한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 169 - 182

칠교판(七巧板)의 기하학적 특징을 이용한 교육자료 개발에 대한 연구

단국대학교 교육개발인증원 심상길
skshim22@dankook.ac.kr
이천교육청 조정길
mathami@hanmail.net

칠교판을 관찰하고 사용하는 경험을 통해 칠교판 조각들 사이의 길이, 각도, 모양, 넓이 등과 같은 기학학적인 특성을 파악하고, 이를 이용하여 칠교판을 활용한 활동에서 조각들을 유의미하게 분류하고, 조각의 사용에 대한 조합 등을 구하여 체계적으로 문제를 해결할 수 있다. 이러한 과정을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 구체적인 발문 형태의 문제로 제공함으로써 칠교판을 학교수학에서 효율적으로 활용하기 위한 기초 자료로 제시할 수 있다. 이는 수학자가 새로운 정리를 발견하듯이, 소박하고 직관적인 상태에서 도형들의 특징을 파악하고, 학생들 수준에 맞는 활동을 통해 도형과 도형 사이의 관계를 유추하여 주어진 문제의 해답을 시행착오에 의존하는 것이 아니라 논리적으로 추론하여 체계적으로 해답을 찾는 경험을 제공하는 과학적인 지도 방법이다.

주제어: 칠교판, 기하학적 특징, 교육자료 개발.

0. 서론

수학사에서 절단(dissection) 또는 “분할(cuttion up)”에 대해 가장 오래된 문제 중 하나는 10세기경 페르시아의 수학자 Abul Wefa가 크기가 같은 정사각형 세 개를 9조각으로 자른 후 재조립하여 큰 정사각형 한 개를 만드는 문제이다([19, p. 11]). 정사각형의 절단에 대한 문제이외에도 Dudeney는 정삼각형을 네 조각으로 잘라 정사각형을 만드는 문제를 소개하고 있다([12]). 이와 같이 도형을 절단하여 새로운 도형을 만드는 문제는 퍼즐로도 활용되는데, 동양의 전통놀이인 칠교판(七巧板, tangram)이 19세기 경 유럽에 소개되면서 칠교판과 유사하게 다양한 도형을 절단하여 퍼즐로 만들어 사용하게 되었다([19]). 칠교판은 절단퍼즐(dissection puzzle)로서 정사각형을 7조각으로 분할하여 기하학적 도형이나 구체적 사물의 형상 등을 만드는 퍼즐을 말한다.

최근 학교수학에서는 도형에 대한 학생들의 이해를 돕고 구체적인 문제 상황에서 학생들의 수학적 추론 능력과 문제해결 능력을 향상시키기 위해 칠교판을 사용하고 있다. 제 7차 교육과정의 초등학교 수학([1], [2])에서는 칠교판을 여러 가지 삼각형과 사각형의 특징 탐구, 넓이 구하기, 주어진 도형 채우기 등에 사용하고 있고, 중학교 수학 7-나([10])에서는 칠교판을 사용하여 재미있는 모양의 평면도형을 만들 수 있어 상상력과 추리력을 기를 수 있다고 소개하고 있다. 또, 수학과 영재교육과정 시안([11])에서도 칠교판 활동을 주제별 학습 소재로 다루고 있다.

칠교판을 학교수학에서 효과적으로 활용하기 위해 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색([5]), 칠교판으로 만들 수 있는 기하학적 도형과 구체적 사물의 모양 소개([15], [16]), 칠교판을 활용한 수학적 활동 소개([17], [18]), 수학적 생각의 구체화와 수학적 추론 능력 신장을 위한 칠교판의 활용([3], [4]), 동기유발과 창의성 증진을 위한 학습 자료([8]) 등에 대한 연구도 필요하지만 칠교판을 사용하는 다양한 문제 상황에서 어떻게 문제를 해결할 것인가에 대한 구체적인 연구도 필요하다.

칠교판은 단순히 흥미와 지적 호기심을 충족시키는 용도와 수학적인 개념이나 원리를 이해하는 데 도움을 주는 용도이외에 다양한 문제 상황에서 여러 가지 해답을 찾는 수학활동으로도 사용할 수 있다. 예를 들어, 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 삼각형을 모두 찾는 활동([3], [4]), 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 볼록 다각형을 모두 찾는 활동([5]) 등이 있다. 그러나 이러한 수학활동을 해결하기 위해 단순히 시행착오만을 사용한다면, 문제에서 요구하는 모든 해를 찾기 힘들고, 수학활동이라기보다 흥미나 지적 호기심을 충족시키는 놀이 수준에 머무르기 쉽다. 따라서 이러한 수학활동을 효과적으로 활용하기 위해 교사는 학생들로 하여금 칠교판을 관찰하고 사용하는 경험을 통해 조각들의 특징을 파악하게 하고, 조각들 사이의 관계를 추론하여 유의미하게 분류하고 분석함으로써 문제에서 요구하는 해답을 찾아가는 체계적인 경험을 제공해야 한다. 이는 수학의 역사적 발달의 과정을 따라 소박하고 직관적인 상태에서 점진적인 형식화 단계를 거쳐 마지막에 연역적인 형식체계에 이르도록 지도하는 과학적인 지도 방법이고([7]), 수학자가 새로운 정리를 발견하듯이 학생들은 학생 수준에 맞는 활동을 통해 수학적 사실을 발견하게 하는 것이다. 즉, 학생들은 수학자들이 하였던 것과 마찬가지로 새로운 개념에 점진적으로 친숙해지고 그것을 다루면서 모든 직관적인 측면을 이용하여 문제를 해결하도록 지도하는 것이다. 이를 위하여 칠교판의 기하학적 특성과 수학적인 아이디어와의 연결하는 연구를 통해 학교에서 손쉽게 활용할 수 있도록 정리된 자료를 제시하는 것이 필요하다.

본 연구에서는 직관과 추론에 대해 알아보고, 이를 바탕으로 칠교판의 기하학적인 특성과 칠교판 조각들의 유의미한 분류, 그리고 칠교판을 활용한 활동에서 추론을 통해 문제를 해결하는 방법과 학생들이 이러한 과정을 경험할 수 있도록 문제를 제시하는 방법을 찾아봄으로써 칠교판을 학교수학에서 효율적으로 활용하기 위한 기초 자료와 방향을 제시하려고 한다.

1. 직관과 추론

수학사에서 직관의 힘에 의해 수학적 사실을 발견한 일화들은 쉽게 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 1부터 100까지의 자연수 합을 순식간에 해결했던 수학자 Gauss의 일화, 왕관의 순도를 알아내는 방법을 연구하다가 목욕탕에서 부력의 원리를 발견한 Archimedes의 일화 등이 대표적이다. 수학의 역사와 수학자의 수학적 사실의 발견의 과정에서 직관의 중요한 역할은 수학교육에서 학생들의 직관적 사고력의 신장에 관심을 가져야 함을 시사한다([9]). 직관은 분석적 사고를 거치지 않은 직접적인 이해나 인지를 의미한다. 교수법에서 직관이라는 말은 주로 감각기관을 통한 경험을 가리키며, 직관적 교수법이란 언어적 설명방법에 의하지 않고 실제적인 사물이나 표본, 그림 등에 대한 직접적인 관찰을 통하여 지식을 습득시키는 것을 뜻한다([7, p. 57]).

Pestalozzi는 인간성의 합자연적인 발전을 기도하기 위해 마음의 성장 순서, 곧 '심리적인 순서'에 입각하여 아동 개개인의 지력이 닿을 수 있는 직접적인 경험을 통하는 방법적 원리를 도입하고자 하였다. 아동은 활동적 본성을 갖고 있으며 직관이 인식의 기초가 된다고 보고, 그에 따라 '기초 도야의 원리', '자기 창조의 원리' 및 '내적 직관의 원리'를 교육방법의 기초로 삼고자 하였다. 아동이 직접 사물을 눈으로 보고 손으로 만지는 경험을 하면서 감각 인상을 형성하게 한 다음, 이를 내적 직관(Anschauung)에 의하여 사물의 내적 관계를 인식하여 명확한 관련이 형성되도록 해야 한다. 여기서 요구하는 것이 소위 '직관의 ABC(ABC der Anschauung)'이다. 사물에 대한 감각 인상이 내적 직관을 통하여 명확한 관념으로 변형되기 위해서는 사물을 형(形)에 의하여 분류하고 수(數)에 의하여 분류하며 마지막으로 언어(言語)에 의하여 그 속성을 깊게 규정하는 과정을 거쳐야 한다고 보고, 形 · 數 · 語의 직관을 직관의 ABC라고 부른 것이다([7]). 칠교판을 활용하는 활동에서 처음에는 칠교판을 관찰하고 손으로 만지는 경험을 통해 각 조각들의 모양에 대한 감각 인상을 형성하고, 이를 통해 형성된 직관으로 조각들을 비교하고 분류하며 칠교판 조각 사이의 관계를 인식하게 된다. 이렇게 형성된 관념은 칠교판을 사용하는 다양한 문제에서 해답을 찾는 실마리를 제공한다.

최근에 강조되고 있는 수학적인 힘은 여러 현상을 수학적으로 표현하고, 논리적으로 사고하는 합리적인 과정뿐만이 아니라, 수학학습을 발견하고 발명의 과정으로 인식하며, 수학적 지식을 발견하고 구성해 가는 과정을 경험함으로써 길러질 수 있음을 인식해야 한다. 이를 위해, 수학교육에서 직관을 중시하고 강조해야 한다([9, p. 29]).

수학을 하는 것은 추론하는 것이요, 수학에 의미를 주고 수학하는 힘의 근원이 되는 것은 추론이며, 수학교육의 주요 목적의 하나는 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 개연적 추론 능력과 함께 강력한 정당화의 논리인 연역적 추론 능력을 개발하는 것이다([6, p. 315]). NCTM의 '학교수학의 교육과정과 평가 규준'([13])에서는 학생들

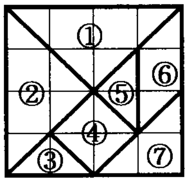
을 위한 수학 학습의 새로운 목적으로 수학적 힘(mathematical power)과 수학적 소양(mathematical literacy)의 중요성을 반영하는 5가지 목표에서 수학적 추론을 강조하면서 모든 연령의 학생들을 위한 공통 규준으로 정하고 있고, NCTM의 '학교수학의 원리와 규준'([14])에서도 모든 연령의 공통 규준으로 수학적 추론을 강조하고 있다.

추론이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유작용이다. 인간은 즉각적인 직관적 인식을 초월하여 명제로부터 명제를 이끌어 내는 간접적인 인식수단인 추론을 통해 보다 풍부한 인식을 한다. 귀납적 논리에 의하면 인간은 개별적이고 구체적인 사실들의 관찰과 실험으로부터 귀납추론에 의해 법칙을 발견하고 지식을 확장한다. 그리고 일반적 원리로부터 연역추론으로 특수한 주장을 정당화하는데, 이러한 입장에서 보면 연역적 추론에서 사용하는 일반적 원리는 경험으로부터 얻은 귀납적 추론의 결과이다([7, p. 335]).

수학적 추론에는 발견적 추론과 연역적 추론이 있다. 먼저 발견적 추론이 있은 다음에 발견된 지식을 체계적으로 정리하는 연역적 추론이 뒤따른다. 학교수학을 자세히 살펴보면 증명 곧, 연역적 추론과 함께, 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 일반적인 법칙을 이끌어내는 귀납추론과 유사성을 바탕으로 추측하는 유추에 의해 많은 내용이 전개되고 있음을 알 수 있다. 이러한 귀납적 추론은 반드시 타당한 추론이라고는 볼 수 없는 추론으로 개연적 추론이라고도 한다. 수학은 추측에 의한 발견이 있은 다음에 이를 공리적으로 체계화하는 과정에서 증명이 등장한다. 그러나 지금까지 수학을 공부할 때, 증명 과정만을 강조하고 발견적 추론 과정은 아주 소홀히 다루지 않았나 생각된다. 말하자면 수학적 사고의 반을 소홀히 했다고도 볼 수 있다([6, p. 18]). 칠교판을 사용하는 문제 상황에서 직관을 통해 형성된 관념을 바탕으로, 여러 가지 사실을 발견하고 정당화하면서 일반적인 원리를 얻는다. 이 원리는 칠교판을 사용하는 다양한 문제에 적용되고, 이러한 추론 과정을 거쳐 문제를 해결할 수 있게 된다.

2. 칠교판의 기하학적 특징

칠교판은 삼각형 5개와 사각형 2개로 모두 7개의 조각으로 구성되어 있고, 각 조각들의 특징을 직관적으로 알아보기 쉽게 하기 위해 <그림 1>과 같이 정사각형을 넓이가 같은 작은 정사각형 16개로 분할한 격자 위에 칠교판의 각 조각들을 표시하였다([3]). 또, 본 연구에서는 칠교판을 사용하는 문제에서 조각들의 이름을 부르기 편리하도록 <그림 1>과 같이 조각들의 이름을 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦번 조각으로 붙이도록 하겠다.



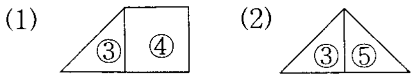
<그림 1> 칠교판의 구성과 조각 이름

칠교판을 눈으로 보고 손으로 만지는 경험을 통해 형성된 직관과 이러한 과정에서 얻을 수 있는 추론 활동을 통해 칠교판의 기하학적 특징을 살펴보면, 각 조각들 사이의 길이, 각도, 모양, 넓이에 대한 관계는 다음과 같다.

첫째, 칠교판 각 조각들의 길이 비교를 통해 조각들 사이에 길이가 같은 변과 길이의 비를 찾을 수 있다. 만약 <그림 1>에서 격자로 주어진 작은 정사각형의 한 변의 길이가 1이라 하고 피타고라스의 정리를 이용하여 각 조각들의 변의 길이를 살펴보면, ①, ②번 조각은 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, ③, ⑤번 조각은 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, ④번 조각은 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, ⑥번 조각은 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, ⑦번 조각은 $2\sqrt{2}$, 2, 2이다. 따라서 서로 다른 길이의 종류는 4, $2\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ 모두 네 가지이다.

그러나 피타고라스의 정리를 사용하지 않더라도 칠교판을 사용하는 경험을 통해 상대적인 길이를 비교할 수 있다. 예를 들어, ①번 조각의 짧은 변(빗변이 아닌 변)의 길이는 ⑦번 조각의 긴 변(빗변)의 길이와 같고 ④번 조각의 한 변의 길이의 2배와 같다. 또, ④번 조각의 한 변의 길이는 ③번 조각의 짧은 변(빗변이 아닌 변)의 길이와 같고 ⑥번 조각의 짧은 변의 길이와 같다는 등의 사실을 알 수 있다([17], [18]).

이와 같은 조각들 사이의 길이의 비는 칠교판을 사용하는 활동에서 조각들의 변과 변을 맞붙여서 모양을 만들 때 이용할 수 있다. 예를 들어, <그림 2>의 (1)과 같이 ③번 조각과 ④번 조각의 길이가 같은 변끼리 맞붙여서 사각형을 만들 수 있고, (2)와 같이 ③번 조각과 ⑤번 조각의 길이가 같은 변끼리 맞붙여서 삼각형을 만들 수 있다. 여기에서 길이를 비교하는 경험을 통해 ③번 조각과 ⑤번 조각으로 만든 삼각형은 두 변의 길이가 같으므로 이등변삼각형이 된다는 사실을 알 수 있다.



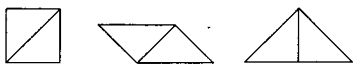
<그림 2> 길이가 같은 변을 갖는 조각으로 다각형 만들기

둘째, <그림 1>과 같은 분할을 통해 칠교판 7조각을 이루는 각 조각들의 내각의 크기를 알 수 있다. ①, ②, ③, ⑤, ⑦번 조각은 45°, 45°, 90°, ④번 조각은 90°, 90°, 90°, 90°, ⑥번 조각은 45°, 135°, 45°, 135°로 구성되어 있다. 따라서 서로 다른 내각의 크기의 종류는 45°, 90°, 135° 모두 세 가지이다([5], [16]).

이와 같은 조각들의 내각의 크기는 칠교판을 사용하는 활동에서 조각들의 변과 변을 맞붙여서 모양을 만들 때 이용할 수 있다. <그림 2>의 (1)에서 ③번 조각의 45°와 ④번 조각의 90°가 만나 135°의 내각을 구성하고, ③번 조각의 90°와 ④번 조각의 90°가 만나 평각을 이루면서 내각이 아닌 변을 구성하게 된다. 또, (2)에서 ③번 조각의 45°와 ⑤번 조각의 45°가 만나 90°의 내각을 구성하게 되어 이 삼각형은 직각삼각형이 된다. 여기에서 <그림 2>의 (2)는 두 변의 길이가 같고 한 내각의 크기가 90°이므로 직각이등변삼각형이라는 사실을 알 수 있다.

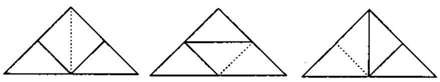
셋째, 칠교판의 7조각을 모양에 따라 살펴보면, 직각이등변삼각형 5개(①, ②, ③, ⑤, ⑦)와 정사각형 1개(④), 평행사변형 1개(⑥)로 구성되어 있다. 또, 직각이등변삼각형은 3가지의 크기가 있는데, 이를 구분하기 위해 큰 직각이등변삼각형 2개(①, ②), 중간 직각이등변삼각형 1개(⑦), 작은 직각이등변삼각형 2개(③, ⑤)로 구분한다. 따라서 칠교판의 7조각을 모양에 따라 2가지로 분류하면 삼각형과 사각형이고, 3가지로 분류하면 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형([3])이고, 5가지로 분류하면 큰 직각이등변삼각형, 중간 직각이등변삼각형, 작은 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형으로 분류할 수 있다([16]). 본 연구에서는 칠교판의 조각 중 삼각형은 모두 직각이등변삼각형이므로 간단히 삼각형이라고 부르도록 하겠다.

넷째, 칠교판의 각 조각들의 넓이 비교를 통해 칠교판 7조각의 넓이의 비를 찾을 수 있다([3], [4], [17], [18]). <그림 1>에서 격자로 주어진 작은 정사각형의 넓이를 1이라고 하면, ③번과 ⑤번 조각인 작은 삼각형의 넓이는 1이다. 넓이가 1인 작은 삼각형 2개를 사용하면 <그림 3>과 같이 넓이가 2인 조각들(정사각형, 평행사변형, 중간 삼각형)을 모두 만들 수 있다.



<그림 3> 넓이가 2인 조각 만들기

또, 큰 삼각형은 <그림 4>과 같이 넓이가 1인 작은 삼각형 2개와 넓이가 2인 조각 1개로 만들 수 있다.



<그림 4> 큰 삼각형 만들기

따라서 칠교판의 7조각들을 넓이에 따라 분류하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 칠교판의 넓이에 따른 분류

분류 방법	조각의 이름
넓이가 1인 조각	③, ⑤
넓이가 2인 조각	④, ⑥, ⑦
넓이가 4인 조각	①, ②

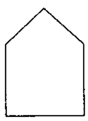
<그림 4>에서 넓이가 2인 조각들은 모두 넓이가 1인 조각들로 만들 수 있으므로 칠교판의 모든 조각들은 사실 상 넓이가 1인 작은 삼각형으로 분할할 수 있다. 따라서 칠교판 조각들 사이의 넓이의 비가 일정하게 존재하므로 다양한 모양을 만들 때, 위치를 바꾸거나 사용하는 조각을 바꾸어 여러 가지 답을 찾을 수 있다.

3. 칠교판을 사용한 추론 활동

칠교판을 활용한 활동 중 7조각을 모두 사용하는 문제는 답이 하나이거나 조각들의 자리 이동을 통해 몇 가지 답을 구할 수 있다. 또, 일부 조각을 사용하는 활동은 조각들의 선택을 다르게 하여 여러 가지 답을 구할 수 있다. 일부 조각을 사용하는 활동에서 모든 답을 찾는 방법은 사용할 조각을 선택하고, 선택한 조각들로 주어진 모양을 만들 수 있는지를 판단해야 한다. 따라서 무작정 시행착오를 통해 답을 찾는 방법은 비효율적이고, 모든 답을 찾기 매우 힘들다. 따라서 앞에서 언급 바와 같이 직관과 추론을 통해 알 수 있는 조각들의 특징들과 조각의 선택에 따른 조합을 이용한 체계적인 추론 활동을 통해 모든 해답을 찾을 수 있다.

다음은 칠교판을 사용한 활동들에서 추론을 통해 해답을 찾는 방법과 이를 이용하여 학생들에게 활용할 수 있는 학습 방안을 소개하도록 하겠다.

(문제 1) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, <그림 5>와 같은 넓이가 10인 오각형을 만드는 모든 방법을 찾으시오([3], [4], [15]). 단, 사용하는 조각이 같고 위치만 바꾼 방법은 하나로 봅니다.



<그림 5> 넓이가 10인 오각형1)

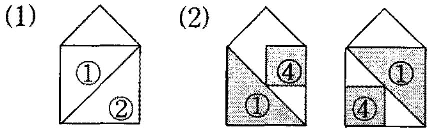
1) 그림에서 주어진 오각형은 칠교판을 그림 위에 직접 올려놓고 문제를 해결할 수 있도록 칠교판으로 만들 수 있는 실제 크기로 제공한다.

먼저, 칠교판의 기하학적 특징 상 칠교판 조각들의 내각의 크기는 45°, 90°, 135°로만 이루어져 있으므로 조각들을 변끼리 붙여 만들 수 있는 볼록다각형의 내각의 크기 역시 45°, 90°, 135°이다([5]). 따라서 주어진 볼록다각형이 내각이 예각이면 45°이고, 둔각이면 135°가 된다. <그림 5>에서 주어진 오각형의 내각의 크기는 90°, 135°, 90°, 90°, 135°이다. 또, <표 1>과 같이 칠교판은 넓이가 1인 조각 2개, 넓이가 2인 조각 3개, 넓이가 4인 조각 2개로 구성되어 있다. 따라서 넓이가 10인 도형을 만들기 위해서는 넓이가 4인 조각 2개와 넓이가 2인 조각 1개, 또는 넓이가 4인 조각 2개와 넓이가 1인 조각 2개 등을 사용하는 다양한 경우를 찾을 수 있다. 여기에서 사용가능한 조각들을 찾을 때, 넓이가 4인 조각을 사용하지 않는다면 나머지 조각들의 넓이 합은 8이므로 넓이가 10인 도형을 만들 수 없다. 따라서 반드시 넓이가 4인 조각을 1개 이상 사용해야 한다. 주어진 오각형을 만들기 위해 사용가능한 조각들의 순서쌍을 넓이에 따라 분류하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 사용가능한 조각들의 순서쌍

분류 방법	넓이에 따른 순서쌍	사용가능한 조각들의 순서쌍
넓이가 4인 조각 2개 사용	(4, 4, 2)	(①, ②, ④), (①, ②, ⑥) (①, ②, ⑦)
	(4, 4, 1, 1)	(①, ②, ③, ⑤)
넓이가 4인 조각 1개 사용	(4, 2, 2, 2)	(①, ④, ⑥, ⑦)
	(4, 2, 2, 1, 1)	(①, ④, ⑥, ③, ⑤), (①, ④, ⑦, ③, ⑤), (①, ⑥, ⑦, ③, ⑤)

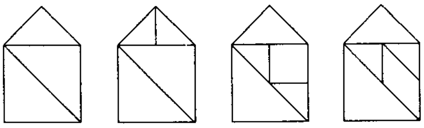
<그림 6>의 (1)과 같이 ①번과 ②번 조각을 놓으면 ④번 또는 ⑥번 조각은 사용할 수 없으므로 (①, ②, ④), (①, ②, ⑥)은 답이 되지 않는다. 또, (2)와 같이 ①번과 ④번 조각을 놓으면 ⑥번 조각을 사용할 수 없으므로 (①, ④, ⑥, ⑦), (①, ④, ⑥, ③, ⑤)은 답이 되지 않는다. 이 문제에서 조각의 특징 상 ①번과 ④번을 함께 사용하여 주어진 오각형을 만들 수 있는 방법을 <그림 6>의 (2)와 같이 놓는 방법밖에는 없다.



<그림 6> 칠교판 조각들의 위치

<그림 7>과 같이 오각형을 만드는 방법은 (①, ②, ⑦), (①, ②, ③, ⑤), (①, ④, ⑦, ③, ⑤), (①, ⑥, ⑦, ③, ⑤) 조각을 사용하는 4가지 방법이다. 여기에서 넓이가 4인 조각을 사용하는 경우 ①번과 ②번을 사용할 수 있다. 그러나 ①번과 ②번은 조각을 구분하기 위해 붙인 이름이므로 사실 두 조각은 같은 조각이다. 따라서 (문제 1)에

서 넓이가 4인 조각을 1개 사용하는 경우 (①, ④, ⑦, ③, ⑤)와 (②, ④, ⑦, ③, ⑤)는 같은 방법이므로 한 가지만 답으로 생각한다. 마찬가지로 ③번과 ⑤번을 사용하는 문제에서도 같은 방법으로 생각한다.



<그림 7> 오각형 만들기의 해답

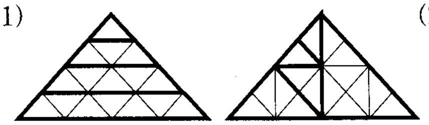
(문제 2) 칠교판을 사용하여 넓이가 서로 다른 삼각형과 정사각형을 모두 찾으면 몇 개인지 알아보시오([3], [4]).

이 문제를 해결하기 위해서 먼저 칠교판의 기하학적 특징을 생각하자. 앞에서 언급한 바와 같이, 칠교판 조각들을 변끼리 붙여 만들 수 있는 볼록다각형의 내각의 크기는 45°, 90°, 135°이고, 삼각형을 만들기 위해서는 세 개의 내각이 존재해야 하므로 만들 수 있는 삼각형의 내각의 크기는 45°, 45°, 90°이다. 따라서 칠교판 조각들을 사용하여 만들 수 있는 삼각형은 모두 직각이등변삼각형뿐이다. 또, 칠교판의 모든 조각은 작은 삼각형으로 분할이 가능하다. 다시 말하면, (문제 2)에서 찾는 서로 다른 삼각형과 정사각형을 만들면, 만든 모든 도형은 작은 삼각형으로 분할이 가능하다는 사실을 유추할 수 있다. 칠교판의 모든 조각을 작은 삼각형으로 만든다면 작은 삼각형이 모두 16개가 필요하다. 그 이유는 작은 삼각형의 넓이를 1이라고 하면 칠교판의 모든 조각의 넓이는 16이 되기 때문이다. 따라서 (문제 2)는 다음과 같이 (문제 2-1)로 바꾸어 생각할 수 있다.

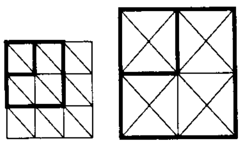
(문제 2-1) 작은 삼각형 16개의 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 넓이가 서로 다른 삼각형과 정사각형을 찾으시오.

넓이가 서로 다른 삼각형은 <그림 8>의 (1)에서 찾을 수 있는 작은 삼각형 1개, 2개, 4개, 8개, 9개, 16개로 만든 삼각형이고, 넓이가 서로 다른 정사각형은 <그림 8>의 (2)에서 찾을 수 있는 작은 삼각형 2개, 4개, 8개, 16개로 만든 정사각형이다.

(1)

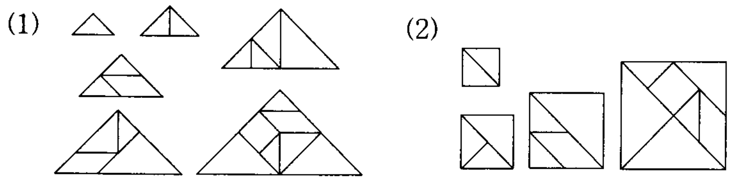


(2)



<그림 8> 작은 삼각형으로 삼각형과 정사각형 만들기

따라서 칠교판을 사용하여 넓이가 서로 다른 삼각형과 정사각형을 만들면 <그림 9>와 같다.



<그림 9> 칠교판으로 만들 수 있는 삼각형과 정사각형

칠교판의 일부 조각을 사용하는 활동에서 모든 해를 찾는 방법은 우선 칠교판 조각 중 사용 가능한 조각들의 조합을 찾는 것이다. 주어진 모양의 넓이를 계산한 후 넓이에 따른 조각들의 조합을 모두 찾고, 찾은 조합을 통해 가능한 답을 조각들의 모양의 특징을 비교하며 찾으면 된다. 또, 찾은 조합을 통해 모양을 맞출 때, <그림 6>에서 제시한 방법과 같이 큰 조각들의 위치를 먼저 잡은 후 문제를 해결하면 더 손쉽게 답을 찾을 수 있다. 또, 주어진 조건에 맞는 도형을 모두 찾는 활동에서는 <그림 3>, <그림 4>에서 제시한 바와 같이 칠교판 7조각은 모두 작은 삼각형으로 분할이 가능하므로 작은 삼각형으로 만들 수 있는 모양을 모두 찾은 후 칠교판 조각들을 사용하여 답을 찾으면 빠짐없이 모든 답을 찾을 수 있다.

앞에서 제시한 추론 과정은 일반 학생들이 혼자서 스스로 경험하기 매우 어렵고, 많은 시간과 노력이 필요하다. 따라서 이 활동들을 통해 얻고자하는 추론을 통한 문제해결 과정을 경험하지 못할 수 있다. 그렇다고 해서 이러한 문제를 사용할 수 없는 것은 아니다. 앞에서 언급한 해를 찾는 체계적인 추론 과정을 학생들이 경험할 수 있도록 학생들에게 각 과정을 구체적인 활동으로 제시하는 방법을 소개하도록 하겠다.

(활동 1) 칠교판 조각의 특징 찾기

(1) 칠교판 조각 중 정사각형의 한 변의 길이와 같은 변을 가지고 있는 조각을 찾아보시오. 또, 중간 삼각형의 빗변과 길이가 같은 변을 가지고 있는 조각을 찾아보시오.
(2) (1)과 같이 같은 변의 길이를 가지고 있는 조각들을 찾아 분류해 보시오.
(3) 칠교판 조각 중 내각의 크기가 90°인 각을 가지고 있는 조각을 찾아보시오.
(4) 칠교판 각 조각들의 내각을 구해보시오.

(활동 2) 칠교판 조각들의 넓이 비교

(1) 작은 삼각형인 ③번 조각과 ⑤번 조각을 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 모양

을 모두 만들어 보시오. 단, 조각을 붙여 모양을 만들 때, 변의 길이가 같은 변끼리 맞붙을 수 있도록 연결해야 합니다.
(2) 큰 삼각형(①번 조각)과 같은 모양을 만드는 서로 다른 방법을 모두 찾아보시오.
(3) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, 각 조각들의 넓이를 알아보시오.

(활동 3) 서로 다른 방법 찾기

(1) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, 넓이가 6인 도형을 만들려고 합니다. 사용하는 조각을 선택하는 서로 다른 방법을 모두 찾으시오.
(2) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, <그림 5>와 같이 넓이가 10인 오각형을 만드는 모든 방법을 찾으시오. 단, 사용하는 조각이 같고 위치만 바꾼 방법은 하나로 봅니다.

(활동 4) 삼각형 만들기

(1) 칠교판의 7조각 중 두 조각 또는 세 조각을 사용하여 삼각형을 만들어 보시오.
(2) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, 넓이가 2, 3, 4, 5, 6, 7인 삼각형을 만들 수 있는지 알아보시오.
(3) 작은 삼각형이 16개가 있습니다. 이 중 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 삼각형을 모두 찾아보시오.
(4) 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 넓이가 서로 다른 삼각형을 모두 찾으면 몇 개인지 알아보시오.

(활동 5) 정사각형 만들기

(1) 칠교판의 7조각 중 두 조각 또는 세 조각을 사용하여 정사각형을 만들어 보시오.
(2) 작은 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, 넓이가 2, 3, 4, 5, 6, 7인 정사각형을 만들 수 있는지 알아보시오.
(3) 작은 삼각형이 16개가 있습니다. 이 중 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 정사각형을 모두 찾아보시오.
(4) 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 넓이가 서로 다른 정사각형을 모두 찾으면 몇 개인지 알아보시오.

(활동 1)에서 (활동 5)까지의 활동은 학생들의 능력이나 활동의 목표에 따라 좀 더 자세히 구체적인 활동으로 제시하거나 중간의 몇 과정을 생략하여 그 과정을 학생 스스로 찾을 수 있도록 활동을 재조직하여 사용할 수 있다. 이러한 활동을 통해 시행착

오에 의존하여 해답을 찾는 것이 아니라 수학자가 새로운 수학적 사실을 발견하듯이 논리적으로 추론하여 체계적으로 모든 해답을 찾는 경험을 할 수 있다.

4. 결론

본 연구는 동양의 전통놀이인 칠교판의 기하학적인 특성과 칠교판 조각들의 유의미한 분류, 그리고 칠교판을 활용한 활동에서 추론을 통해 문제를 해결하는 방법과 학생들이 이러한 과정을 경험할 수 있도록 문제를 제시하는 방법을 찾아봄으로써 칠교판을 학교수학에서 효율적으로 활용하기 위한 기초 자료와 방향을 제시하는 것을 목적으로 한다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 칠교판 조각들을 관찰하고 사용하는 경험에서 얻을 수 있는 직관과 추론을 통해 칠교판의 기하학적 특징인 각 조각들 사이의 길이, 각도, 모양, 넓이에 대한 관계를 알 수 있고, 칠교판을 사용한 문제에서 그 특징을 활용할 수 있다. 예를 들어, 칠교판으로 만들 수 있는 볼록다각형의 내각의 크기는 45°, 90°, 135°뿐이고, 칠교판으로 만들 수 있는 삼각형은 모두 직각이등변삼각형이다.

둘째, 칠교판의 일부 조각을 사용하여 모든 답을 찾는 활동은 사용할 조각을 선택하고, 선택한 조각들로 주어진 모양을 만들 수 있는지를 판단해야 한다. 따라서 조각들의 특징과 분류 및 조각들의 선택에 따른 조합을 이용하면 체계적으로 모든 해답을 찾을 수 있다. 예를 들어, 문제에서 주어진 모양의 넓이를 계산한 후 넓이에 따라 사용가능한 조각들의 조합을 모두 찾고, 찾은 조합을 통해 가능한 답을 칠교판 조각들의 모양의 특징을 비교하며 찾으면 된다. 또, 찾은 조합을 통해 주어진 모양을 만들 때, 선택된 조각 중 큰 조각들의 위치를 먼저 잡은 후 문제를 해결하면 더 손쉽게 답을 찾을 수 있다.

셋째, 칠교판으로 주어진 조건에 맞는 도형을 모두 찾는 활동에서, 칠교판의 특징 중 칠교판 7조각은 모두 작은 삼각형으로 분할이 가능하다는 사실에서 유추하여 작은 삼각형 16개로 만들 수 있는 도형을 모두 찾은 후 답을 찾으면 빠짐없이 답을 찾을 수 있다.

넷째, 칠교판을 사용한 일부 활동은 일반 학생들에게 매우 어렵다. 따라서 이러한 문제를 효과적으로 활용하기 위해 문제를 해결하는 추론 과정을 참고로, 학생들의 능력이나 활동의 목표에 따라 좀 더 자세히 문제를 제시하거나 중간의 몇 과정을 생략하여 학생 스스로 그 과정을 찾을 수 있도록 활동을 재조직하여 사용할 수 있다.

이러한 과정을 통해 칠교판을 단순히 개념 이해와 흥미를 위한 놀이 용도로 사용하는 것이 아니라 수학자가 새로운 정리를 발견하듯이, 소박하고 직관적인 상태에서 도형들의 특징을 파악하고, 학생들 수준에 맞는 활동을 통해 도형과 도형 사이의 관계

를 유추해 내어 이를 이용하여 주어진 문제의 해답을 시행착오에 의존하는 것이 아니라 논리적으로 추론하여 체계적으로 해답을 찾는 경험을 제공할 수 있다.

참고 문헌

1. 교육부, 초등학교 수학 3-가, 4-나, 서울: 대한 교과서 주식회사, 2001.
2. 교육부, 초등학교 수학 5-가, 5-나, 서울: 대한 교과서 주식회사, 2002.
3. 김남희, 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화, 대한수학교육학회지 학교수학 2(2000), No. 2, 563-587.
4. 나귀수, 수학적 추론 능력 신장을 위한 탱그램 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집 18(2004), No. 2, 491-496.
5. 박교식, 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 17(2007), No. 3, 221-231.
6. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1998.
7. 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000.
8. 이강섭, 김지혜, 동기유발과 창의성 증진을 위한 칠교판의 활용 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집 18(2004), No. 2, 359-370.
9. 이대현, 수리 철학과 수학의 역사에서 직관, 한국수학사학회지 18(2005), No. 2, 23-30.
10. 전평국, 신동윤, 방승진, 황현모, 정석규, 중학교 수학 7-나, 서울: (주) 교학사, 2002.
11. 한국교육개발원; 수학과 영재교육과정 시안; 초 · 중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구, 한국교육개발원 수탁연구 CR 99-20-3(1999).
12. Gardner, M., *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, The University of Chicago Press, 1987.
13. NCTM, *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
14. NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
15. Pasternack, M. & Silvey, L., *Tangram Blocks Activities*, NY: Cuisenaire Company of America, 2000.
16. Read, R. C., *Tangrams-330 Puzzles*, NY: Dover Publications, Inc, 1965.
17. Roper, A., *Visual thinking with tangrams*. Mountain View, CA: Creative Publications, 1996.
18. Seymour, D., *Tangramath*, Mountain View, CA: Creative Publications, 1971.

19. van Delft, P. & Botermans, J., *Creative puzzles of the world*, Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1995.

A Study on Development of Instructional Materials Using Geometric Properties of Tangram

Accreditation Center for Educational Development, Dankook University **Sang Kil Shim**
Gyeongido Icheon office of education **Jeong Gil Jo**

This study has been searching for reasoning process solving the problem effectively in activities related to meaningful classification of pieces and geometric properties with tangram.

In activities using some pieces of tangram, we systematically came up with every solution in classifying properties of pieces and combining selected pieces.

It is very difficult for regular students to do this tangram. In order to solve this problem effectively, we need to show that there are activities using the idea acquired in reasoning process.

Through this process, we do not simply use tangram to understand the concept and play for interest but to use it more meaningfully. And the best solution can not be found by a process of trial and error but must be given by experience to look for it systematically and methods to reason it logically.

Key Words : tangram, geometric properties, development of instructional materials.

2000 Mathematics Subject Classification : 97U60

ZDM Subject Classification : U63

접수일 : 2008년 9월 25일 수정일 : 2008년 10월 30일 게재확정일 : 2008년 11월 13일