

---

# 무한한 플랜지가 장착된 개방형 직사각형 도파관 구조에 대한 산란 행렬 해석

고지환\* · 조영기\*\*

Analysis of Scattering Matrix for the Open-ended Rectangular Waveguide with Infinite Flange

Ji-Whan Ko\* · Young-Ki Cho\*\*

---

이 논문은 2005년도 금오공과대학교 교내학술연구비를 지원받았음

---

## 요 약

본 논문에서는 무한한 도체 플랜지가 장착된 개방형 직사각형 도파관의 구조에 대한 산란 행렬을 구하였다. 산란 행렬의 정확도를 검증하기 위해서 산란 행렬로부터 부하 어드미턴스  $Y_{L,10}$ 를 계산하여 기존의 논문 결과와 비교하고,  $TE$ 와  $TM$  모드 수에 증가에 따른 산란 행렬의 수렴도를 조사하여 본 논문에서 제시한 산란 행렬 방법의 타당성을 확인하였다 그리고 도파관의 개구면을 통하여 자유공간으로 방사되는 패턴을 제시하였다.

## ABSTRACT

In this paper, scattering matrix for the open ended rectangular waveguide with infinite flange is derived. To validate the scattering matrix approach, load admittance  $Y_{L,10}$  obtained from the present scattering matrix method is compared with the results of the previous work. The convergence for scattering matrix solution versus  $TE$  and  $TM$  mode numbers is investigated. Also far field power pattern radiated from the aperture of the waveguide is given.

## 키워드

Open-ended waveguide, Waveguide with infinite flange

## 1. 서 론

개구 안테나는 위상 배열 안테나 외에도 투열요법 (diathermy), 온열요법 (hyperthermia) 등의 많은 분야에 적용되어 왔다<sup>[1]</sup>. 이런 안테나의 기본적인 구조는 그림 1

에서 보는 바와 같이 무한한 도체 플랜지를 갖는 개방형 직사각형 도파관 (open-ended rectangular waveguides with infinite flange) 구조로 주어진다.

이 구조에 대한 전자파 해석으로 처음에는 variational principle을 이용하여 근사적으로 접근하였고<sup>[2]</sup>, 이후 몇

---

\* 금오공과대학교 전자공학부 교수

\*\* 경북대학교 공과대학BK사업단장

가지의 근사적 방법이 제시되었으며<sup>[3-5]</sup>, 고차 모드까지 고려한 비교적 정확한 해석은 1980년에 MacPhie<sup>[6]</sup>가 상관 행렬 방법을 사용하여 제시한바 있다. 이 해석 방법에서는 개구면에서 *TE*, *TM* 모드의 상관 함수(correlation function)로부터 유도된 상관 행렬을 이용해서 도파관과 반 무한 공간간에 복소 전력 보존 원리를 적용하여 산란 행렬(scattering matrix)을 계산하였다. 상관 행렬 방법은 개구면을 통하여 공간 영역으로 빠져나가는 전파의 복소 전력 계산을 하는데 있어 Parseval의 이론에 의해 스펙트럼 영역에서 유도되는 것이므로 풀이 과정이 매우 복잡하고 S/W 코딩에 어려움이 있다는 단점이 있다. 또한, 1988년에 F. Gardiol<sup>[7]</sup>은 기본 모드 *TE*<sub>10</sub> 모드가 도파관에 입사되는 경우에 개구면의 전자계 경계조건을 부과하여 적분 방정식을 세우고 특성 모드법(characteristic mode method)을 사용하여 풀이하는 해석 방법을 제시하였다. 이 방법은 도파관에서 단지 기본 모드에 대한 반사 계수를 근사적으로 구하는 방법이다. 따라서 기존의 방법에 비하여 보다 나은 정확도와 계산 과정의 효율성을 줄 수 있는 해석 방법이 필요하다고 생각된다.

본 논문에서는 앞에서 언급한 해석 방법의 단점을 개선하기 위해 스펙트럼 영역이 아닌 공간 영역에서 전자계 문제를 다루어 간단하게 산란 행렬을 구하는 효율적인 방법을 제시하고자 한다. 해석 방법으로 도파관 내부의 전자계는 *TE*와 *TM* 모드의 합으로 표현하고, 개구면에 등가 자계면 전류를 두어 자유공간에서 전자계를 구한 다음, 개구면에서 자계의 경계조건을 부과하고 각 모드 함수로 내적을 취함으로써 모드 계수에 대한 행렬식을 얻게 되며, 적절한 행렬 연산을 통해 도파관에서의 산란 행렬을 얻는 것이다. 본 논문에서 제시한 산란 행렬의 계산 결과를 비교하기 위해 참고논문[6]에서 제시된 산란 행렬로부터 구한 개구면에서의 부하 어드미턴스  $Y_{L,10}$ 과 비교하였다. 그리고 좀 더 계산 방법을 검증하기 위해서 *TE*와 *TM* 모드 수에 따른 산란 행렬의 수렴도를 조사하였으며, 또한 개구면을 통하여 자유공간으로 방사되는 패턴을 계산하여 검토하였다.

## II. 도파관에서 산란행렬 유도

그림 1에서 보는 바와 같이 단면이 직사각형인 구형

도파관의 종단 개구 주위에 무한한 도체 플랜지가 장착되어 있는 구조에서 도파관으로부터 입사파가 반 무한 공간으로 방사되는 경우에 도파관 내부에서 산란 행렬을 유도하고자 한다. 이를 위해 그림 2와 같이 도파관 내부를 영역 1 그리고  $z > 0$ 인 반 무한 공간을 영역 2라 두고, 각 영역에서 전자계를 정의하고 개구면에서 경계조건을 적용할 것이다.

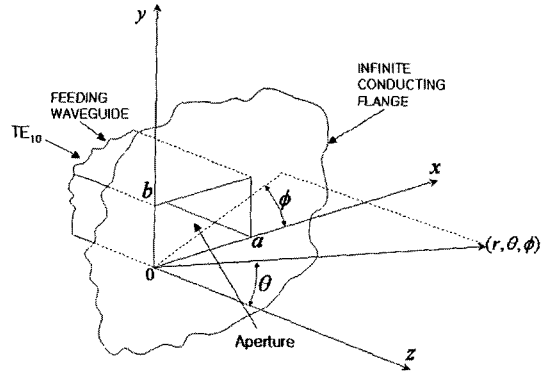


그림 1. 무한한 도체 플랜지를 갖는 개방형 직사각형 도파관

Fig. 1. Open-ended rectangular waveguide with infinite flange

먼저 도파관에서 전자계의  $z$ 축의 횡축 성분은 *TE* (*h*-type)와 *TM* (*e*-type) 모드의 합으로 표현되므로  $z=0$ 인 개구면에서 다음식과 같이 주어질 수 있다<sup>[8]</sup>.

$$\bar{E}_{t1}(x, y) = \sum_m \sum_n [b_{mn}^h \bar{e}_{mn}^h(x, y) + b_{mn}^e \bar{e}_{mn}^e(x, y)] \quad (1a)$$

$$\bar{H}_{t1}(x, y) = \sum_m \sum_n [Y_{mn}^h b_{mn}^h \bar{h}_{mn}^h(x, y) + Y_{mn}^e b_{mn}^e \bar{h}_{mn}^e(x, y)] \quad (1b)$$

여기서

$$\bar{e}_{mn}^h(x, y) = N_{mn}^h [\hat{x} \beta_{yn} \cos \beta_{xm} x \sin \beta_{yn} y - \hat{y} \beta_{xm} \sin \beta_{xm} x \cos \beta_{yn} y] \quad (2a)$$

$$\bar{e}_{mn}^e(x, y) = N_{mn}^e [\hat{x} \beta_{xm} \cos \beta_{xm} x \sin \beta_{yn} y + \hat{y} \beta_{yn} \sin \beta_{xm} x \cos \beta_{yn} y] \quad (2b)$$

$$\bar{h}_{mn}^h(x, y) = N_{mn}^h \left[ \hat{x} \beta_{xn} \sin \beta_{xm} x \cos \beta_{yn} y + \hat{y} \beta_{ym} \cos \beta_{xm} x \sin \beta_{yn} y \right] \quad (2c)$$

$$\bar{h}_{mn}^e(x, y) = N_{mn}^e \left[ -\hat{x} \beta_{yn} \sin \beta_{xm} x \cos \beta_{yn} y + \hat{y} \beta_{xm} \cos \beta_{xm} x \sin \beta_{yn} y \right] \quad (2d)$$

$$Y_{mn}^h = \frac{\sqrt{\beta_{xm}^2 + \beta_{yn}^2 - k_o^2}}{j\omega\mu_o} \quad (3a)$$

$$Y_{mn}^e = \frac{j\omega\epsilon_o}{\sqrt{\beta_{xm}^2 + \beta_{yn}^2 - k_o^2}} \quad (3b)$$

위 식에서  $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  이고  $m = n = 0$ 인 경우는 제외되며,  $b$  와  $b'$  는  $z$  축의 + 방향으로 진행하는 파와 - 방향으로 진행하는 파의 각 모드 계수의 합과 차를 의미하는 것으로, 각각  $b = b^+ + b^-$  와  $b' = b^+ - b^-$  로 표시될 수 있다. 그리고  $\beta_{xm} = m\pi/a$ ,  $\beta_{yn} = n\pi/b$  이다. 그림 2에서 보는 바와 같이 도파관의 개구면에서는 등가 원리를 이용하여 개구면을 단락시키고 등가 자계면 전류로 대체할 수 있으며, 식 (1)의 전계의 단면 성분에 의해  $\bar{E} \times \hat{n} = \bar{M}$  의 관계식으로부터 등가 자계면 전류를 간단히 구할 수 있다.

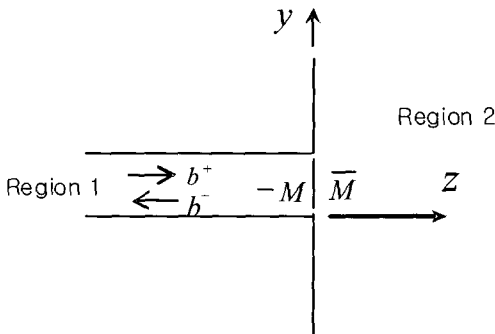


그림 2. 개방형 도파관의 단면

Fig. 2. Section of the open-ended rectangular waveguide.

다음은 반 무한 자유공간 영역에서의 전자계는 개구면의 등가 자계면 전류( $\bar{E} \times \hat{n} = \bar{M}$ )에 의해 방사되는

것으로 볼 수 있으며 다음의 식과 같이 주어진다.

$$\bar{H}_2 = -j\omega\bar{F} + \frac{1}{j\omega\mu_o\epsilon_o} \nabla \nabla \cdot \bar{F} \quad (4a)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \nabla \times \bar{H}_2 \quad (4b)$$

여기서

$$\bar{F} = \frac{\epsilon_o}{2\pi} \int_{S'} \bar{M}(x', y') \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' \quad (5)$$

식 (1)과 식 (4)에서 도파관 영역과 자유공간 영역에서 전자계를 정의하였으므로, 이제 개구면에서 자계의 접선 성분은 서로 연속이라는 경계조건을 적용할 것이다.  $z=0$ 인 개구면에서 도파관 영역의 자계 접선 성분인 식 (1)과 자유공간 영역의 자계 접선 성분인 식 (4)를 서로 같게 두면 다음의 식과 같이 표현된다.

$$\bar{H}_{11}(z=0^-) = \bar{H}_{12}(z=0^+) \quad (6)$$

위의 식 (6)의 양변에 식 (2c)로 주어진  $\bar{h}_{st}^h$ 를 곱하고 개구면의 면적에 대하여 적분하고, 다시 식 (6)의 양변에 식 (2d)로 주어진  $\bar{h}_{st}^e$ 를 곱하고 개구면에 대하여 적분하면, 즉 식 (6)에 대해  $\bar{h}_{st}^h$ 과  $\bar{h}_{st}^e$ 로 내적을 취하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$b_{mn}^h Y_{mn}^h = \sum_s \sum_t [H_{mnst} b_{st}^h + K_{mnst} b_{st}^e] \quad (7a)$$

$$b_{mn}^e Y_{mn}^e = \sum_m \sum_n [Q_{mnst} b_{st}^h + E_{mnst} b_{st}^e] \quad (7b)$$

여기서

$$H_{mnst} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{2\pi} \int_S \left[ \bar{h}_{mn}^h(x, y) \cdot \bar{e}_{st}^h(x', y') \right] \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' + \frac{j}{2\pi\omega\mu_o} \int_S \left[ \nabla_t \cdot \bar{h}_{mn}^h(x, y) \right] \left[ \nabla_t' \cdot \bar{e}_{st}^h(x', y') \times \hat{z} \right] \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' ds \quad (8a)$$

$$K_{mns} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{2\pi} \int_S \int_{S'} [\bar{h}_{mn}^h(x, y) \cdot \bar{e}_{st}^e(x', y')] \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' ds \quad (8b)$$

$$Q_{mns} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{2\pi} \int_S \int_{S'} [\bar{h}_{mn}^e(x, y) \cdot \bar{e}_{st}^h(x', y')] \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' ds \quad (8c)$$

$$E_{mns} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{2\pi} \int_S \int_{S'} [\bar{h}_{mn}^e(x, y) \cdot \bar{e}_{st}^e(x', y')] \frac{e^{-jk_o R}}{R} ds' ds \quad (8d)$$

식 (8)의 관계식을 보면  $H, K, Q, E$ 는 개구면에서 두 영역의  $TE$  모드와  $TM$  모드간의 결합으로 표현됨을 알 수 있고, 여기에서 필요한 적분은 극좌표계로 변환한 다음, 수치적분을 수행하면 된다. 그리고 식 (7)을 행렬로 간단하게 표현하면 다음과 같이 들 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y^h & 0 \\ 0 & Y^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'^h \\ b'^e \end{bmatrix} = [Y][b'] = \begin{bmatrix} H & K \\ Q & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^h \\ b^e \end{bmatrix} = [M][b] \quad (9)$$

앞에서 언급한 바와 같이  $b' = b^+ - b^-$  이고  $b = b^+ + b^-$  이므로 이를 식 (9)에 대입하고 정리하면 개구면에서 산란행렬  $[S]$ 는 다음의 식과 같이 유도된다.

$$[b^-] = (1 + [Y]^{-1}[M])^{-1} (1 - [Y]^{-1}[M])[b^+] = [S][b^+] \quad (10)$$

따라서 식 (10)에 표현된 행렬연산을 하면 도파관의 각 모드별에 대해 계수를 모두 얻을 수 있다. 여기서 도파관에  $TE_{10}$  모드만 입사하는 경우, 즉  $b_{10}^{+h} = 1$ 로 두면 식 (10)으로부터 반사되는  $TE$  모드의 계수( $b_{mn}^{-h}$ )와  $TM$  모드의 계수( $b_{mn}^{-e}$ )를 체계적으로 계산할 수 있으며, 반사되는 복소전력은 다음 식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$P_{mn}^- = 1/2 |S_{mn,10}|^2 Y_{mn}^* \quad (11)$$

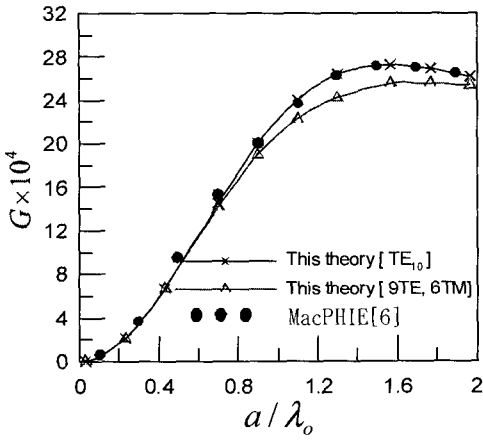
그리고 무한한 플랜치가 장착된 개방형 도파관에 대해 개구면에서 반 자유공간쪽으로 바라본 부분을 부하 어드미턴스(Load admittance)로 표현되는 등가회로로 표현하면,  $TE_{10}$  모드가 입사되는 경우에 해당되는 부하 어드미턴스  $Y_{L,10}$ 는 다음 식으로부터 얻을 수 있다<sup>[6]</sup>.

$$Y_{L,10} = \frac{1 - S_{10,10}}{1 + S_{10,10}} Y_{10} \quad (12)$$

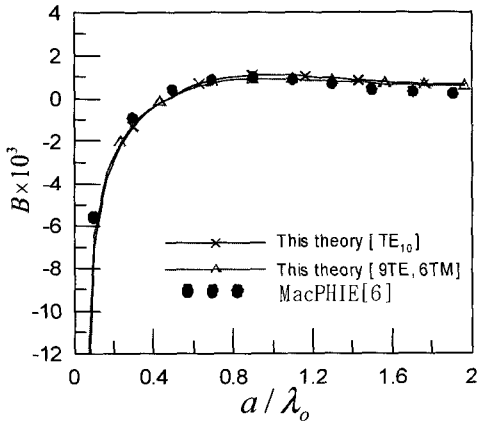
도파관에  $TE_{10}$  모드가 입사될 때 식 (10)으로부터 도파관에서 각 모드별 계수를 전부 구하고 나면 식 (1)에 대입하여 개구면에서의 단면 전자계 성분을 구할 수 있게 된다. 따라서 개구면에서의 등가 자계면 전류는  $\bar{M} = \bar{E} \times \hat{n}$ 로부터 계산되고, 이 자계면 전류에 의해 자유공간에 방사되는 전자계는 식 (4)로부터 간략화된 수식으로 쉽게 유도되며, 방사패턴은  $P = 1/2 \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^* \cdot \hat{r})$ 으로부터 계산하여 도시할 수 있다.

### III. 수치 계산

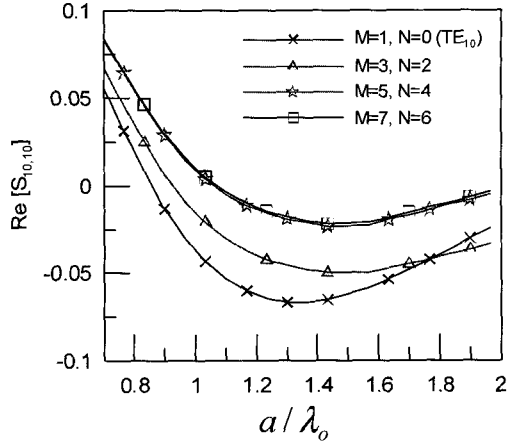
앞 절에서는 그림 1의 개형 도파관 구조에 대해 산란행렬을 유도하는 과정을 나타내었다. 이러한 방법으로 계산한 결과의 정확성을 검토하기 위해 상관 행렬 방법으로 구한 참고논문[6]의 부하 어드미턴스 계산 결과와 비교하였다. 도파관 크기인 폭  $a$ 와 높이  $b$ 를  $a = 2.25b$ 로 두고,  $TE_{10}$  모드가 입사되는 경우에 대해 식 (12)의 부하 어드미턴스 ( $Y_{L,10} = G + jB$ )의 실수부와 허수부를 계산하여 그림 3에 나타내었다.



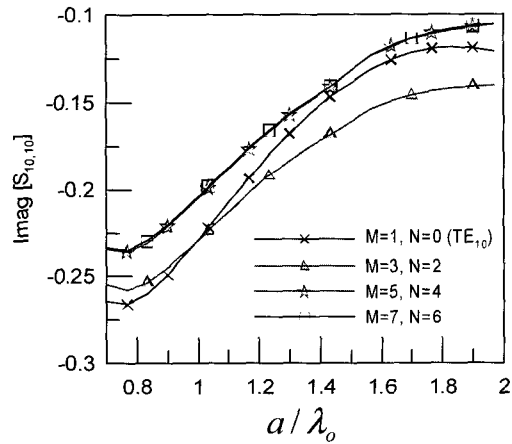
(a) 실수부



(b) 허수부



(a) 실수부



(b) 허수부

그림 3. 플랜지를 갖는 개방형 직사각형 도파관의 어드미던스( $a = 2.25b$ )

Fig. 3. Admittance of open-ended rectangular waveguide with infinite flange

먼저 참고논문[6]과 동일하게 9개의  $TE$  모드( $m=1,3,5, n=0,2,4$ )와 6개의  $TM$  모드( $m=1,3,5, n=2,4$ )를 두고 동일한 조건하에서 부하 어드미던스를 계산하여 참고논문[6]과 비교하였는데, 허수부는 비교적 일치하였으나 실수부는 예상과 달리 약  $a/\lambda_0 = 0.8$ 부터 점차적으로 오차가 상당히 커져 불일치하였다. 다시 모드 수를 줄이면서 비교하였는데 의외로 기본 모드인  $TE_{10}$ 만 고려한 계산 결과와 일치하였다.

그림 4. 모드 수에 따른 개방형 도파관의  $S_{10,10}$  ( $a = 2.25b$ )

Fig. 4.  $S_{10,10}$  of open-ended rectangular waveguide versus number of modes.

본 논문에서 다루는 해석 방법에 대해 좀 더 타당성을 검토하기 위해 고차 모드 수 증가에 따름  $S_{10,10}$ 의 수렴을 조사하였다. 도파관 크기는 그림 3의 경우와 같이 동일하게 두고,  $TE$  모드( $m=1,3,5,\dots,M, n=0,2,4,\dots,N$ )와  $TM$ 의 모드( $m=1,3,5,\dots,M, n=2,4,\dots,N$ )에서  $M$ 과  $N$ 을 증가하면서  $S_{10,10}$ 의 실수부와 허수부를 그림 4에 나타내었다. 그림에서 ( $M=1, N=0$ )인 경우는 도파관의 기본 모드인  $TE_{10}$ 만 고려한 계산 결과이

며, 나머지는 고차모드를 포함한 것으로  $M=5$ ,  $N=4$  이상에서 수렴됨을 볼 수 있다. 이러한 분석 결과를 고려하여 보면 본 논문의 해석방법이 좀더 정확함을 알 수 있다.

그리고 앞에서 언급한 동일한 도파관( $a=2.25b$ )에서 파장이  $\lambda_0 = a/0.7$ 인 기본 모드인  $TE_{10}$  파가 도파관에 입사 될 경우 대부분의 전파는 개구면 통해 자유공간 영역으로 방사될 것이다. 이 경우에  $TE_{TE}$ 와  $TM$ 의 모드 수는  $M=5$ ,  $N=4$ 로 두고 계산된 방사패턴을  $xz$  plane과  $yz$  plane에 대하여 그림 5.에 나타내었으며, 예상되는 바와 같이  $xz$  plane 패턴은 뾰족한 형태이고  $yz$  plane 패턴은 완만하게 둥근 형태의 모습을 볼 수 있다.

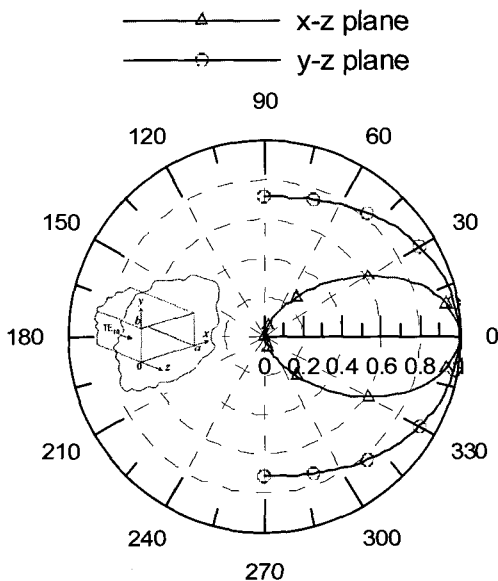


그림 5. 자유공간에서의 방사패턴  
( $a=2.25b, \lambda_0 = a/0.7$ )  
Fig. 5. Radiation pattern in free space.

### V. 결 론

본 논문에서는 구형 도파관의 종단 개구 주위에 무한한 플랜지가 장착된 구조에 대해 기존의 논문에서 제시된 해석 방법과는 다르게 공간 영역에서 전자계 문제를

해석하고 도파관 내부의 산란 행렬을 구하는 방법을 제시하였다.

제시된 방법이 정확한지 검증하기 위해 개구면에서 산란 행렬로부터 부하 어드미던스  $Y_{L,10}$ 를 계산하여 참고논문[6]에서 제시된 계산 결과와 비교하였다. 비교한 결과로 기본 모드인  $TE_{10}$ 만 고려한 계산 결과는 일치하였지만 고차모드를 포함한 계산 결과는 약  $a/\lambda_0 = 0.8$ 부터 점차적으로 오차가 커져 일치하지 않았다. 좀더 검토하기 위해서  $TE$ 와  $TM$ 의 모드 수를 증가하면서  $S_{10,10}$ 의 수렴을 조사하였으며 안정되게 수렴하는 모습을 확인하였다. 여러 분석 결과를 검토하여 본 결과 본 논문에서 제시된 해석방법이 기존의 방법보다 더욱 정확함을 알 수 있었다.

끝으로 본 논문에서 다룬 구조는 오랜 동안 널리 알려진 문제로서 많은 풀이 방법이 제시되어 왔지만 본 논문의 해석 방법은 기존의 방법에 비하여 계산 시간 측면에서 효율적이며 보다 나은 정확도로서 해를 구할 수 있음을 확인하였다. 그리고 본 논문의 해석방법은 개방형 도파관 구조뿐만 아니라 도체판에 슬롯이 있는 구조 등의 전자계 문제를 해석하는데 유용할 것으로 사료된다.

### 참고문헌

- [1] F. E. Gardiol, "Open-ended waveguides: Principles and applications," in *Advances in Electronic and Electron Physics*, P. Hawkes Ed. New York: Academic, vol. 63, pp. 139-187, 1985.
- [2] M. H. Cohen, T. H. Crowley, and C. A. Levis, "The aperture admittance of a rectangular waveguide radiating into half-space," Antenna Lab., Ohio State Univ. Res. Foundation, Columbus, Rep. No. 339-22, Contract USAF W33-038-ac-21114, 1951.
- [3] B. N. Das, "Admittance of rectangular apertures," *J. Inst. Electron. and Telecommun. Eng. (India)*, vol. 22, pp. 133-137, Mar. 1976.
- [4] A. R. Jamieson and T. E. Rozzi, "Rigorous analysis of cross-polarization in flange-mounted rectangular waveguide radiators," *Electron. Lett.*, vol. 13, pp. 742-744, Nov. 1977.

- [5] R. J. Mailloux, "Radiation and near-field coupling between two collinear open-ended waveguides," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-17, pp. 49-55, Jan. 1969.
- [6] R. H. MacPHIE and A. I. Zaghoul, "Radiation from a rectangular waveguide with infinite flange-Exact solution by the correlation matrix method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-28, pp. 497-503, July 1980.
- [7] V. Teodoridis, T. Sphicopoulos, and F. Gardiol, "The reflection in open-ended rectangular waveguides," *Mikrowellen magazine*, vol. 11, no. 3, pp. 234-238, 1985.
- [8] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, New York: McGraw-Hill, 1951.

저자소개

고 지 환(Ji-Whan Ko)



1982년 경북대학교 공과대학  
전자공학과 공학사  
1985년 경북대학교 대학원  
전자공학과 공학석사  
1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사  
1985년~2000년 한국전자통신연구원 연구원  
2000년~현재 금오공과대학교 전자공학부 교수  
※ 관심분야: 안테나 설계, 초고주파 도파관 및 부품 설계,  
전자파 산란, 위성통신

조 영 기(Young-Ki Cho)



1978년 서울대학교 전자공학과  
공학사  
1981년 한국과학기술원 전기 및  
전자공학과 공학석사  
1998년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과  
공학박사  
1981년~현재 경북대학교 전자전기공학부 교수  
1992년~현재 국제전파연합(URSI) 한국대표  
2000년~현재 한국전자파학회 학술이사  
2002년~현재 경북대학교 공과대학BK사업단장  
※ 관심분야: 전자기 산란 및 복사, 주기구조, 안테나  
이론