로 이루어진 다유체 1차원 압축성 유동에 대한 수치해석을 수행하였으며, Laroutrou⁽¹⁾가 해결 못한 기체와 기체 경계에서의 압력교란 현상을 억제시켰다. Abgrall⁽³⁾ 역시 두 기체의 1차원 압축성 유동을 대상으로 기체 간 경계 압력교란을 억제하는 방안을 제시하였다. 비 보존형태 지배식을 이산화 하는 Karni⁽²⁾ 방식으로는 강렬한 충격파가 존재할 경우에 파 전파속도나 세기에 큰 오차가 발생한다.⁽³⁾ Euler 식은 보존형태로 이산화 하되, 비열비는 γ 자체가 아닌 $1/(1-\gamma)$ 의 수동수송식을 이산화 하는 방안을 제시하여 앞에 언급한 문제를 해결하였다. 그러나 $1/(1-\gamma)$ 의 이산화식에 기체 경계 압력교란을 억제하기 위해 특별한 항들이 나타나는 점과 이 항들이 Euler 식의 이산화 알고리즘과 연계되어 유도된다는 제약이 따른다. Karni⁽⁴⁾는 보존형 Euler 식과 보존형 질량분율식을 이산화 하되, 질량분율식 이산화에 Laroutrou⁽¹⁾에서와 같은 특별한 조치를 취하지 않았다. 대신 기체 경계에서는 압력을 상태방정식이 아닌 압력방정식, $p_t + up_x + \gamma pu_x = 0$ 의 이산화식으로부터 직접 구하여 두 기체의 1차원 압축성 유동 수치해석에 나타나는 압력교란 현상을 피하였다.

본 연구에서는 영역내의 유동을 2차원 비점성 흐름으로 가정하고 공기-물 압축성 이상 유동에 대한 수치해석을 Eulerian 고정격자계를 이용하여 수행하였다. 초기 압축공기와 물이 가장 격막으로 분리되어 있다고 가정하고 격막 파열 이후의 압축유동을 Euler 방정식으로 모델링하였으며 Roe의 근사 Riemann solver⁽⁵⁾를 사용하여 수치해석을 수행하였다. 공기-물의 이상 유동은 등가 Tait 상태방정식, $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma B$, 및 이에 따른 등가 단상 (또는 등가 단일유체) 유동장으로 처리하였다. 여기서 상태방정식의 압축성을 의미하는 물성치 γ 와 B 는 다유체가 공존하는 격자 내부의 체적분율의 함수로 주어진다.

체적분율은 두가지 방식으로 다루어졌다. 첫째 방법은 상경계면에서 발생하는 비정상적 압력파동 (spurious pressure oscillation)을 억제하기 위하여 체적분율 α 를 수동수송 (passive advection) 처리하였다. 즉,

$\alpha_t + u\alpha_x + v\alpha_y = 0$. 이 접근방식은 등가 단상유동에 대한 Roe 알고리즘 중 1차정도 (1st order accuracy) Roe 플럭스를 사용한 경우에만 적절한 결과를 보여주었다.

두 번째 접근은 각 유체에 대해 압축성이 반영된 체적분율식, $\alpha_t + u\alpha_x + v\alpha_y = \alpha(\Gamma/\Gamma_\alpha - 1)(u_x + v_y)$ 을 사용하는 방식이다. 여기서 Γ_α 는 단상 등엔트로피 발크 모듈러스 (isentropic bulk modulus)이며 Γ 는 혼합상에 대한 발크 모듈러스이다. 상경계 압력파동은 Miller와 Puckett⁽⁶⁾의 압력이완 (pressure relaxation) 방법으로 제거하였다. 체적분율을 조절하면서 다유체셀 내 각 상의 압력을 직접적으로 평형시키는 방법이다. 이때 공기압은 폴리트로픽 법칙, $p_a = (\gamma_a - 1)\rho_a e_a$, $\gamma_a = 1.4$, 으로부터, 물에 대해서는 Tait의 상태방정식, $p_w = (\gamma_w - 1)\rho_w e_w - \gamma_w B_w$, $\gamma_w = 7$, $B_w = 3 \times 10^8 \text{ Pa}$, 에 의해 압력을 계산하였으며 (Grove & Menikoff⁽⁷⁾), 각 상의 밀도와 단위질량당 내부에너지, ρ_a , ρ_w , e_a , e_w 등을 추가 추적하여야 한다.

압축성이 반영된 체적분율식은 1차 upwind 알고리즘으로 이산화하였으며 상경계를 기하적으로 재구성 (geometric reconstruction)하여 각 유체의 체적 플럭스를 구하였다. 이 체적 플럭스는 다상유동장 (ρ_a , ρ_w , e_a , e_w 및 입자속도 u , v)과 관련된 플럭스 유도에도 사용한다. 다상유동장 계산에 필요한 셀 경계에서의 입자속도 및 압력은 앞서 언급한 등가 단상유동장으로부터 유도한다. 이 과정을 통해 상경계면에서 충격파 또는 팽창파 등 압력파의 전달 및 반사가 제대로 구현된다. 압력이완시 체적분율 조절은 혼합상 팽창도 $u_x + v_y$ 를 영으로 고정된 상태에서 각 상의 팽창 또는 수축을 등엔트로피 과정으로 취급하여 체적분율과 압력 변화 사이에 $\Delta\alpha = -\frac{\alpha}{T_\alpha}\Delta p$ 관계가 만족되도록 구속한다.

이와 같이 본 연구에서는 상경계 또는 유체 간 경계를 질량분율이나 비열비 대신 체적분율을 통해 추적하고 상경계를 기하적으로 재구성하여 앞에 언급한 방법들로 피할 수 없는 수치확산을 최소화 하였으며, 압력이완 방식에 의해 1차 또는 2차 Roe 알고리즘 적용에 상관없이 상경계면에서 압력교란이 사라지는 결과를 얻었다.

2. 2차원 등가 단상 압축성 유동장

분자 차원의 섞임이 없는 2차원 다상 또는 다유체

압축유동을 등가 단상유동으로 처리하는 지배식은 다음과 같다.

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (1a)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = 0 \quad (1b)$$

$$(\rho v)_t + (\rho vu)_x + (\rho v^2 + p)_y = 0 \quad (1c)$$

$$\left\{ \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\}_t + \left\{ \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) u \right\}_x + \left\{ \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) v \right\}_y = 0 \quad (1d)$$

$$\alpha_t + u\alpha_x + v\alpha_y = 0 \quad (1e)$$

$$p = \{ \gamma(\alpha) - 1 \} \rho e - \gamma(\alpha) B(\alpha) \quad (1f)$$

$$\frac{1}{\gamma(\alpha) - 1} = \left(\frac{1}{\gamma_1 - 1} - \frac{1}{\gamma_2 - 1} \right) \alpha + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \quad (1g)$$

$$\frac{\gamma(\alpha) B(\alpha)}{\gamma(\alpha) - 1} = \left(\frac{\gamma_1 B_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1} \right) \alpha + \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1} \quad (1h)$$

ρ 는 밀도, u 와 v 는 x 및 y 방향 유체입자 속도, p 는 압력, e 는 단위질량당 내부에너지를 의미한다. 하첨자 x, y, t 는 편미분을 뜻한다. γ 와 B 는 혼합상에 대한 등가 압축성 물성치에 해당하는 값으로, 각 상 또는 각 유체의 압축성 물성치 $\gamma_1, B_1, \gamma_2, B_2$ 와 체적분율 α 의 대수적인 (1g)와 (1h)로부터 계산한다. 여기서 α 는 유체 1의 체적분율 α_1 이다. 체적분율 수송식 (1e)에 의해 마지막 미지량 α 가 결정되면서 초기조건 및 경계조건과 더불어 문제의 수학적 정의가 완결된다.

Euler방정식 (1a-d)와 상태방정식 (1f)가 단상 또는 단일유체에 대한 압축성유동 지배식과 정확히 동일하다. 압축성 물성치 γ 및 B 가 상수로 주어지지 않고 체적분율 α 의 대수식이라는 차이 뿐이다. 그러나 다상유동을 단상유동처럼 해석할 수 있도록 하는 중요한 단서가 이 대수식 (1g)와 (1h)이며, 혼합상 상태방정식을 각 상의 상태식인 Tait 상태방정식과 같은 형태로 취하여 상경계에서 압력의 불연속이 없다는 조건에 의해 유도되는 식이다.

수치해석을 위한 이산화식은 Euler식 (1a-d)를 x - y - t 영역에서 적분하여 얻는다. 적분관계식을 만족하는 해를 weak solution이라 하며, 보존 물리법칙을 만족시킴으로써 하이퍼볼릭 (hyperbolic) 시스템에 발생하는 불연속해를 자연스럽게 포착한다.

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+\Delta t}} \iint_A (Q_t + L_x + M_y) dx dy dt \\ &= (Q^{n+1} - Q^n)A + \int_{t^n}^{t^{n+\Delta t}} \int_b (Ln_x + Mn_y) dl dt \\ &= (Q^{n+1} - Q^n)A + \sum_b F_i l_i \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (2a)$$

$$Q^n = \frac{1}{A} \iint_A Q(x, y, t^n) dx dy \quad (2b)$$

$$F_i l_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+\Delta t}} \int_{l_i} F(x_b, y_b, t) dl dt, F = Ln_x + Mn_y \quad (2c)$$

Q 는 보존변수벡터 $[\rho, m, n, E]^T$ 이고 L 은 x 성분 플럭스벡터 $[m, m^2/\rho + p, mn/\rho, (E+p)m/\rho]^T$, M 은 y 성분 플럭스벡터 $[n, mn/\rho, n^2/\rho + p, (E+p)n/\rho]^T$ 이다. m, n 은 각각 x -모멘텀 ρu 및 y -모멘텀 ρv 이고 E 는 단위체적당 총에너지 $\rho \{ e + (u^2 + v^2)/2 \}$ 이다. 셀 면적은 A , 다각형 셀의 i 번째 변의 길이를 l_i 로 표기하였다. x_b, y_b 는 변의 x, y 좌표이다. b 는 변에 따른 적분 또는 합이라는 의미로 표시하였으며, 변에서 셀 외부로 향하는 단위법선벡터 n 의 x, y 성분을 n_x, n_y 로 표기하였다. i 변 플럭스 F_i 에 대한 수치플럭스 \hat{F}_i 는 근사 Riemann 문제의 해로부터 구한다.

Euler방정식과 체적분율 수송수송식을 (x, y) 좌표계로부터 변 법선벡터 n 만큼 회전시킨 직교좌표계 (ξ, η) 로 변환하자. 변 법선벡터의 방향과 ξ 좌표 방향이 일치하는 좌표계이다.

$$Q_t + L_x + M_y = Q_t + F_\xi + G_\eta = T(q_t + f_\xi + g_\eta) = 0 \quad (3a)$$

$$\alpha_t + u\alpha_x + v\alpha_y = \alpha_t + U\alpha_\xi + V\alpha_\eta = 0 \quad (3b)$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} F &= Ln_x + Mn_y = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + p n_x \\ \rho v U + p n_y \\ \rho H U \end{pmatrix} \\ G &= -Ln_y + Mn_x = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V - p n_y \\ \rho v V + p n_x \\ \rho H V \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3d)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ E \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ \rho UV \\ \rho HU \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho UV \\ \rho V^2 + p \\ \rho HV \end{pmatrix} \quad (3e)$$

U, V 는 입자속도 u, v 의 ξ, η 방향 성분, 즉, 변에 수직인 성분과 평행한 성분이다. H 는 단위질량당 총 엔탈피 $e + (u^2 + v^2)/2 + p/\rho$ 이다. 식 (3a), (3b)로부터 셀의 각 변에서 변에 수직인 좌표 ξ 방향으로의 Riemann 문제에 대한 지배식이 다음과 같이 정의된다.

$$q_t + f_\xi = 0 \quad (4a)$$

$$\alpha_t + U\alpha_\xi = 0 \quad (4b)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma B \quad (4c)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \left(\frac{1}{\gamma_1 - 1} - \frac{1}{\gamma_2 - 1} \right) \alpha + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \quad (4d)$$

$$\frac{\gamma B}{\gamma - 1} = \left(\frac{\gamma_1 B_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1} \right) \alpha + \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1} \quad (4e)$$

체적분을 α 를 보존변수 q 의 한 요소 q_5 로 취급하면 서, 식 (4a)를 선형화한 형태로 나타내면 다음의 지배 식 시스템이 얻어진다.

$$q_t + \mathbb{A}q_\xi = 0 \quad (5a)$$

$$q = [\rho, \rho U, \rho V, E, \alpha]^T \quad (5b)$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -U^2 + p_\rho & 2U + p_{\rho U} & p_{\rho V} & p_E & p_\alpha \\ -UV & V & U & 0 & 0 \\ -HU + Up_\rho & H + Up_{\rho U} & Up_{\rho V} & Up_E & Up_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R}\mathbb{A}\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ U^-c & V & 0 & 0 & U^+c \\ H^-cU & \frac{U^2 + V^2}{2} & -V & -\frac{p_\alpha}{\gamma - 1} & H^+cU \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^-c & U & U & U & U^+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{U}{2c} + \frac{\gamma - 1}{4} \frac{U^2 + V^2}{c^2} & -\frac{1}{2c} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c^2} & -\frac{\gamma - 1}{2} \frac{V}{c^2} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^2} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{p_\alpha}{\gamma - 1} \\ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U^2 + V^2}{c^2} & (\gamma - 1) \frac{U}{c^2} & (\gamma - 1) \frac{V}{c^2} & -(\gamma - 1) \frac{1}{c^2} & -(\gamma - 1) \frac{1}{c^2} \frac{p_\alpha}{\gamma - 1} \\ \frac{V}{0} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{U}{2c} + \frac{\gamma - 1}{4} \frac{U^2 + V^2}{c^2} & \frac{1}{2c} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c^2} & -\frac{\gamma - 1}{2} \frac{V}{c^2} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^2} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{p_\alpha}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \quad (5c)$$

$$p_E = \gamma - 1, \quad p_\rho = \frac{U^2 + V^2}{2} p_E, \quad p_{\rho U} = -Up_E, \quad p_{\rho V} = -Vp_E$$

$$p_\alpha = \frac{\partial p(\rho, \rho U, \rho V, E, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \rho e - \frac{d(\gamma B)}{d\alpha}$$

$$c^2 = (\gamma - 1) \left(H - \frac{U^2 + V^2}{2} \right)$$

근사 Riemann 문제는 셀 경계인 변을 기준으로 좌 측 (변 법선벡터의 반대방향) 초기조건은 시간 t^n 에서 의 좌측 셀의 상태량 q_L^n , 우측 (변 법선벡터 방향)은 우측 셀의 상태량 q_R^n 을 만족하되 Jacobian을 고정시켜, $\mathbb{A} = \hat{\mathbb{A}}(q_L^n, q_R^n)$, 즉 지배방정식 (5a)를 준 선형화하여 정의한다. 이 과정에서 일관성 (consistency), $\hat{\mathbb{A}}(q, q) = \mathbb{A}(q)$, 및 보존성 (conservative property), $\hat{\mathbb{A}}(q_R^n - q_L^n) = f(q_R^n) - f(q_L^n)$, 이 확보되어야 불연속해가 제대로 포착된다. 보존성을 만족하기 위해 U, V 와 H 대신 다음의 Roe 평균치 $\hat{U}, \hat{V}, \hat{H}$ 를 사용하였으며,⁽⁵⁾ γ 및 p_α 역시 식 (6)과 같이 대체되어야 한다.

$$\hat{U} = \frac{\sqrt{\rho} U}{\sqrt{\rho}}, \quad \hat{V} = \frac{\sqrt{\rho} V}{\sqrt{\rho}}, \quad \hat{H} = \frac{\sqrt{\rho} H}{\sqrt{\rho}},$$

$$\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}, \quad \hat{p}_\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\Delta \alpha} \tilde{\rho} e - \frac{\Delta(\gamma B)}{\Delta \alpha} \quad (6)$$

여기서 $\tilde{\phi} = (\phi_L^n + \phi_R^n)/2$, $\Delta \phi = \phi_R^n - \phi_L^n$ 이다. 이 근사 Riemann 문제의 해로 5개의 불연속파가 나타난다. 좌우의 속도 $\hat{U} - \hat{c}$ 및 $\hat{U} + \hat{c}$ 로 전파하는 비선형 팽창 또는 수축파 W_1 과 W_5 , 엔트로피 불연속파 W_2 , 전단 불연속파 (shear wave) W_3 및 체적분을 불연속파 W_4 등이며, 좌우의 비선형과 사이에서 유체입자속도 \hat{U} 로 진행되는 W_2, W_3 와 W_4 를 하나의 불연속파로 보아 이를 contact discontinuity 라고 한다. k 과 W_k 는 파의 세기 ζ_k 와 모드 r_k 의 곱으로 표현되며, r_k 는 Jacobian $\hat{\mathbb{A}}$ 의 k 번째 우특성벡터로 식 (5c) \mathbb{R} 행렬의 k 째 열벡터이다. 파의 세기 ζ_k 는 \mathbb{L} 행렬에 k 행으로 나타나는 좌특성벡터 l_k 와 상태 불연속량 $\Delta q = q_R^n - q_L^n$ 의 곱으로 유도된다, 즉 $\zeta_k = l_k \Delta q$. 각 파의 세기를 근원변수 ρ, U, V, p , 및 α 로 나타내면 다음과 같다.

$$\zeta_{1,5} = \{ \Delta p \mp \tilde{\rho} \hat{c} \Delta U \mp (\tilde{U} - \hat{U}) \hat{c} \Delta \rho \} / 2\hat{c}^2 \quad (7a)$$

$$\zeta_2 = (-\Delta p + \hat{c}^2 \Delta \rho) / \hat{c}^2 \quad (7b)$$

$$\zeta_3 = -\tilde{\rho} \Delta V - (\tilde{V} - \hat{V}) \Delta \rho \quad (7c)$$

$$\zeta_4 = \Delta \alpha \quad (7d)$$

보존성, $\hat{\mathbb{A}} \Delta q = \sum_{k=1}^5 \lambda_k W_k = \Delta f$ ($\Delta f_5 = \hat{U} \Delta \alpha$), 및

좌우 상태차와 불연속과 간 $\sum_k W_k = \Delta q$ 가 만족됨을 확인할 수 있다. λ_k 는 \hat{A} 의 특성근으로 식 (5c) 대각 행렬 A 의 대각요소로서 각 파의 전파속도이다.

근사 Riemann 문제의 해로부터 1차정도 (1st order accuracy) Roe플럭스 및 2차 Roe플럭스가 다음과 같이 유도된다.

$$\hat{f}^{1st} = \frac{1}{2}(f_L^n + f_R^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 |\lambda_k| W_k \quad (8a)$$

$$\hat{f}^{2nd} = \hat{f}^{1st} + \sum_k |\lambda_k| (1 - |\lambda_k| \frac{\Delta t}{2\Delta \xi_k^{UW}}) \frac{\Delta \xi_k^{UW}}{\Delta \xi_L + \Delta \xi_R} W_k^{lim} \quad (8b)$$

$$W_k^{lim} = \zeta_k^{dim} r_k \quad (8c)$$

$$\zeta_k^{dim} = \begin{cases} sign(\zeta_k) \min(|\zeta_k|, |\zeta_k^{UW}|) & \text{if } \zeta_k \zeta_k^{UW} > 0 \\ 0 & \text{if } \zeta_k \zeta_k^{UW} \leq 0 \end{cases} \quad (8d)$$

식 (8b)에 보이는 2차 교정항은 Lax-Wendroff⁽⁸⁾의 확산억제항 (anti-diffusion)에서 이의 크기를 제한 (wave limiter)한 결과로서, 수치분산오차 (dispersion error)를 감소시켜 충격파와 같은 불연속점에서 극대 또는 극소치의 신규 발생을 억제한다.⁽⁹⁻¹¹⁾ 또한 제한항에 의해 유발되는 수치적 점성 (artificial viscosity)으로 충격파를 지나면서 점성이 극히 작아도 유한한 크기로 발생하는 에너지소산 (dissipation)을 구현함으로써 팽창 충격파의 발생을 저지한다. $\Delta \xi_L$ 및 $\Delta \xi_R$ 은 변으로부터 좌측과 우측 셀 면적중심까지의 거리이며, λ_k 가 양인 경우 $\Delta \xi_k^{UW} = \Delta \xi_L$, 음인 경우에는 $\Delta \xi_k^{UW} = \Delta \xi_R$ 이다. ζ_k^{UW} 는 λ_k 가 양인 경우 좌측 셀과 한 단계 더 좌측 셀의 상태량으로 정의되는 근사 Riemann 문제로부터 유도되는 k 과 세기이며, λ_k 가 음일 때는 우측 셀과 이의 우측 셀로부터의 k 과 세기를 의미한다.

이산화식 (2a)에 필요한 셀의 i 번째 플럭스 F_i (식 (2c))에 대한 근사 수치플럭스 \hat{F}_i 는 식 (3e)의 변환행렬 T 와 식 (8a) 또는 (8b)에 나타난 Roe 플럭스를 곱하여 얻는다.

Eulerian 고정좌표계를 사용하는 다유체 압축유동은 VOF(volume of fluid)⁽⁶⁾ 방식의 체적분율 (volume fraction) 또는 ghost fluid method⁽¹²⁾의 level set 함수 등을 통해 유체경계면을 포착하면서 해석하는 방법이 일반적인 추세이다. 본 연구에서는 상경계면을 체적분율을 통해 추적하는 VOF방식을 채택하였다.

체적분율 α 의 수동수송식 (1e)의 이산화는 상경계 압력교란 억제와 관련하여 아래와 같이 특별한 과정으로 유도한다. 상경계 압력을 직접적으로 평형시키는 압력이완법 (pressure relaxation)을 사용할 경우에는 압축성이 고려된 체적분율식과 이를 이산화하는 과정에서 상경계를 기하적으로 재구성하는 다른 이산화식이 적용된다. 이에 대해서는 뒤에 서술하기로 한다.

$$\int_{t^n}^{t^{n+\Delta t}} \iint_A (\alpha_t + u\alpha_x + v\alpha_y) dx dy dt \simeq (\alpha^{n+1} - \alpha^n)A + \sum_b U_i^n \alpha_i^{UW} l_i \Delta t = 0 \quad (9a)$$

$$\alpha^n = \frac{1}{A} \iint_A \alpha(x, y, t^n) dx dy \quad (9b)$$

$$U_i^n = n_x u^n + n_y v^n, \quad u^n = \frac{1}{A} \iint_A u(x, y, t^n) dx dy, \quad v^n =$$

$$\frac{1}{A} \iint_A v(x, y, t^n) dx dy \quad (9c)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+\Delta t}} \iint_A (u\alpha_x + v\alpha_y) dx dy dt \simeq \iint_A (u\alpha_x + v\alpha_y)_{t=t^n} dx dy \Delta t \quad (9d)$$

$$\iint_A (u\alpha_x + v\alpha_y) dx dy \simeq u^n \iint_A \alpha_x^n dx dy + v^n \iint_A \alpha_y^n dx dy \quad (9e)$$

$$= u^n \int_b \alpha^n n_x dl + v^n \int_b \alpha^n n_y dl \\ = \sum_b (n_x u^n + n_y v^n) \alpha_i^n l_i = \sum_b U_i^n \alpha_i^{UW} l_i \quad (9f)$$

이산화식 (9a)는 유도과정 식 (9d)와 (9f)로부터 1차정도 upwind 알고리즘에 해당함을 알 수 있다. α_i^{UW} 는 i 번째 변 l_i 에서의 체적분율로서 체적분율 불연속파의 전파속도 \hat{U} 이 양인 경우에는 좌측셀 체적분율 α_L^n , 음인 경우에는 α_R^n 를 취한다. U_i^n 은 이산화 대상 셀 내부 유체입자속도 u^n, v^n 의 i 번째 변 법선벡터 $n(n_x, n_y)$ 방향 성분이다. 유도과정 중 식 (9e)를 거침으로써 대상 셀과 주위 셀이 모두 동일 유체인 경우에 체적분율의 불변이 보장된다, 즉 $\alpha^{n+1} = \alpha^n$. 벽에서의 경계조건은 다음과 같이 구현한다.

$$\rho_R = \rho_L \quad (10a)$$

$$U_R = -U_L + 2U_W \quad (10b)$$

$$V_R = V_L \quad (10c)$$

$$p_R = p_L \quad (10d)$$

$$\alpha_R = \alpha_L \quad (10e)$$

$$\Delta \xi_R = \Delta \xi_L \quad (10f)$$

하첨자 L 은 벽과 이웃한 유체영역 내 셀을 지칭하

고, R 은 셀 경계중 벽에 해당하는 변에 대응하는 가상적 우측 셀을 의미한다. U_W 는 벽에 수직인 법선방향 벽 속도이다. 식 (10f)는 2차 Roe 플럭스 적용시에 필요한 조건이다. 경계조건 (10a-e)에 의해 벽 좌우의 음속으로 진행되는 불연속과 및 벽 자체에 해당하는 contact discontinuity 불연속과가 정확히 재현된다.

3. 2차원 다상 압축성 유동장 및 압력이완

다상 또는 다유체유동을 등가 단상유동으로 수치 해석할 경우 체적분율을 수동수송 (passive advection) 방식으로 처리하면 특정한 수치알고리즘에 한해서만 상경계 압력교란이 억제된다.⁽¹³⁾ 상 경계에서 발생하는 비 물리적 압력교란을 억제할 다른 수단으로 Miller와 Puckett⁽⁶⁾의 압력이완(pressure relaxation) 방식을 사용하기로 한다. Miller와 Puckett은 Godunov⁽¹⁴⁾와 같이 정확한 Riemann solver를 사용하여 두 응축매질 (condensed media)로 이루어진 다유체 압축성 유동을 해석하였다. Mie-Gruneisen 상태방정식을 적용하여 등가 단상유동장으로 처리하였으며 다유체셀 내 각 상의 압력을 직접적인 방식으로 평형시켰다. 본 연구에서는 이들의 압력평형 방식을 공기-물 다상유동에 적용하되, 근사 Roe solver를 사용하고, 등가 단상유동 유도시 공기에도 적용할 수 있도록 Tait 상태방정식을 사용하였다.

압력을 직접 평형시키기 위해서는 각 상 또는 각 유체의 밀도와 내부에너지를 추가로 추적하여야 한다. 이 과정에서 체적분율 지배식을 실제와 부합하는 압축성이 반영된 식으로 교체하고, 또한 상경계를 기하적으로 재구성하여 (geometric reconstruction) 각 상의 체적플럭스를 구함으로써 체적분율의 수치 확산을 최소화한다. 이 체적플럭스를 각 상의 밀도 및 내부에너지 추적에도 사용하여 관련 변수의 수치 확산오차를 줄임으로써 직접적 압력평형방식이 실제 유효하도록 한다.

압축성이 반영된 체적분율식은 다유체셀 내부 각 상의 수축팽창이 등엔트로피 과정이고 압력이 같다는 조건으로부터 다음과 같이 유도된다.

유체 l 에 대한 질량보존식을 변형하면 다음식 (11a)가 얻어지며, 등엔트로피 과정 및 압력평형 조건으로부터 각각 식 (11b)와 (11d) 및 식 (11c)가 유도된다. 식 (11f)와 (11g)는 이를 재차 정리하여 나

타낸 결과이다.

$$\frac{1}{\alpha_l} \frac{d\alpha_l}{dt} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{d\rho_l}{dt} - (u_x + v_y) \quad (11a)$$

$$\text{where } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -\frac{1}{\rho_l c_l^2} \frac{dp_l}{dt} - (u_x + v_y) \quad (11b)$$

$$\therefore dp_l = c_l^2 d\rho_l \quad \text{isotropic}$$

$$= -\frac{1}{\rho_l c_l^2} \frac{dp}{dt} - (u_x + v_y) \quad (11c)$$

$$\therefore p_l = p \quad \text{pressure equilibrium}$$

$$= -\frac{\rho c_\beta^2}{\rho_l c_l^2} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - (u_x + v_y) \quad (11d)$$

$$\therefore dp = c_\beta^2 d\rho \quad \text{isotropic, } c_\beta^2 = \frac{\partial p(\rho, s, \beta_l)}{\partial \rho}$$

$$= \left(\frac{\rho c_\beta^2}{\rho_l c_l^2} - 1 \right) (u_x + v_y) \quad (11e)$$

$$\alpha_{lt} + u\alpha_{lx} + v\alpha_{ly} = \alpha_l \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_l} - 1 \right) (u_x + v_y), \quad (11f)$$

$$\Gamma_l \equiv \rho_l c_l^2 = \gamma_l (p + B_l), \quad \Gamma \equiv \rho c_\beta^2 = 1 / \sum_{l=1}^2 \frac{\alpha_l}{\Gamma_l}, \quad l=1,2$$

$$\alpha_{lt} + (\alpha_l u)_x + (\alpha_l v)_y = \alpha_l \frac{\Gamma}{\Gamma_l} (u_x + v_y) \quad (11g)$$

α_l 은 유체 l 의 체적분율, ρ 는 혼합상 밀도 $\sum \alpha_l \rho_l$ 이다. Γ_l 은 유체 l 의 등엔트로피 발크 모듈러스 (isentropic bulk modulus)이며 Γ 는 질량분율 β_l 을 고정한 상태에서 유도되는 혼합상 발크 모듈러스이다. 식 (11a)에서 체적분율 α_l 이 수동수송 뿐만 아니라 혼합상 팽창도 $u_x + v_y$ 및 유체 l 의 팽창도 $-(1/\rho_l) dp_l/dt$ 에 좌우됨을 알 수 있다. 식 (11g)를 체적분율 이산화에 사용하였으며 이산화 과정은 부록에 제시하였다.

직접적 압력평형에 필요한 각 상 또는 각 유체의 밀도와 내부에너지는 다음 다상 압축성유동장 지배식으로 결정된다.

$$(\alpha_l \rho_l)_t + (\alpha_l \rho_l u)_x + (\alpha_l \rho_l v)_y = 0 \quad l=1,2 \quad (12a)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = 0 \quad (12b)$$

$$(\rho v)_t + (\rho vu)_x + (\rho v^2 + p)_y = 0 \quad (12c)$$

$$\left\{ \alpha_l \rho_l \left(e_l + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\}_t$$

$$+ \left\{ \alpha_l \rho_l \left(e_l + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) u \right\}_x + \left\{ \alpha_l \rho_l \left(e_l + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v \right\}_y$$

$$+ \alpha_l \frac{\rho_l}{\rho} (u p_x + v p_y) + \alpha_l \frac{\Gamma}{\Gamma_l} p (u_x + v_y) = 0 \quad l=1,2 \quad (12d)$$

에너지방정식 (12d)는 체적분율식 (11g)와 같이 동일한 전제, 다유체셀 내 등엔트로피 수축팽창 및 압력평

형, 하에서 유도된다. 식 (12a-d)의 이산화 과정 역시 부록에 서술한다.

체적분율 지배식 (11g)와 다상 압축성유동 지배식 (12a-d)를 통해 다음 시간대 다상유동장 α_l , ρ_l , e_l 및 u , v 를 구한 후, 다유체셀 ($0 < \alpha_l < 1$)에 대한 압력 평형과정이 진행된다. 현 단계에서는 $p_1 = (\gamma_1 - 1)\rho_1 e_1 - \gamma_1 B_1$ 과 $p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 e_2 - \gamma_2 B_2$ 가 같지 않다. 체적분율식 (11g)로부터 유동이 정지되어 있고, 즉 $u = v = 0$, 혼합상 체적이 고정된 상태, $u_x + v_y = 0$,에서는 체적분율 α_l 이 변하지 않음을 볼 수 있다. 그러나 압력평형 조건을 반영하지 않은 원식 (11a)는 $u = v = u_x + v_y = 0$ 인 경우에도 α_l 이 변할 수 있음을 보여주며, 이 식의 등엔트로피 버전인 식 (11b)가 체적분율 α_l 과 유체 l 내 압력 p_l 간의 관계를 다음과 같이 구속한다.

$$\Delta \alpha_l = -\frac{\alpha_l}{\Gamma_l} \Delta p_l, \quad \Delta p_l = \bar{p} - p_l \quad (13)$$

\bar{p} 가 찾아야 할 평형압력이다. 식 (13)으로 주어지는 체적분율 조절 상의 자유도가 압력이완 과정의 핵심이다.

구속조건, $\sum \Delta \alpha_l = 0$, 으로부터 평형압 \bar{p} 가 다음과 같이 유도된다.

$$\bar{p} = \Gamma \sum \frac{\alpha_l}{\Gamma_l} p_l, \quad \Gamma = 1 / \sum \frac{\alpha_l}{\Gamma_l}, \quad \Gamma_l = \gamma_l (p_l + B_l) \quad (14)$$

교정된 체적분율 α_l^c 은 다음과 같고,

$$\alpha_l^c = \alpha_l + \Delta \alpha_l = \alpha_l - \frac{\alpha_l}{\Gamma_l} (\bar{p} - p_l) \quad (15)$$

각 유체의 밀도 ρ_l 및 내부에너지 e_l 의 조정이 따른다.

$$\alpha_l^c \rho_l^c = \alpha_l \rho_l \quad (16)$$

$$\alpha_l^c \rho_l^c e_l^c = \alpha_l \rho_l e_l - \bar{p} \Delta \alpha_l \quad (17)$$

식 (17)의 팽창일은 $u_x + v_y$ 가 영이고 등엔트로피 가정에 준한 값이다. 압력 교정은 각 유체의 상태방정식을 통해 이루어진다.

$$p_l^c = (\gamma_l - 1) \rho_l^c e_l^c - \gamma_l B_l \quad (18)$$

만일 $p_1^c \neq p_2^c$ 이면, p_l , α_l , ρ_l , e_l 등을 교정된 p_l^c ,

α_l^c , ρ_l^c , e_l^c 등으로 대체하면서 두 유체간 압력이 같아질 때까지 식 (14)~(17) 들을 반복 계산한다. 이와 같이 직접 압력이완방식은 관련 물리법칙을 철저히 따르는 방법이다.

4. 압축공기-물 이상 압축성 유동 계산 결과

2차원 문제를 다루기에 앞서 1차원 문제를 해석하였다. 좌우 벽이 고정되어 있는 길이 1 m의 속튜브 내 공기-물 이상유동 문제로서, 초기에 좌측 반 구간에는 공기가 밀도 20 kg/m^3 , 압력 20 bar 으로 차 있고, 우측에는 액체상태 물이 밀도 1000 kg/m^3 , 압력 10 bar 인 상태로 정지되어 있다. 해석해와의 비교 (Table 1 참조)를 통해 불연속파의 전파속도 및 점프량에서 정량적으로 정확함이 확인된 Fig. 1 (2차 Roe플럭스, 압력이완), Fig. 2 (1차 Roe플럭스, 압력이완) 및 Fig. 3 (1차 Roe플럭스, 체적분율 수동수송)과 이들 각각에 대응하는 조건으로 계산한 2차원 코드 결과를 비교하였다. Figs. 1, 2, 3은 1차원 전용 코드에 의한 결과이다. 비교 과정에서 차이가 전혀 나타나지 않았으며 기본 알고리즘 상에 오류가 없음을 확인하였다.

Fig. 1, 2, 3에서 속튜브 중간에 위치한 격막 (diaphragm)의 파열에 이어 속 a와 팽창파군 (rarefaction fan) a가 각기 물 및 공기 영역으로 전파됨을 볼 수 있다. 우측 벽으로부터 반사된 속 b는 물-공기 경계면과 충돌한 이후 일부 속 c로 공기 중으로 전달되고 물로의 반사파는 팽창파군 b의 형태로 진행한다. 상 경계면에서 비물리적 압력교란이 발생하지 않음을 볼 수 있으며 상경계에서 압력과 전달 및 반사 또한 제대로 구현되고 있다. 체적분율을 수동수송 처리하면서 2차 Roe플럭스를 사용하면 공기-물 경계면에 압력교란 및 입자속도의 불연속 등 비물리적 현상이 나타난다 (Fig. 4). Fig. 4의 공기-물 경계에서 압력교란이 시간이 경과하여도 사라지지 않고 지속되는 현상이 관찰된다. 격자 또는 수치적분 시간 간격을 줄여도 축소되지 않는 오차 (zero-th order error)로 이로 인해 물에 비해 밀도가 낮은 공기 영역에서 입자속도가 크게 왜곡되어 나타남을 볼 수 있다.

Table 1 Comparison of numerical results, Fig. 1, 2, and 3, with exact results

	rarefaction fan a			shock c			rarefaction fan b			shock b			shock a		
	exact	Fig. 1	Fig. 2,3	exact	Fig. 1	Fig. 2,3	exact	Fig. 1	Fig. 2,3	exact	Fig. 1	Fig. 2,3	exact	Fig. 1	Fig. 2,3
speed/m/s	373.3-374.2	\approx 370	\approx 370	374.2	\approx 370	\approx 370	1453-1456	\approx 1450	\approx 1450	1454	\approx 1450	\approx 1450	1453	\approx 1450	\approx 1450
Δu m/s	0.6847	0.6847	0.6847	1.3625	1.3624	1.3624	0.6777	0.6777	0.6777	0.6847	0.6847	0.6847	0.6847	0.6847	0.6847
Δp bar	0.0512	0.051	0.051	0.1020	0.102	0.102	9.8656	9.865	9.864	9.9676	9.967	9.967	9.9488	9.949	9.949
$\Delta \rho$ kg/ m^3	0.0366	0.0366	0.0366	0.0728	0.0728	0.0728	0.4662	0.4662	0.4662	0.4711	0.4711	0.4711	0.4715	0.4715	0.4715

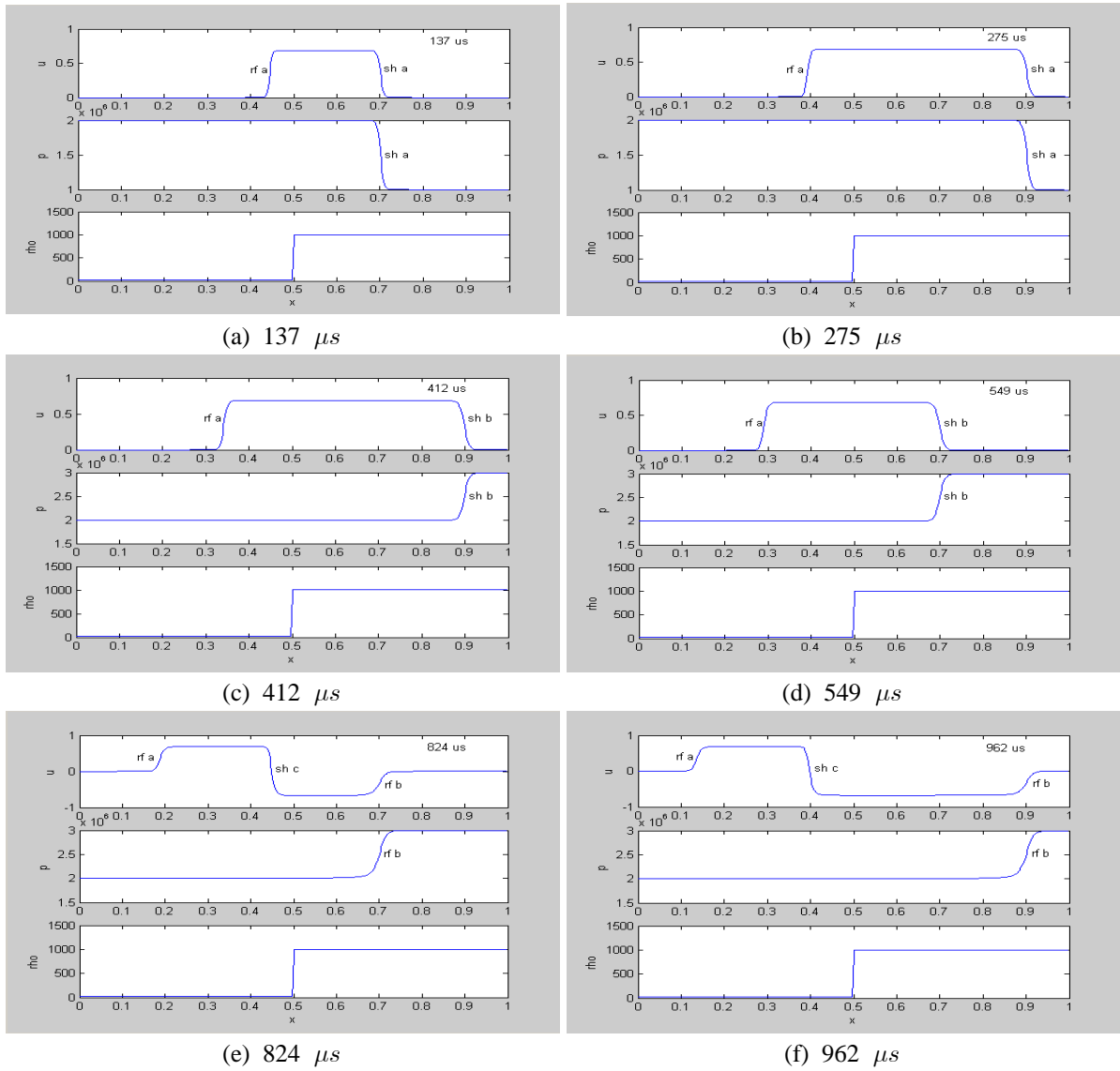


Fig. 1 Air-water shock-tube flows based on 2nd order Roe flux and pressure relaxation $\Delta x = 2$ mm, $CFL_{max} = 0.5$

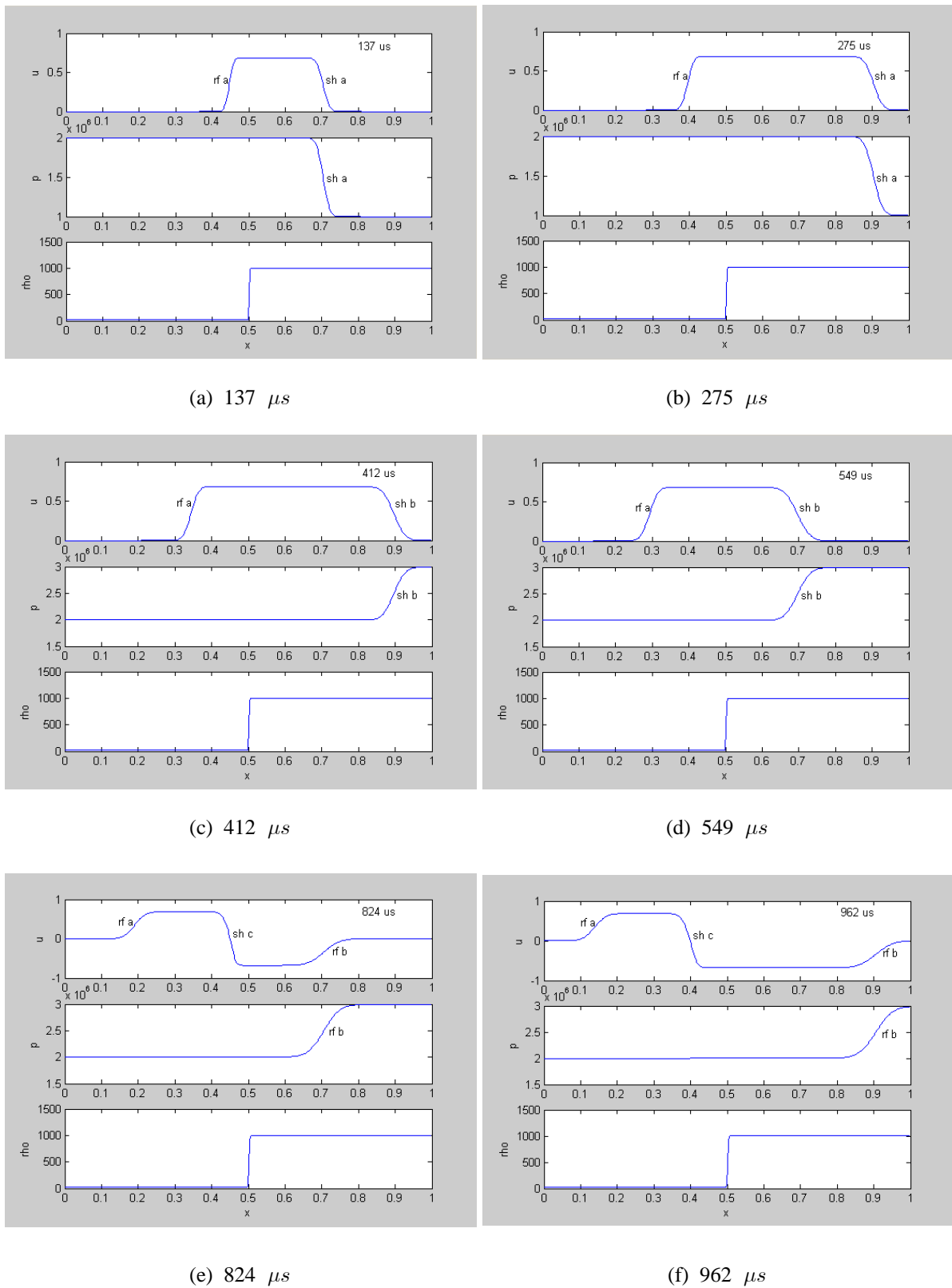


Fig. 2 Air-water shock-tube flows based on 1st order Roe flux and pressure relaxation $\Delta x = 2$ mm, $CFL_{max} = 0.5$

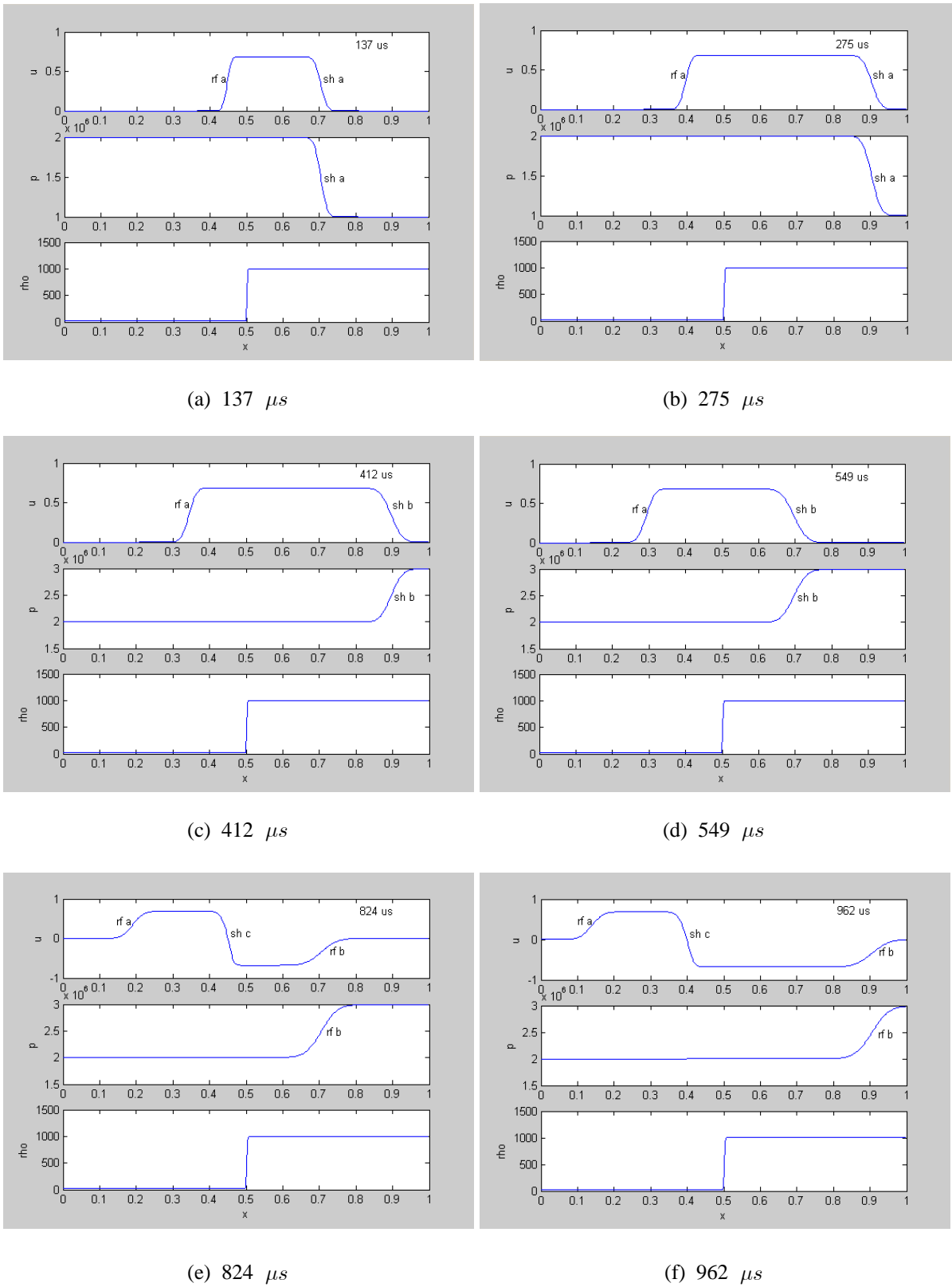


Fig. 3 Air-water shock-tube flows based on 1st order Roe flux and passive volume fraction advection $\Delta x = 2$ mm, $CFL_{max} = 0.5$

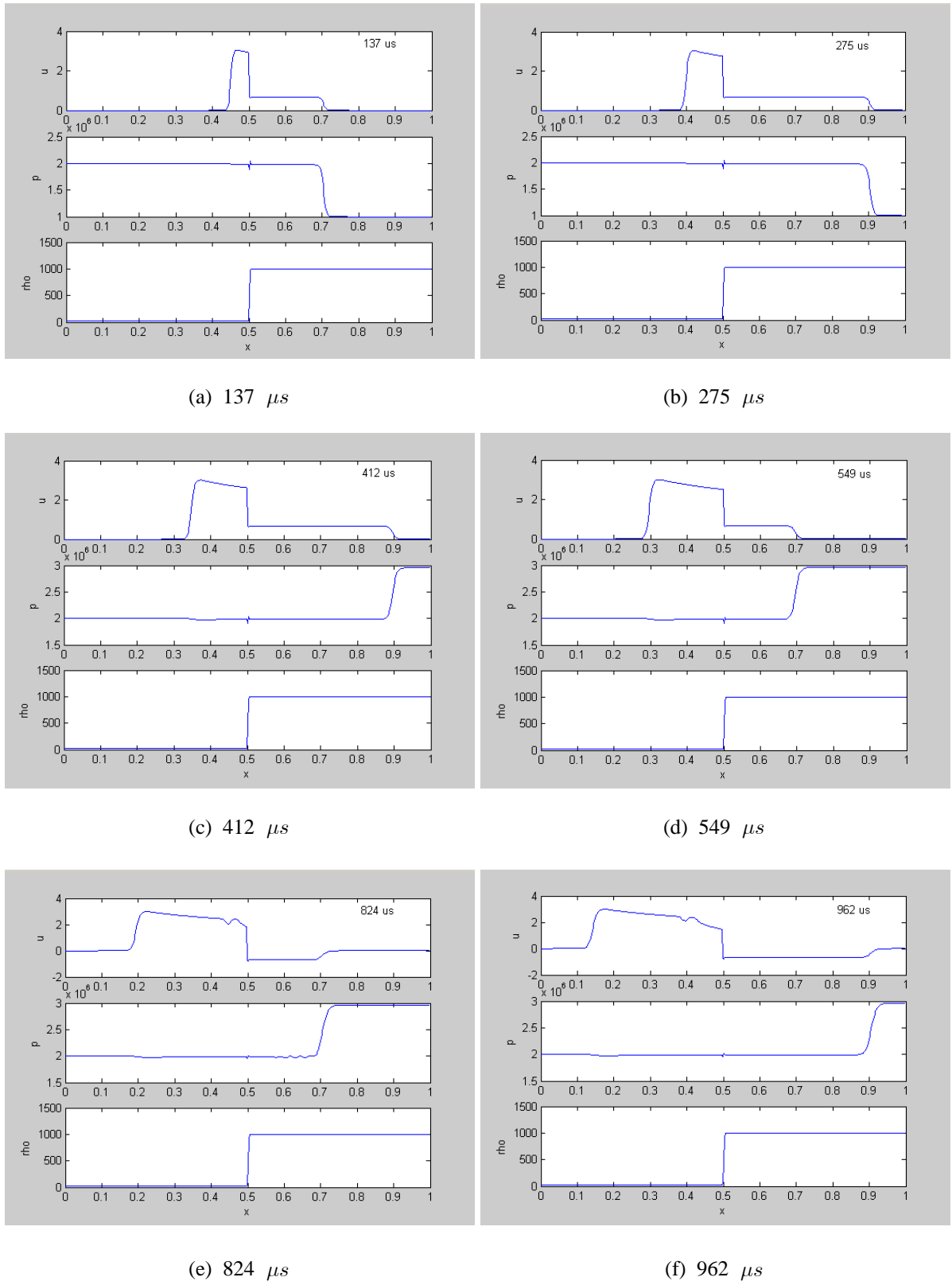


Fig. 4 Air-water shock-tube flows based on 2nd order Roe flux and passive volume fraction advection $\Delta x = 2$ mm, $CFL_{max} = 0.5$

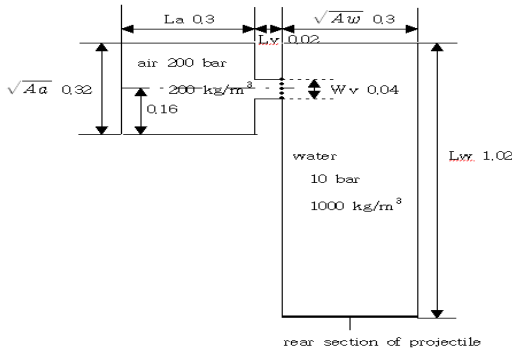


Fig. 5 2-Dimensional calculation model (length unit; m)

2차원 문제는 Fig. 5에 보인 형상 및 치수의 계산모델을 선정하였다. 공기탱크를 길이 L_a , 폭 \sqrt{Aa} 으로 설정하였으며, 길이 L_w , 폭 \sqrt{Aw} 인 물탱크와 밸브를 통하여 연결되도록 하였다. 초기에 공기와 물은 각각 200bar와 10bar의 압력을 갖도록 하였으며, 밀도는 각각 200 kg/m^3 와 1000 kg/m^3 으로 설정하였다. 밸브는 공기 탱크 단면 중심에 위치한 것으로 보고 그림과 같이 배치하였으며, 밸브 길이는 L_v , 폭은 W_v 로 표기하였다. 밸브가 물 탱크와 만나는 면은 가상의 격막으로 $t=0$ 에 갑작스럽게 파괴되는 것으로 설정하였다.

한편 압축공기의 팽창 효과로 물탱크의 한쪽 면이 이동하는 상황을 가정하여 압축유동장에서 계산되는 압력에 의하여 질량 100 kg의 물체가 가속되는 것으로 가정하였다. 이동면이 0.2 m 전진하는 시간까지 수치해석을 수행하였으며, Eulerian 고정격자계 해석코드인 까닭으로 이동면 벽경계조건을 실제와 달리 출발 전과 동일한 위치에 계속 적용하였다.

Fig. 6에 등가 단상유동에 2차 Roe플럭스를 사용하고 상경계 압력교란 억제 수단으로 상경계 기하적 재구성 및 다상유동장 계산과 압력이완방식을 적용한 경우 [Fig. 6(a)]의 이동면 가속도 (m/s^2), 속도 (m/s), 변위 (m)를 1차 Roe플럭스를 사용한 결과 [Fig. 6(b)]와 1차 Roe플럭스 및 체적분율을 수동수송 처리한 경우 [Fig. 6(c)]와 비교하여 나타내었다. 가로축은 시간 (s) 좌표이다. 변위 0.2 m 도달에 소요된 시간과 이 순간의 속도는 첫째 7.7 ms, 47.2 m/s, 둘째 7.8 ms, 46.6 m/s, 세 번째 8.2 ms, 41.9 m/s 이다. 체적분율을 수동수송 처리한 결과에 나타나는 큰 차이는 시물레이션이 진행되면서 상경계가 넓은 폭으로 확산된 것이 주된 원인이다. Fig. 7는 8.4 ms 인 순간의 체적분율 분포도를 보여준다. 체적분율을 수동수송 처리함에 따라 상경계 확산이 두드러진다[Fig. 7(c)]. 이에 반해 상경계를 기하

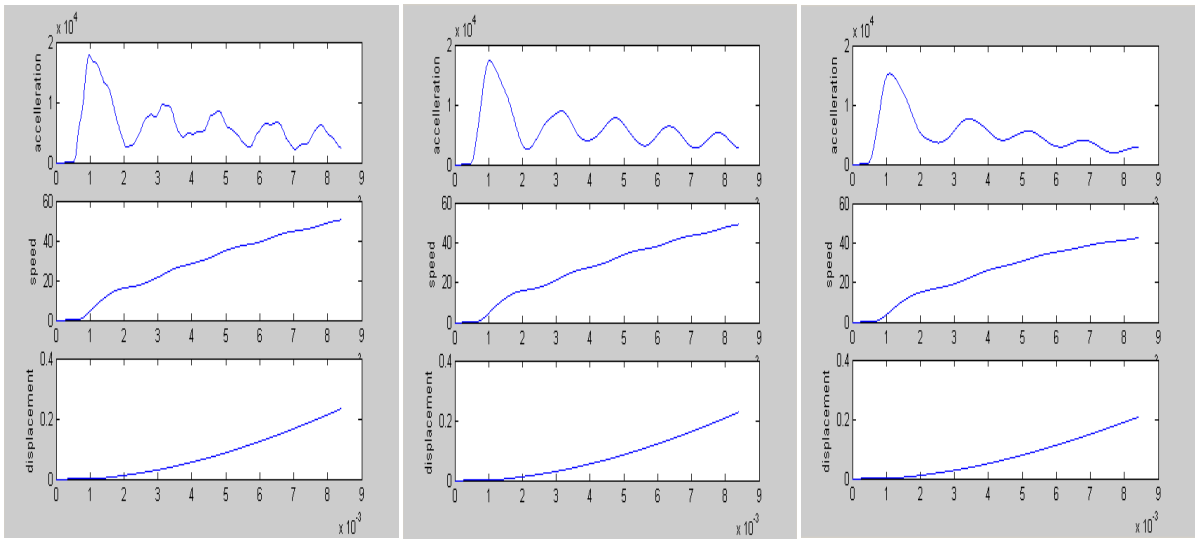
Table 2 Behavior of rear section of projectile along with Parameter changes

	이동면 변위 0.2 m 도달 소요시간 및 순간속도	
	도달시간 (ms)	순간속도 (m/s)
기준 제원	7.7	47.2
공기탱크압 축소 (100 bar)	11.0	33.3
물탱크 길이 축소 (L_w 0.52 m)	6.7	53.6
공기탱크 용량 증대 (\sqrt{Aa} 0.62 m)	7.56	49.3
밸브 크기 축소 (W_v 0.02 m)	8.51	40.7

적으로 재구성한 결과인 Fig. 7(a), (b)에서는 확산이 거의 완벽하게 억제되고 있다.

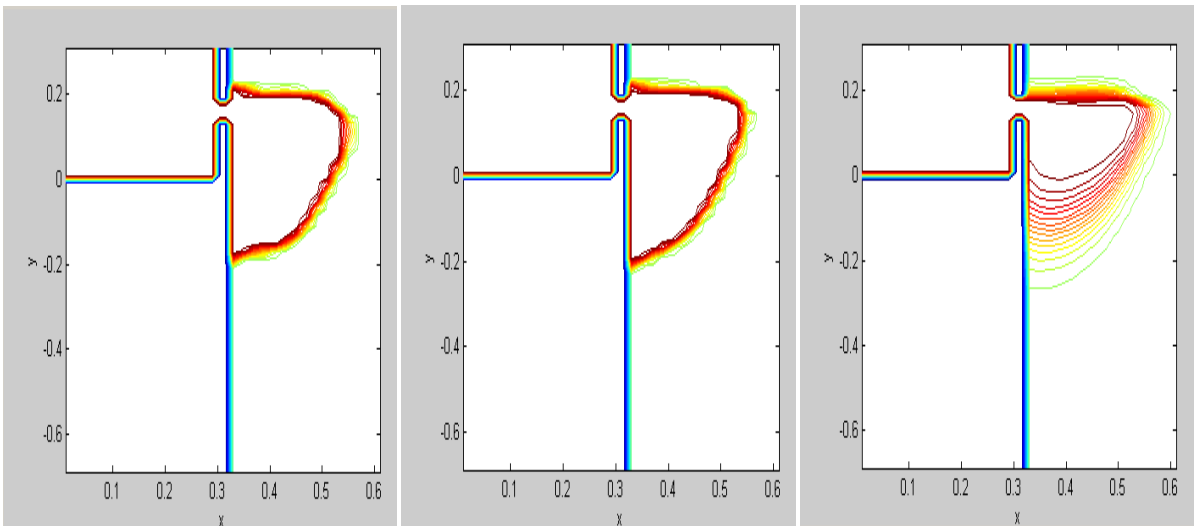
Fig. 8에 2차 Roe플럭스 및 압력이완방식을 적용한 결과 중에서 압력분포를 시간별로 나타내었다. 압력단위는 Pa 이다. 격자계 구성도 아울러 볼 수 있는데 밸브 내부는 $1 \times 1 \text{ cm}$, 밸브 길이에 의한 수평구역은 $1 \times 2 \text{ cm}$, 이외 구역은 $2 \times 2 \text{ cm}$ 셀 구조이다. CFL값은 모든 계산에 동일하게 최대 0.5로 고정시켰으며 이에 따라 대략 $3 \mu\text{s}$ 간격으로 적분이 진행된다. 최초 밸브 주위에 발생한 압력파가 이동면 후부 내 벽들과의 반사에 의해 높은 압력으로 발달한 모습이 1.68 ms 경과시의 압력분포도, Fig. 8(a)에 보인다. 첫 압력파가 이동면에 도달하는 시간은 대략 0.5 ms 이다. 이후 시간이 지나면서 공기탱크와 물탱크 내 압력이 점차 하강하는 것을 볼 수 있으며, 밸브 근처 공기가 고속으로 유출되는 영역에서 압력이 국부적으로 낮고 밸브 길이에 의한 직선 구간 중 맞은 편 벽 가까이에서 큰 압력이 형성되고 있다. 이곳은 벽에 의한 물에 의해 공기 진행이 막혀 있는 구역이다.

Table 2에 공기의 초기 압력, 물탱크의 크기, 공기탱크의 용량, 밸브의 크기를 변경하여 이동면이 0.2m 이동할 때 까지의 도달시간과 순간속도를 비교하여 나타내었다. 공기의 초기 압력을 기준 200 bar에서 100 bar로 반감시킨 영향은 크게 나타나나 탱크용량을 2 배로 키운 효과는 거의 볼 수 없음이 흥미롭다. 물탱크 길이를 0.5 m 축소시킨 결과와 기준값들을 비교하면 0.2 m 도달 소요시간은 13% 짧아지고 이때의 순간속도는 13.5% 증가하고 있다. 고정격자계 해석코드인 관계로 실제 움직이는 이동면에서의 경계조건을 출발 전 위치에 변경없이 적용함에 따른 이동면 거동 상의 오차가 크지 않음을 유추해 볼 수 있다.



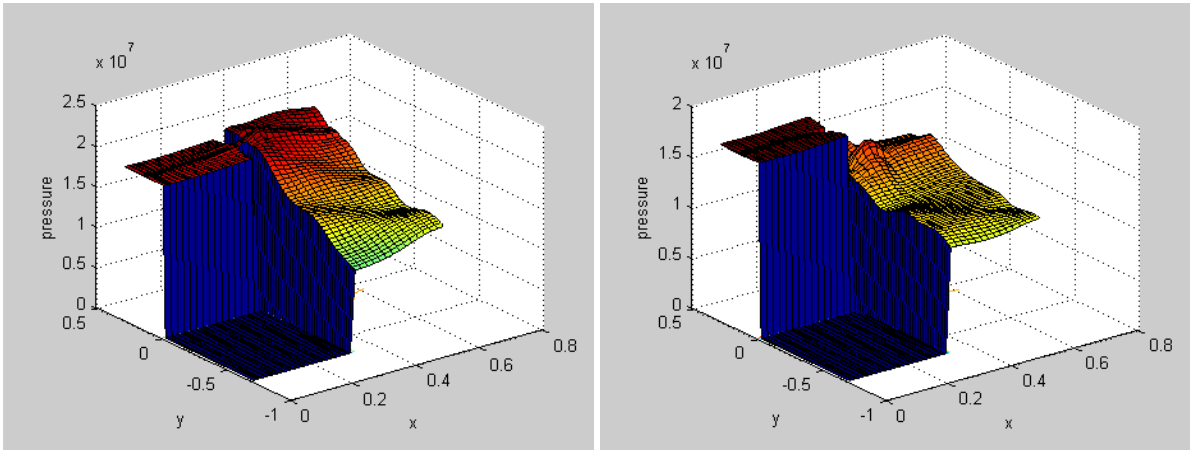
(a) 2nd order Roe flux and pre- (b) 1st order Roe flux and pre- (c) 1st order Roe flux and pas-
 ssure relaxation ssure relaxation sive volume fraction advection

Fig. 6 Behavior of rear section of projectile following abrupt rupture of valve diaphragm



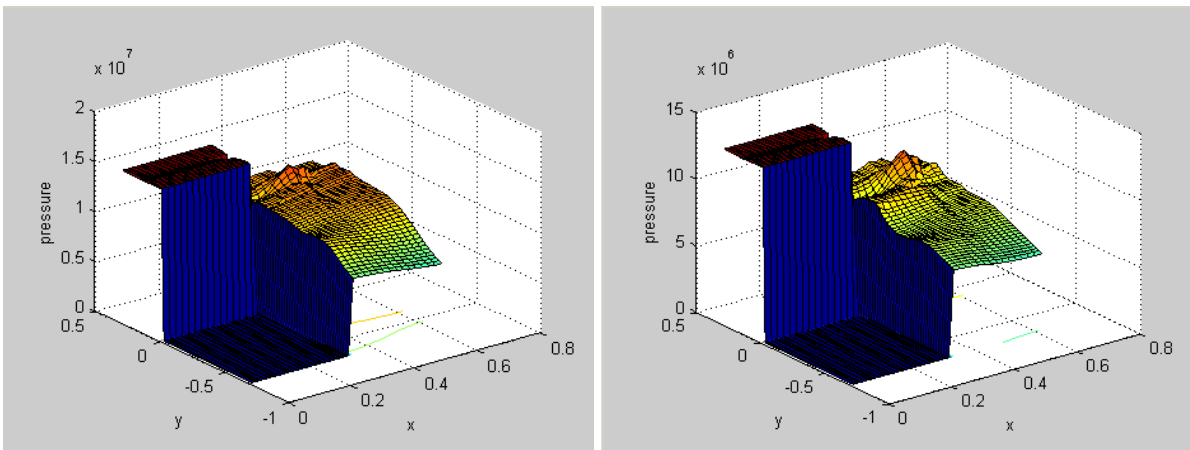
(a) 2nd order Roe flux and pre- (b) 1st order Roe flux and pre- (c) 1st order Roe flux and pas-
 ssure relaxation ssure relaxation sive volume fraction advection

Fig. 7 Volume fraction contours at 8.4 ms



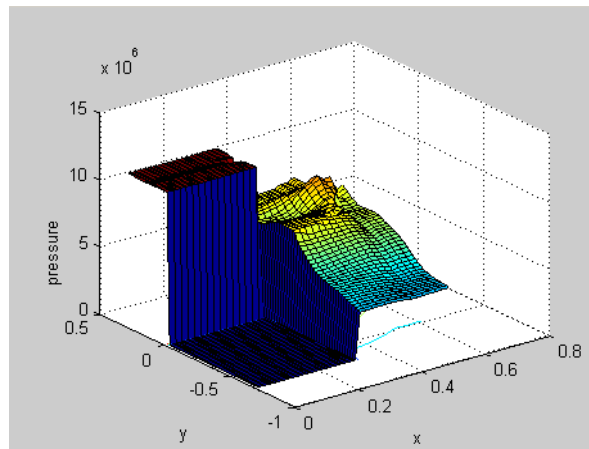
(a) 1.68 ms

(b) 3.36 ms



(c) 5.04 ms

(d) 6.72 ms



(e) 8.4 ms

Fig. 8 Pressure distribution based on 2nd order Roe flux and pressure relaxation

5. 결 론

분자 차원의 섞임이 없는 공기-물 이상 압축유동에 대해, 고정 Eulerian 격자계에서 체적분율을 통해 상경계를 추적하면서 수치해석을 수행하였다. Tait 형식 상태방정식을 적용하여 다상유동을 등가 단상유동장으로 처리하였으며, 등가 단상유동장의 수치해석에는 근사 Riemann solver인 Roe 알고리즘을 채택하였다.

상경계 비정상적 압력교란의 억제를 위해 체적분율을 수동수송 처리하는 방식과 직접적인 압력이완 방식 등 두가지 해결책을 모색하였다. 체적분율 수동수송 방법에서는 등가 단상유동에 대한 Roe 알고리즘 중 1차 정도 Roe 플럭스를 사용하더라도 상경계의 압력교란이 나타나지 않았으나, 직접 압력이완방식 적용시에는 1차 또는 2차 Roe 플럭스에 상관없이 상경계면에서 압력교란이 사라지는 결과를 얻었다.

압력이완방식이 실제 유효한 결과를 내도록 압축성이 반영된 체적분율식의 이산화 과정에서 상경계를 기하적으로 재구성하여 각 상의 체적플럭스를 구하였으며, 이로부터 체적분율 및 관련 변수의 수치확산을 최소화시켰다. 밀폐 용기 내에서 고압의 기체가 저압의 액체 속으로 갑작스럽게 혼합되는 현상 등의 다상-압축성 유동 해석에 본 연구결과가 활용될 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 논문은 수중운동체 특화 연구센터의 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- (1) Larouturou, B., 1991, "How to Preserve the Mass Fraction Positive When Computing Compressible Multi-component Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 95, pp. 59.
- (2) Karni, S., 1994, "Multi-component Flow Calculations by a Consistent Primitive Algorithm," *J. Comput. Phys.*, Vol. 112, pp. 31.
- (3) Abgrall, R., 1996, "How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flows: A Quasi Conservative Approach," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 150.
- (4) Karni, S., 1996, "Hybrid Multifluid Algorithm," *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 17, pp. 1019.
- (5) Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357.
- (6) Miller, G. H. and Puckett, E. G., 1996, "A High-Order Godunov Method for Multiple Condensed Phases," *J. Comput. Phys.*, Vol. 128, pp. 134.
- (7) Grove, J. W. and Menikoff, R., 1990, 'Anomalous Reflection of a Shock Wave at a Fluid Interface,' *J. Fluid Mech.*, Vol. 219, pp. 313.
- (8) Lax, P. and Wendroff, B., 1960, "Systems of Conservation Laws," *Commun. Pure Appl. Math.*, Vol. 13, pp. 217.
- (9) Sweby, P. K., 1984, "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, pp. 995.
- (10) Colella, P. and Woodward, P. R., 1984, "The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 54, pp. 174.
- (11) Roe, P. L., 1986, "Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 337.
- (12) Fedkiw, R. P., Aslam, T., Merriman, B., and Osher, S., 1999, "A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method)," *J. Comput. Phys.*, Vol. 152, pp. 457.
- (13) Abgrall, R. and Karni, S., 2001, "Computations of Compressible Multifluids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 169, pp. 594.
- (14) Godunov, S. K., 1959, "A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics," *Math. Sbornik.*, Vol. 47, pp. 357.
- (15) Harvie, D. J. E. and Fletcher, D. F., 2000, "A New Volume of Fluid Advection Algorithm: The Stream Scheme," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp. 1.

부록. 상경계 기하적 재구성 및 다상유동 수치해석 알고리즘

압축성이 반영된 체적분율식 (11g)의 이산화 과정에 VOF (volume of fluid)방식에서와 같이 상경계를 기하적

으로 재구성 (geometric reconstruction)하여 각 상 또는 각 유체의 체적분율을 구하였다. 1차원 문제에서 상 경계 기하적 재구성은 극히 단순하다. Fig. A1에 보이

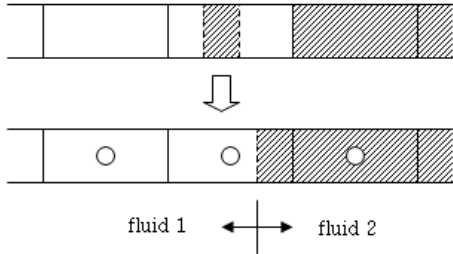


Fig. A1 1-Dimensional geometric reconstruction of phase interface

듯이 다유체셀 내 유체 2를 이 유체가 가득한 오른쪽 셀에 밀어 붙이는 것이다. 다상유동장 계산은 ○ 마크가 있는 셀에서만 진행된다.

2차원 문제에서 상경계 재구성이란 다유체셀 내 상 경계의 방향과 위치를 찾아내는 것을 말하며, Young과 Puckett의 기법이 대표적이다.⁽¹⁵⁾ 체적분율 구배 $\nabla\alpha$ 를 추적하는 Young의 방식은 임의의 다각형 형상을 갖는 셀 구조에 적용이 가능한가 분명치 않다. 본 연구에서는 균일 셀에 대한 Puckett 방식을 임의의 형상 셀로 확장하여, 다유체셀 각각에 대해 다음 식 (A1)이 최소화되도록 상경계 법선방향벡터 n_I 를 구하였다.

$$Er_j(n_I) = \sum_m (\alpha_{1m}A_m - \alpha_{1m}^e A_m)^2 = \sum_m (\alpha_{1m} - \alpha_{1m}^e)^2 A_m^2 \tag{A1}$$

A_m 은 상경계를 포착해야 할 대상 다유체셀 j 에 대응하는 템플릿 내 m 셀의 면적이고 α_{1m} 은 m 셀 내 유체 1의 체적분율이다. 대상 다유체셀 j 내부의 상경계에 대한 법선벡터 n_I 가 주어지면, 경계위치는 셀 내부의 유체 1 체적이 $\alpha_{1j}A_j$ 값이 나올 때까지 상경계를 n_I 방향으로 평행이동시켜 찾는다.

이 경계선을 직선 연장하여 이로부터 구한 템플릿 내 m 셀의 유체 1 체적분율이 α_{1m}^e 이다. 이렇게 α_{1m}^e 는 n_I 에 따라 변하는 값이다. 셀 형상은 임의의 형상을 갖는 4각형 셀로 제한하였으며 이에 따라 템플릿은 대상 j 셀을 중심으로 좌우 위아래 9 셀을 취한다. 대상셀이 계산영역 경계에 접한 경우에는 6 셀로 구성되고 구석에 위치하면 4 셀로 템플릿이 구성된다. 식 (A1)에서 알 수 있듯이 유체 1의 실제 면적 $\alpha_{1m}A_m$ 과 추정 면적 $\alpha_{1m}^e A_m$ 과의 차이의 템플릿 내 합이 최소화되도록 n_I 를 구하는 방식이다.

체적분율식 (11g)의 이산화 역시 $x-y-t$ 영역 적분

을 통해 진행된다.

$$(\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n)A = - \sum_b \mathbb{A}_l + \alpha_i' \frac{\Gamma_i}{\Gamma_i} \{1 - (\alpha_i' + \alpha_i')\}A, \tag{A2a}$$

$l=1,2$

$$\alpha_i^n = \frac{1}{A} \iint_A \alpha_i(x, y, t^n) dx dy \tag{A2b}$$

$$\mathbb{A}_l = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{l_i} \alpha_l U^*(x_b, y_b, t) dl dt, \tag{A2c}$$

where $U^* = n_x u + n_y v$

$$(\alpha_i' - \alpha_i^n)A = - \sum_b \mathbb{A}_l \tag{A2d}$$

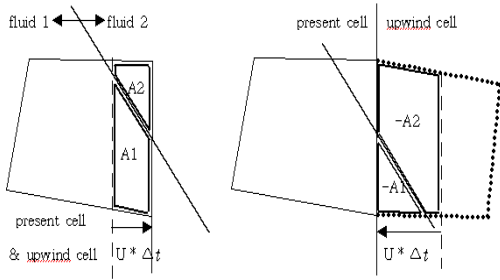
$$\frac{1}{\Gamma_i} = \sum_{l=1}^2 \frac{\alpha_l'}{\Gamma_l} \tag{A2e}$$

$$\frac{\alpha_i' A}{\Gamma_i} = \frac{\alpha_i^n A}{\Gamma_i^n} - \sum_b \frac{\mathbb{A}_l}{\Gamma_l^n U^W}, \Gamma_l^n = \gamma_l(p^n + B_l) \tag{A2f}$$

셀 경계 중 i 번째 변 l_i 를 통해 셀 외부로 시간 Δt 가 경과하는 동안에 빠져나가는 유체 l 의 체적이송량인 \mathbb{A}_l , 식 (A2c), 은 다음 과정으로 유도된 결과이다.

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \iint_A \{(\alpha_l u)_x + (\alpha_l v)_y\} dx dy dt \\ &= \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_b (\alpha_l u n_x + \alpha_l v n_y) dl dt \\ &= \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_b \alpha_l U^* dl dt, \quad U^* = n_x u + n_y v \\ &= \sum_b \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{l_i} \alpha_l U^* dl dt = \sum_b \mathbb{A}_l \end{aligned} \tag{A3}$$

이 유체 l 의 체적이송량 \mathbb{A}_l 을 앞에서 재구성한 상경계와 셀 변에서의 법선방향 유체입자속도 U^* 로부터 기하적으로 산출하는 것이 VOF기법이다. (Fig. A2) Fig. A2에 대상셀 (present cell)의 우변을 시간 Δt 동안 통과하는 유체 1의 체적이송량 A1 및 유체 2 이송량 A2를 U^* 가 양인 경우 (대상셀로부터 U^* 가 외부로 향하는 경우)와 음인 각각에 대해 도시하였다. 체적이송량 A1, A2는 그림에서와 같이 유체 1, 2



case $U^* > 0$ case $U^* < 0$
Fig. A2 Volume transition of fluid l , A_l

간 상경계선과 우변으로부터 $U^* \Delta t$ 떨어진 직선 및 유체가 출발하는 셀 (upwind cell)의 변들로 둘러싸인 면적이다. α'_i 은 식 (A2d)에서 볼 수 있듯이 각 유체의 상대적 압축성을 고려하지 않고 유동에 따른 (convection) 체적이송량 A_l 만 고려할 때 산출되는 체적분율로서, 수동수송 (passive advection)과 혼합상 팽창 (velocity divergence) 효과가 반영된다. 이들의 합 $\alpha'_1 + \alpha'_2$ 은 일반적으로 1이 아니며 식 (A2a) 우변의 두번째 항에 의해 합이 1로 조절된다, 즉 $\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1} = 1$. 각 유체의 상대적 압축성을 반영하는 항이 I_l^* 으로 식 (A2f)에 보이듯이 유동에 따른 체적이송량을 가중치로 체적 평균한 등엔트로피 발크 모듈러스 (isentropic bulk modulus)이다.⁽⁶⁾ 식 (A2a) 우변 둘째 항은 다음과 같이 유도되는 혼합상 체적팽창량에 상대적 압축성을 고려한 결과라 할 수 있다.

$$\int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \iint_A (u_x + v_y) dx dy dt = \sum_b (A_1 + A_2) = \{1 - (\alpha'_1 + \alpha'_2)\} A \quad (A4)$$

다상 압축성유동에 대한 지배식 (12a-d)의 이산화도 $x-y-t$ 영역 적분을 거친다.

$$\{(\alpha_l \rho_l)^{n+1} - (\alpha_l \rho_l)^n\} A = - \sum_b A_b \rho_b^*, \quad l=1,2 \quad (A5a)$$

$$\{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n\} A = - \sum_b (A_1 \rho_1^* + A_2 \rho_2^*) u^* - \sum_b p^* n_x l_i \Delta t \quad (A5b)$$

where $u^* = n_x U^* - n_y V^*$

$$\{(\rho v)^{n+1} - (\rho v)^n\} A = - \sum_b (A_1 \rho_1^* + A_2 \rho_2^*) v^* - \sum_b p^* n_y l_i \Delta t \quad (A5c)$$

where $v^* = n_y U^* + n_x V^*$

$$\{[\alpha_l \rho_l (e_l + \frac{u^2 + v^2}{2})]^{n+1} - [\alpha_l \rho_l (e_l + \frac{u^2 + v^2}{2})]^n\} A = - \sum_b A_b \rho_b^* (e_l^* + \frac{u^{*2} + v^{*2}}{2}) - \sum_b (\alpha_l \frac{\rho_l}{\rho})^{n+1} U^n p^* l_i \Delta t - \alpha_l' \frac{I_l^*}{I_l} p^n \{1 - (\alpha'_1 + \alpha'_2)\} A, \quad l=1,2 \quad (A5d)$$

where $U^n = n_x u^n + n_y v^n$

이산화식 (A5a-d) 모두 상경계의 기하적 재구성으로부터 구한 유체 l 의 체적이송량 A_l 을 반영하고 있다. 위 첨자 *가 표시된 항은 셀 변에서의 상태량이다. U^* 와 p^* 는 등가 단상유동장으로부터 구하고 이를 제외한 ρ_l^* , e_l^* , V^* 는 U^* 부호에 따른 UW (upwind) 셀의 시간 t^n 에서의 상태값을 취한다.⁽⁶⁾ 여기서 $V^* = -n_y u^{n UW} + n_x v^{n UW}$ 이다.

셀 변에서의 압력 p^* 와 변에 수직인 입자속도 성분 U^* 는 상경계에서 충격파 및 팽창파 등 압력파의 전달 및 반사를 자연스럽게 구현하기 위하여 등가 단상유동장으로부터 특별한 과정으로 유도한다. 1차 Roe 플럭스를 유도하는 과정에 준해 셀 경계 상태량을 유도하면 다음과 같다.

$$q^* = \frac{1}{2} (q_L^n + q_R^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 \text{sign}(\lambda_k) W_k \quad \text{where } q = [\rho, \rho U, \rho V, E, \alpha]^T \quad (A6a)$$

$$U^* = q_2^* / q_1^* \quad (A6b)$$

$$p^* = (\gamma^* - 1) (q_4^* - \frac{q_2^{*2} + q_3^{*2}}{2q_1^*}) - \gamma^* B^* \quad (A6c)$$

$$\frac{1}{\gamma^* - 1} = (\frac{1}{\gamma_1 - 1} - \frac{1}{\gamma_2 - 1}) q_5^* + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \quad (A6d)$$

$$\frac{\gamma^* B^*}{\gamma^* - 1} = (\frac{\gamma_1 B_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1}) q_5^* + \frac{\gamma_2 B_2}{\gamma_2 - 1} \quad (A6e)$$