Communications of the Korean Statistical Society Vol. 15, No. 2, 2008, pp. 235–244

균형배열에 의해 설계되는 2-수준 Resolution-V 실험법의 직교성 평가측도†

김상익[1)]

요 약

실험계획의 요인배치법에서 부분실험을 설계할 때, 직교배열을 이용한 실험설계방법이 널리 사용된다. 그러나 부분실험의 해상도(resolution)가 큰 경우, 직교배열을 일반화한 균형배열이 효과적으로 사용될 수 있다. 특히 2-수준 요인실험법에서는 강도(strength)가 4인 균형배열은 resolution-V인 부분실험법과 동일하다는 것이 알려져 있다. 본 연구에서는 강도(strength)가 4인 균형배열의 직교성을 평가하는 측도를 제시하고자 한다. 그리고 본 연구에서 제시된 평가측도를 응용하여 실험횟수가 가장 적고 직교성에 가까운 최소 균형 resolution-V 부분실험법의 설계방법을 제시하고자 한다.

주요용어: 직교배열; 균형배열; 부분실험법; 해상도.

1. 서론

요인배치법(factorial design)에서 부분실험법을 설계하는 방법으로는 Rao (1947)에 의해 제시된 직교배열을 응용하는 방법이 널리 사용되며, 직교배열을 사용하여 설계된 부분실험법에서는 분석 가능한 효과들에 대한 추정량들이 확률적으로 독립성을 갖는 것과 같은 많은 바람직한 통계적 성질이 있는 것이 알려져 있다. 따라서 부분실험법을 설계하는 경우, 직교배열에 가까운 부분실험법이 보다 효율적인 실험법으로서 선호되고 있다.

그리고 Box와 Hunter (1961)는 부분실험법을 분류하는 방법으로 해상도(resolution)의 개념을 도입하여, k가 $R/2$보다 작은 최대의 정수값인 경우 주효과 및 k-인자 교호작용까지 분석 가능한 부분실험법을 resolution-R 실험법이라고 정의하였다. 따라서 모든 교호작용이 무시되고 주효과만 분석이 가능한 부분실험법은 resolution-Ⅲ실험법이 된다. 특히 직교배열을 이용하여 설계하는 경우, 해상도 값이 증가함에 따라 실험의 크기는 현실적으로 수용이 불가능할 정도로 커지게 되며, 실험설계가 불가능한 경우도 발생한다. 따라서 Taguchi (1986) 실험법에서와 같이 직교배열을 이용하는 경우에는 해상도 값이 가장 작은 resolution-Ⅲ 부분실험법이 주로 사용된다.

† 이 논문은 2007학년도 건국대학교 지원에 의하여 연구되었음.

1) (143-701) 서울시 광진구 화양동 1번지, 건국대학교 상경대학 응용통계학과, 교수.
E-mail: sikim@konkuk.ac.kr

이와 같이 해상도 값이 증가함에 따라 발생하는 직교배열의 단점을 해결하는 방법으로 Chakravarti (1956)는 직교배열을 일반화한 균형배열(balanced array)을 사용할 것을 제안하였다. 그리고 Srivastava (1965), Srivastava와 Chopra (1971)는 모든 인자가 두개의 수준을 갖는 2-수준 요인실험법에서 균형배열을 이용하여 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석이 가능한 resolution-V실험법을 설계하는 방법과 설계된 부분실험법의 통계적 성질을 연구하였다. 특히 Kim (1992)은 이러한 연구 결과를 바탕으로 2-수준계 요인실험법에서 실험의 크기가 최소가 되는 resolution-V 포화부분실험법을 균형배열을 이용하여 설계하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 균형배열을 이용하여 설계되는 2-수준 resolution-V요인 실험법이 직교배열을 이용하여 설계되는 실험법과 얼마나 유사한지를 평가하는 직교성(orthogonality)의 측도를 제시하고, Kim (1992)이 제시한 resolution-V 포화부분실험법의 직교성을 평가하여 최소의 실험횟수를 가지고 주효과 및 2-인자 교호작용까지 분석가능하면서 직교성에 가까운 효율적인 부분실험의 설계 방법을 규명하고자 한다.

2. 직교배열과 균형배열을 이용한 부분실험법

행(row)의 수가 n이고 열의 수가 t인 $(n \times t)$행렬 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in (0, 1, 2, \ldots, s-1)$의 임의의 $(n \times d)$부분행렬(submatrix)에서 s^d개의 가능한 모든 $(1 \times d)$행(row)들이 λ회 만큼 동일하게 나타나는 경우, A를 강도(strength)가 d인 직교배열이라고 한다. 이러한 직교배열을 이용하여 부분실험법을 설계하는 방법은 Rao (1947)가 처음 제시한 이후 최근까지 많은 연구가 진행되고 있다. 특히 인자의 수가 t이고 각 인자가 s개의 동일한 수준을 갖는 s^t 요인실험인 경우, 직교배열에서 각 행이 수준조합을 나타낸다고 할 때 강도가 d인 직교배열은 해상도가 $(d+1)$인 부분실험법이 된다는 것이 입증되어있다. 그리고 직교배열에 의해 설계된 부분실험법에서는 모든 추정량들은 확률적으로 독립이 되며, 같은 실험크기를 갖는 부분실험법들 중에서 A-최적성, D-최적성 그리고 E-최적성을 만족하게 된다 (Raktoe 등, 1981).

그러나 인자의 수인 t와 수준 수인 s뿐만 아니라 강도인 d가 커짐에 따라 직교배열에서 실험의 크기 n은 급격하게 증가하게 될 뿐만 아니라 어떤 경우에는 직교배열이 존재하지 않게 된다. 따라서 직교배열을 이용하여 부분실험을 설계하는 경우, 강도가 2인 직교배열 사용하여 설계되는 resolution-III 부분실험법이 많이 사용하게 된다. 그러나 resolution-III 부분실험법에서는 주효과만 분석 가능하게 되어 일부의 교호작용이 유의한 경우에는 효율적인 실험방법이 되지 못한다. 이러한 직교배열의 단점을 극복하는 방법으로 Chakravarti (1956)는 직교배열을 일반화한 다음과 같은 균형배열(balanced array, 혹은 partially balanced array 라고도 함)을 이용하여 부분실험법을 설계하는 방법을 제시하였다.

$(n \times t)$행렬 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in (0, 1, 2, \ldots, s-1)$의 모든 $(n \times d)$부분행렬에서 행백터 $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$가 $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_d)$회 출현하고 $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_d)$값이 $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$의 모든 순열(permutation)에 대해 동일할 때 A를 강도가 d인 균형배열이라 하며 $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_d)$값을 배열의 지수(index number)라 한다. 따라서 균형배열의 지수인 $\pi(a_1, a_2, \ldots,$

a_d)값들이 동일하면 균형배열은 직교배열이 됨을 알 수 있다. 그리고 모든 인자의 수준 수가 $s = 2$인 2-수준 실험에서는 a_i값은 0혹은 1이 되므로 균형배열의 지수는 $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_d) = \pi_w$, $w = \sum_{j=1}^{d} a_j$로 나타낼 수 있다. 또한 w는 $0, 1, 2, \ldots, d$의 값을 가질 수 있고, 지수들의 집합인 $\underline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d)$를 지수 집합(index set)이라 한다.

Srivastava (1965)는 2-수준 실험인 경우 강도가 $d = 4$인 균형배열은 주효과를 비롯한 2-인자 교호작용까지 분석이 가능한 resolution-V 부분실험법이 됨을 보였다. 특히 Srivastava (1965)는 강도가 4인 균형배열에 의해 설계되는 resolution-V 부분실험법의 선형모형에서 전체 평균을 μ, 주효과를 F_i, 그리고 2-인자 교호작용 효과를 F_{ij}라 할 때, 각 효과의 추정량들의 분산 및 공분산 값들은 다음과 같은 10개의 그룹으로 분류될 수 있고, 각 그룹 내에서는 동일한 값이 됨을 증명하였으며 이러한 실험법을 균형계획법(balanced design)이라고 정의하였다.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(\hat{\mu}), \quad \mathrm{Var}(\hat{F}_i), \quad \mathrm{Cov}(\hat{\mu}, \hat{F}_i), \quad \mathrm{Var}(\hat{F}_{ij}), \quad \mathrm{Cov}(\hat{\mu}, \hat{F}_{ij}) \quad \mathrm{Cov}(\hat{F}_i, \hat{F}_j),\\
&\mathrm{Cov}(\hat{F}_i, \hat{F}_{ij}), \quad \mathrm{Cov}(\hat{F}_i, \hat{F}_{jk}), \quad \mathrm{Cov}(\hat{F}_{ij}, \hat{F}_{jk}), \quad \mathrm{Cov}(\hat{F}_{ij}, \hat{F}_{kl}),\\
&\text{단, } i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, \ldots, t. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

따라서 균형계획에서는 주효과 추정량들의 분산은 모두 동일하고, 2-인자 교호작용효과들의 추정량들의 분산도 동일하게 된다 (그러나 $\mathrm{Var}(\hat{F}_i)$과 $\mathrm{Var}(\hat{F}_{ij})$값은 다를 수 있다). 그리고 직교배열에 의해 설계되는 resolution-V 부분실험법에서는 추정량들의 공분산 값은 모두 0이 되므로 추정량의 분산 및 공분산들은 $\mathrm{Var}(\hat{\mu})$, $\mathrm{Var}(\hat{F}_i)$와 $\mathrm{Var}(\hat{F}_{ij})$ 세 개의 그룹으로 분류된다. 이와 같이 균형배열은 직교배열을 일반화한 배열이므로 균형배열을 이용하여 부분실험을 설계하는 경우, 설계된 실험법의 직교성을 평가하는 측도를 개발하여 보다 직교배열에 가까운 부분실험법을 설계할 필요가 있게 된다.

3. 균형배열의 직교성 평가 측도

배열 A의 직교성을 평가하는 방법으로 Ma 등 (2000)은 강도가 2인 직교배열과의 유사성을 평가하는 측도를 제시하여 강도가 2인 직교배열에 가까운 근사직교배열(near orthogonal array)를 설계하는 방법을 개발하였다. 본 연구에서는 2-수준 실험인 경우 강도가 4인 균형배열은 resolution-V 균형실험법이 되므로 Ma 등 (2000)이 제시한 측도를 일반화 하여 강도가 4인 균형배열의 직교성을 평가하는 측도 $D_1(A)$ 다음과 같이 제시하고자 한다.

$$f_{\phi_1}(\underline{u_i}, \underline{u_j}, \underline{u_k}, \underline{u_l}) = \frac{1}{16} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \sum_{a_3} \sum_{a_4} \phi_1 \left(\left| N_{\underline{u_i}, \underline{u_j}, \underline{u_k}, \underline{u_l}}(a_1, a_2, a_3, a_4) - \frac{n}{16} \right| \right),$$

$$D_1(A) = \frac{1}{\binom{t}{4}} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \sum_{l} \theta_1 \left(f_{\phi_1}(\underline{u_i}, \underline{u_j}, \underline{u_k}, \underline{u_l}) \right), \qquad (3.1)$$

단, $a_i = 0, 1$이고, $1 \le i < j < k < l \le t$이다. 그리고 $\phi_1(\cdot)$와 $\theta_1(\cdot)$는 $[0, \infty)$에서 정의되는 단조증가함수이고 $\phi_1(0) = \theta_1(0) = 0$이며, $N_{\underline{u_i},\underline{u_j},\underline{u_k},\underline{u_l}}(a_1, a_2, a_3, a_4)$는 배열 A에서 임의의 4개의 열인 $(\underline{u_i},\underline{u_j},\underline{u_k},\underline{u_l})$들로 이루어진 부분행렬에서 행백터 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수이고 $n/16$은 직교배열인 경우 부분행렬에서 (a_1, a_2, a_3, a_4)들의 평균개수를 의미한다.

따라서 $D_1(A)$의 값이 0에 가까울수록 배열 A는 직교배열에 가까운 것으로 판단할 수 있다. 그리고 배열 A의 각 열에서 수준 a_i값들이 동일한 빈도로 출현하는 경우 Fang와 Hickernell (1995)은 일양계획(uniform design) 혹은 U-형 계획(U-type design)이라고 정의하였다. 따라서 직교배열은 U-형 계획은 되지만 그 반대는 항상 성립하지는 않는다. 그리고 배열의 직교성을 평가하는 경우 Jang (2002)은 부가적으로 배열 A가 U-형 계획에 부합되는지를 평가할 것을 제안하였으며 강도가 4인 균형배열의 U-형 계획에 부합 정도를 평가하는 측도로 본 논문에서는 다음과 같은 $D_2(A)$를 제시하고자 한다.

$$
\begin{aligned}
f_{\phi_2}(\underline{u_i}) &= \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{1}\phi_2\left(\left|N_{\underline{u_i}}(a) - \frac{n}{2}\right|\right), \\
D_2(A) &= \frac{1}{t}\sum_{i}^{t}\theta_2\left(f_{\phi_2}(\underline{u_i})\right),
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

여기서 $\phi_2(\cdot)$와 $\theta_2(\cdot)$는 $[0,\infty)$에서 정의되는 단조증가함수이고 $\phi_1(0) = \theta_1(0) = 0$이며, $N_{\underline{u_i}}(a)$는 임의의 열 $\underline{u_i}$에서 수준 a의 출현 개수이고 $n/2$은 U-형 계획인 경우 각 열에서 각 수준값의 평균 개수이다.

따라서 $D_2(A)$값이 0에 가까울수록 배열 A는 U-형 계획에 유사한 것으로 판단할 수 있다. 그리고 직교성과 U-형 계획과의 유사성을 평가하는 종합적으로 평가할 수 있는 측도로서 $D_1(A)$와 $D_2(A)$를 결합하여 다음과 같은 측도 $D_3(A)$를 정의할 수 있다.

$$
D_3(A) = \frac{1}{1 + D_1(A) + D_2(A)}. \tag{3.3}
$$

그리고 A가 강도가 4인 균형배열이고 지수집합이 $\underline{\pi} = \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_4\}$이고 $w = \sum_{j=1}^{4} a_j$경우, 균형배열의 지수들의 정의에 의해 $w = 0$인 (a_1, a_2, a_3, a_4)행 의 개수는 π_0, $w = 1$인 행의 개수는 π_1회 등과 같이 된다. 따라서 식 (3.1)의 $N_{\underline{u_i},\underline{u_j},\underline{u_k},\underline{u_l}}(a_1, a_2, a_3, a_4)$는 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
&N_{\underline{u_i},\underline{u_j},\underline{u_k},\underline{u_l}}(a_1, a_2, a_3, a_4) \\
&= \pi_0 I_{(0)}(w) + \pi_1 I_{(1)}(w) + \pi_2 I_{(2)}(w) + \pi_3 I_{(3)}(w) + \pi_4 I_{(4)}(w).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

여기서 $I_{(b)}(c) = \begin{cases} 1, & c = b, \\ 0, & c \neq b \end{cases}$ 인 지시함수(indicator function)이고 $w = \sum_{j=1}^{4} a_j$이다. 그리고 강도가 4인 균형배열의 구조에 의해 임의의 4개의 열로 이루어진 부분행렬에서 (a_1, a_2, a_3, a_4)인 행의 개수는 w값이 같은 경우에는 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 모든 순열에서 같게 되며, 4개의 원소 a_i중에서 w개의 a_i가 1인 경우의 수와 같게 된다. 따라서 $(n \times 4)$부분행렬에서 $w = 0$인 행의 개수는 $\binom{4}{0} = 1$, $w = 1$인 행의 개수는 $\binom{4}{1} = 4$, $w = 2$인 경우에

는 $\binom{4}{2}=6$, $w=3$인 경우에는 $\binom{4}{3}=4$, $w=4$인 경우에는 $\binom{4}{4}=1$이 된다. 그리고 이러한 행의 개수는 임의의 $\underline{u}_i$, $\underline{u}_j$, $\underline{u}_k$, $\underline{u}_l$로 이루어지는 모든 $(n\times 4)$부분행렬에서 동일하게 된다. 따라서 식 (3.1)에서 $\phi_2(\cdot)$와 $\theta_2(\cdot)$의 함수형태를 Jang (2002)과 같이 $\phi_1(x)=\theta_1(x)=x$를 사용하는 경우, 강도가 4인 균형배열 A의 직교성 평가척도 $D_1(A)$는 다음과 같이 된다.

$$D_1(A)=\frac{1}{16}\left(\left|\pi_0-\frac{n}{16}\right|+4\left|\pi_1-\frac{n}{16}\right|+6\left|\pi_2-\frac{n}{16}\right|+4\left|\pi_3-\frac{n}{16}\right|+\left|\pi_4-\frac{n}{16}\right|\right). \quad (3.5)$$

또한 식 (3.2)의 $N_{\underline{u}_i}(a)$는 강도가 4인 균형배열에의 구조에 의해 모든 열 $\underline{u}_i$에서 다음과 같이 동일하게 된다.

$$N_{\underline{u}_i}(a)=\begin{cases}\pi_0+3\pi_1+3\pi_2+\pi_3, & a=0,\\ \pi_1+3\pi_2+3\pi_3+\pi_4, & a=1.\end{cases} \quad (3.6)$$

따라서 식 (3.2)에서도 $\phi_2(x)=\theta_2(x)=x$의 함수형태를 사용하는 경우 $D_2(A)$는 다음과 같이 된다.

$$D_2(A)=\frac{1}{2}\left(\left|\pi_0+3\pi_1+3\pi_2+\pi_3-\frac{n}{2}\right|+\left|\pi_1+3\pi_2+3\pi_3+\pi_4-\frac{n}{2}\right|\right) \quad (3.7)$$

4. Resolution-V 포화 균형실험법의 직교성 평가

Kim (1992)은 2-수준 요인실험에서 인자의 수가 t인 경우, 다음의 식 (4.1)을 만족하는 $(a_1,a_2,\ldots,a_t)$를 행으로 하는 $(n\times t)$행렬은 강도가 4인 균형배열이 됨을 보였으며, 따라서 $(a_1,a_2,\ldots,a_t)$을 수준조합으로 하는 계획은 resolution-V 균형실험법이 된다.

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_t=b_1\\ a_1+a_2+\cdots+a_t=b_2\\ a_1+a_2+\cdots+a_t=b_3,\end{cases}$$

$$\text{단, } a_i\in\{0,1\},\ \ i=1,2,\ldots,t,\ b_1\in\{0,t\},\ b_2\in\{1,t-1\},\ b_3\in\{2,t-2\} \quad (4.1)$$

식 (4.1)에서 처음 방정식을 만족하는 수준조합 $(a_1,a_2,\ldots,a_t)$은 1개이고, 두 번째 방정식을 만족하는 처리조합의 수는 t개, 그리고 세 번째 방정식을 만족하는 처리조합의 수는 $\binom{t}{2}=t(t-1)/2$개이므로 실험크기는 $n=1+t+t(t-1)/2$가 되고 resolution-V 부분실험법의 선형모형에서 효과에 대한 모수들의 개수와 같게 되므로 실험의 크기가 최소가 되는 포화실험법이 된다. 그리고 b_i값의 조합에 따라 식 (4.1)과 같은 연립방정식이 8개가 가능하므로 설계 가능한 부분실험법의 수도 8개가 된다. 예를 들어 인자의 수가 $t=5$인 경우, (b_1,b_2,b_3)가 $(0,1,2),(t,t-1,t-2),(t,1,t-2)$인 경우의 세 가지 부분실험은 표 4.1과 같이 설계될 수 있다.

그리고 식 (4.1)에 의해 설계되는 균형배열에서 임의의 $(n\times 4)$부분행렬에서 원소(수준)들의 합이 q가 되는 행(수준조합)의 개수 r_q는 다음과 같이 되고,

$$r_q=\binom{4}{q}\sum_{j=1}^{3}\binom{t-4}{b_j-q},\quad b_j\geq 4,\ q=0,1,\ldots,4. \quad (4.2)$$

표 4.1: 2^5 resolution-V 포화균형실험법의 예

(b_1,b_1,b_1)	(0, 1, 2)	(t, $t-1$, $t-2$)	(t, 1, $t-2$)
수준조합	(0,0,0,0,0)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
	(1,0,0,0,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,0)
	(0,1,0,0,0)	(1,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)
	(0,0,1,0,0)	(1,1,0,1,1)	(0,0,1,0,0)
	(0,0,0,1,0)	(1,1,1,0,1)	(0,0,0,1,0)
	(0,0,0,0,1)	(1,1,1,1,0)	(0,0,0,0,1)
	(1,1,0,0,0)	(0,0,1,1,1)	(0,0,1,1,1)
	(1,0,1,0,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,0,1,1)
	(1,0,0,1,0)	(0,1,1,0,1)	(0,1,1,0,1)
	(1,0,0,0,1)	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,0)
	(0,1,1,0,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,0,1,1)
	(0,1,0,1,0)	(1,0,1,0,1)	(1,0,1,0,1)
	(0,1,0,0,1)	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,0)
	(0,0,1,1,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,0,1)
	(0,0,1,0,1)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)
	(0,0,0,1,1)	(1,1,1,0,0)	(1,1,1,0,0)
지수집합 $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$	(2,2,1,0,0)	(0,0,1,2,2)	(1,1,1,1,1)

따라서 균형배열의 inex number들은 다음과 같이 된다.

$$\pi_q = \frac{r_q}{\binom{4}{q}} = \sum_{j=1}^{3} \binom{t-4}{b_j - q}, \quad q = 0, 1, \ldots, 4. \tag{4.3}$$

그리고 식 (4.1)에서 $(b_1, b_2, b_3) = (0, 1, 2)$로 설계되는 균형배열에서 원소 수준)값들을 반대로 변환하면 (0수준은 1, 1수준은 0으로), $(b_1, b_2, b_3) = (t, t-1, t-2)$로 설계되는 균형배열이 된다. 일반적으로 (b_1^1, b_2^1, b_3^1)과 (b_1^2, b_2^2, b_3^2)로 설계되는 두 부분실험법 간에 $b_i^1 + b_i^2 = t$, $i = 1, 2, 3$의 관계가 있을 때 두 부분실험법 간에는 수준들이 반대가 되는 쌍대실험(dual design)이 된다. 따라서 식 (4.1)으로 설계되는 8개의 부분실험법은 (b_1, b_2, b_3)의 값에 따라 다음과 같은 4개의 쌍대실험군으로 분류될 수 있다.

$$\begin{cases} (0,1,t-2) \\ (t,t-1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} (t,1,t-2) \\ (0,t-1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} (t,1,2) \\ (0,t-1,t-2) \end{cases} \quad \begin{cases} (0,1,2) \\ (t,t-1,t-2) \end{cases} \tag{4.4}$$

그리고 균형배열의 구조에 의해 두 개의 쌍대실험들의 지수들 사이에는 $\pi_i^1 = \pi_{4-i}^2$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$의 관계가 있게 된다. 예를 들어 표 4.1에서 보는 바와 같이 첫 번째와 두 번째 부분실험법은 식 (4.4)의 네 번째 군에 해당하는 쌍대실험군에 해당된다. 이렇게 4개의 군으로 분류되는 8개의 resolution-V 포화균형실험법의 직교성을 인자의 수가 $4 \le t \le 10$인 경우, 식 (4.4)의 쌍대실험군 순서대로 식 (3.5)의 측도 $D_1(A)$와 식 (3.7)의 측도 $D_2(A)$에 그리고 식 (3.3)의 $D_3(A)$의해 평가한 결과는 표 4.2와 같으며, 같은 쌍대실험군에 속하는

표 4.2: Resolution-V 포화균형실험법의 직교성 평가결과

구분		첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째
t	측도	쌍대실험 군	쌍대실험 군	쌍대실험 군	쌍대실험 군
4	π	(1,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)	(0,1,1,0,1)	(0,1,1,0,1)
	$D_1(A)$	0.4297	0.4297	0.4297	0.4297
	$D_2(A)$	1.5	1.5	0.5	0.5
	$D_3(A)$	0.3413	0.3413	0.5182	0.5182
5	π	(2,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)	(1,2,1,0,1)	(2,1,1,1,0)
	$D_1(A)$	1.0	0	0.5	0.625
	$D_2(A)$	1.0	0	2.0	3.0
	$D_3(A)$	0.4706	1.0	0.2857	0.2162
6	π	(3,1,1,2,1)	(2,1,1,2,2)	(3,3,1,0,1)	(4,3,1,0,0)
	$D_1(A)$	0.5156	0.4688	1.0156	1.1406
	$D_2(A)$	0	1.0	4.0	5.0
	$D_3(A)$	0.6598	0.4051	0.1662	0.1400
7	π	(4,1,1,3,3)	(3,1,1,3,4)	(6,4,1,0,1)	(7,4,1,0,0)
	$D_1(A)$	1.0156	1.0156	1.6172	1.7422
	$D_2(A)$	1.5	2.5	6.5	7.5
	$D_3(A)$	0.2844	0.2215	0.1097	0.0976
8	π	(5,1,1,4,6)	(4,1,1,4,7)	(10,5,1,0,1)	(11,5,1,0,0)
	$D_1(A)$	1.6406	1.6406	2.3047	2.4297
	$D_2(A)$	3.5	4.5	9.5	10.5
	$D_3(A)$	0.1629	0.1400	0.0781	0.0718
9	π	(6,1,1,5,10)	(5,1,1,5,11)	(15,0,1,0,1)	(16,6,1,0,0)
	$D_1(A)$	2.3438	2.3438	3.0781	3.2031
	$D_2(A)$	6.0	7.0	13.0	14.0
	$D_3(A)$	0.1070	0.0967	0.0586	0.0549
10	π	(7,1,1,6,15)	(6,1,1,6,16)	(21,7,1,0,1)	(22,7,1,0,0)
	$D_1(A)$	3.125	3.125	3.9357	4.0625
	$D_2(A)$	9.0	10.0	17.0	18.0
	$D_3(A)$	0.0762	0.0708	0.0456	0.0437

(참고: π 는 각 군에서 첫 번째 부분실험법의 index set임.)

두개의 부분실험법 간에는 지수들의 관계와 측도들의 성질에 의해 측도 값들은 동일하게 된다.

표 4.2에서 보는 바와 같이 직교성 측도인 $D_1(A)$의 값은 두 번째 군에서 가장 작은 것을 알 수 있으며, 두 번째 군에 속하는 두 개의 부분실험법이 직교성에 가까운 근사직교배열이 된다. 특히 인자의 수가 $t=5$인 경우에는 두 번째 군은 직교배열이 되며 표 4.1에 예시된 세 번째 부분실험법에 해당한다. 그리고 첫 번째 군에서도 $D_1(A)$값은 두 번째 군의 값과 비교해 볼 때, $t=5,6$인 경우만 상이하고 다른 경우에는 같으므로, 첫 번째 군에 속하는 부분실험법도 비교적 직교성에 가까운 계획이 됨을 알 수 있다. 특히 $t=4$인 경우에는 $D_1(A)$값이 모든 군에서 동일함을 알 수 있다.

그리고 U-형 계획과의 근사성을 평가하는 측도인 $D_2(A)$값을 살펴보면 $t \le 5$인 경우에는 두 번째 군에서 가장 작지만 $t \ge 6$인 경우에는 첫 번째 군에서 가장 작게 된다. 따라서 인자의 수가 증가함에 따라 첫 번째 군에 속하는 부분실험법이 U-형 계획에 가까운 실험법이 됨을 알 수 있으며 두 번째 군도 비교적 U-형 계획에 가까운 실험법이 된다.

전반적으로 볼 때, 두 번째 군에 속하는 부분실험법이 직교성과 U-형 계획의 관점에서 가장 효율적인 실험법으로서, U-형 계획에 가까운 근사직교 계획이라고 할 수 있다. 그리고 첫 번째 군도 직교성과 U-형 계획의 관점에서 볼 때, 비교적 효율적인 계획이라고 할 수 있다. 반면 네 번째 군에 속하는 부분실험법은 모든 측도의 관점에서 가장 비효율적인 설계방법이 된다. 따라서 모든 인자가 두개의 수준을 갖고, 인자의 수가 결정되어지면, 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석가능하고 직교배열과 U-형 계획에 근사한 resolution-V 포화균형실험법을 설계할 수 있게 된다.

5. 결론

실험계획의 부분실험법을 설계할 때 일반적으로 고려하여할 사항은 해상도의 정도와 실험의 크기인 수준조합의 수, 그리고 통계적 최적성이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 2-수순 요인 실험에서 직교배열을 일반화한 균형배열에 의해 설계되는 부분실험법의 통계적 최적성를 평가하는 방법으로 직교성의 측도와 U-형 계획에 근사 정도를 평가하는 측도를 제시하였다. 그리고 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석이 가능하고 실험의 크기가 최소가 되는 resolution-V 포화부분실험법을 균형배열을 이용하여 설계하는 경우에 적용하여 효율적인 부분실험법을 설계하는 방법을 고찰하였다.

특히 본 연구에서 고찰한 resolution-V 포화균형 실험법에서는 실험오차의 평가가 불가능하므로 일반적인 분산분석법을 적용할 수 없다. 이러한 포화실험법을 분석하는 방법으로는 Daniel (1959)이 제안한 정규확률그림(normal probability plot)이나 파레도(Pareto) 분석과 같은 탐색적 방법이 대안으로 사용될 수 있다. 그러나 이러한 탐색적 기법은 실험계획의 직교성이 만족되어야 적용될 수 있다. 따라서 본 연구에서 규명된 U-형 계획에 가까운 근사직교 resolution-V 포화균형 실험법은 최소의 실험크기로 2-인자 교호작용까지 분석하고자 할 때, 탐색적 기법을 사용하여 근사적인 분석이 가능하게 된다. 따라서 이러한 부분실험법은 크기가 작은 부분실험이 사용되는 Taguchi (1986) 실험법과 같은 강건설계(robust design)분야에서 널리 응용될 수 있을 것이다.

또한 본 연구에서는 같은 군에 속하는 두 개의 부분실험법은 쌍대실험법으로서 수준조합만 다를 뿐 다른 통계적 성질은 동일함을 알 수 있었다. 그리고 현실적으로 실험을 설계하여 수행할 때, 실험비용이나 실험의 난이도 등이 수준조합 간에 다른 경우가 많다. 이러한 경우에는 같은 군에 속하는 부분실험법들의 수준조합의 효율성을 평가하여 부분실험법을 선택하면, 통계적 성질은 동일하면서도 비용이나 난이도 등에서 보다 효율적인 부분실험을 설계할 수 있을 것이다.

참고문헌

Box, G. E. P. and Hunter, J. S. (1961). The 2^{k-p} fractional factorial designs part Ⅰ. *Technometrics*, **3**, 311–351.

Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replications in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhya*, **17**, 143–164.

Daniel, C. (1959). Use of half-normal plots in interpreting factorial 2-level experiments. *Technometrics*, **1**, 311–342.

Fang, K. T. and Hickernell, F. J. (1995). The uniform design and its applications. *Bulletin of the International Statistical Institute* 50^{th} *Session* *I*, 339–349

Jang, D. H. (2002). Measures for evaluating non-orthogonality of experimental designs. *Communications in Statistics Theory and Methods*, **31**, 249–260.

Kim, S. I. (1992). Minimal balanced 2^t fractional factorial designs of resolution-V and Taguchi method. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **5**, 19–28.

Ma, C., Fang, K. and Liski, E. (2000). A new approach in constructing orthogonal and nearly orthogonal arrays. *Metrika*, **50**, 255–268.

Raktoe, B. L., Hedayat, A. and Federer, W. T. (1981). *Factorial Designs.* John Wiley & Sons, New York.

Rao, C. R. (1947). Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **9**, 128–140.

Srivastava, J. N.(1965). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. *S.N. Roy Memorial Volume*, University of North Carolina and Indian Statistical Institute.

Srivastava, J. N. and Chopra, D. V.(1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution-V, with Applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 722–734.

Taguchi, G. (1986). *Introduction to Quality Engineering.* Asian Productivity Organization, Tokyo.

[2007년 10월 접수, 2007년 12월 채택]

Evaluation of the Degree of the Orthogonality of 2-level Resolution-V Designs Constructed by Balanced Arrays†

Sang Ik Kim1)

Abstract

Balanced arrays which are generalized orthogonal arrays, introduced by Chakravarti (1956) can be used to construct the fractional factorial designs. Especially for 2-level factorials, balanced arrays with strength 4 are identical to the resolution-V fractional designs. In this paper criteria for evaluation the degree of the orthogonality of balanced arrays of 2-levels with strength 4 are developed and some application methods of the suggested criteria are discussed. As a result, in this paper, we introduce the constructing methods of near orthogonal saturated balanced resolution-V fractional 2-level factorial designs.

Keywords: Orthogonal arrays; balanced arrays; fractional designs; resolution.

† This research was supported by the Konkuk University in 2007.

1) Professor, Dept. of Applied Statistics, Konkuk University, 1 Hwayang-Dong, Kwangjin-Gu, Seoul 143-701, Korea. E-mail: sikim@konkuk.ac.kr