대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.1, 1-22. Mar. 2008

엑셀을 통한 일차함수의 활용에 대한 사례연구

이 광 상*

본 연구의 목적은 엑셀의 활용이 '일차함수의 그래프와 연립방정식의 해의 관계'를 이해하는 데 어떤 영향을 미치는가를 알아보는데 있다. 엑셀을 활용한 교수실험은 학습 능력 수준이 다른 다섯 명의 학생을 선정하여 중학교 2학년 8-가에서 다루고 있는 내용 중 일차함수의 활용을 중심으로 이루어졌다. 교수실험에서 각 학생들은 스스로 규칙을 정해 식을 만들고 표와 그래프를 나타내면서 그 변화를 상당히 흥미롭게 탐구하였다. 또한 엑셀을 통해 식과 표와 그래프를 동시에 관찰하는 것에 익숙해졌고, 귀납적인 관찰을 통해 일반적인 규칙을 발견하는 성향을 보여주었다. 엑셀환경에서 다양한 식을 표와 그래프로 나타내고, 스핀버튼을 활용해 그래프를 역동적으로 변화시키면서 탐구하는 것은 디너스(Dienes)가 주장하는 '수학적 다양성의 원리'와 부합한다고 할 수 있다. 엑셀을 활용한 탐구환경은 학생들의 일차함수 개념의 형성을 촉진하는 역할을 수행함으로써 지필환경을 보완할 수 있다는 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 서 론

Klein은 함수적 사고의 중요성은 응용을 포함하여 수학 전체를 통합하는 데 있다고 보았다. 이는 함수적 사고는 대수와 기하를 관련지어 주고 응용수학을 포함하여 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적인 핵심적 관점이라는 판단에서 비롯된 것이다(우정호, 1998). 중학교 교육과정 해설서에 의하면, 함수적 사고는 학생들이 미래 사회의 일원으로서 살아가는 데 그 소양으로 필요한 경우가 많으므로, 함수에 관한 학습은 큰 의의를 가질 뿐만 아니라, 수학의 여러 가지 분야에서 중요한 역할을 하게 됨을 강조하고 있다. 이에, 우리나라 교육과정에서는 3차 교육과정부터 6차 교육과정까지는 대응의 관점으로 7차 교육과정부터는 정비례와 반비례 현상을 중심으로 변수의 의미를 강조하면서 종속의 관점으로 함수개념을 다루고 있다(김남희 외, 2007).

중학교 8-가에서 다루고 있는 일차함수의 활용부분은 기본적으로 학생들이 함수의 식, 그래프, 표를 통합해서 다룰 수 있는 수학적인 능력을 키워줄 수 있어야 한다. 학생들은 이러한 통합적인 활동을 통해서, 그래프, 식, 표의 연결성을 이해하고 모델링할 수 있는 수학적인 힘을 신장시킬 수 있다. 그 중 일차함수의 그래프와 연립방정식과의 관계는 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$그래프의 성질을 종합적으로 활용할 수 있는 내용으로 그래프에 대한 다양한 탐구활동이 요구된다. 하지만, 교과서 중심체제인 지필환경에서는 몇 개의 예를 통해서 연립방정식의 해와 일차함수 그래프의 관계를 일반화하기 때문에 학생들이 연립방정식의 해가 두 일차함수 그래프의 교점

---

* 서산중앙고등학교(damchan@hanmail.net)

의 좌표와 일치한다는 것을 다양한 맥락으로 이해하는데 제약이 따를 수밖에 없다. 이러한 지필환경의 대안으로 NCTM(2000)의 Standards에서는 대수 영역에서 학생들이 핵심적으로 다루고 성취해야 할 목표 중 하나로 “다양한 맥락에서 변화를 분석할 수 있어야 한다.”를 제시하면서 기술공학의 적극적인 활용을 권장하고 있다. 또한, Kieran(1993)은 함수의 그래프에 대한 전통적인 학습은 과정적 접근을 강조했다는 것을 지적하면서, 다양한 표상과 연결할 수 있는 공학의 지원이 필요함을 주장하고 있다. 이러한 교육공학의 활용은 함수의 표상을 효과적으로 구현함으로써 학생들에게 함수개념에 대한 올바른 이해를 증진시킬 수 있다.

스프레드시트의 한 종류인 엑셀은 다양한 정보를 표와 그래프로 조직하고 처리하는 데 매우 효율적이기 때문에 수학적인 개념과 패턴을 발견할 수 있으며, 수학과 다른 과목을 통합하는 모델링 활동에 널리 활용되고 있다(류희찬, 2004). 또한, 엑셀은 다른 프로그램 언어와는 달리 변수에 이름을 붙이거나 선언할 필요 없이 마우스를 움직이거나 화살표 키를 누름으로써 수학적 관계를 스프레드시트 언어로 나타낼 수 있다. 따라서 학생들은 자신이 생각한 수학적 관계를 기호 언어의 복잡성에 얽매이지 않고 엑셀 화면상에 자유롭게 표현하고 테스트할 수 있다. 이런 점에서 엑셀은 전통적인 지필 환경에서는 불가능했던, 산술로부터 일반화하고 학생들의 비형식적인 산술 전략을 확장하기 위한 맥락을 제공한다(Sutherland & Rojano, 1993, 재인용).

Healy(1990)는 엑셀을 구성하는 셀에 입력되는 식들은 대수적 규칙과 밀접한 관련을 맺고 있으며, 따라서 학습자들이 그들의 경험을 대수적 맥락으로 전이시키기가 쉽다고 말하고 있다. Masalski(1990)도 스프레드시트는 계산 절차들이 화면에 그대로 나타나기 때문에 학생들이 하나의 변수를 변화시킬 때 나타나는 계산의 패턴들의 변화를 관찰하는 데 도움을 준다고 했다. 스프레드시트의 활용이 일차함수에 대한 학업성취도, 수학적 일반화(generalization)의 형성에 긍정적인 영향을 준다는 연구(Garay, 2001; Wilson et al., 2004), 수학적 모델링에 대한 연구(김지연, 2006; 손홍찬, 2006)들은 스프레드시트의 효과를 입증하고 있다. 하지만, 교과서 내용을 재구성하여 지필환경과 엑셀환경을 통합하려는 시도는 미진한 편이다.

이에 본 연구는 엑셀을 통한 일차함수의 그래프 탐구 중 학생들이 어려워하는 일차함수 활용부분에 관한 교수실험에서 학생들의 교수·학습과정을 분석하고, 지필교육과정을 보완할 수 있는 바람직한 대안을 탐색하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 엑셀과 수학교육

엑셀은 워드프로세서처럼 매우 대중적이고 보편화된 프로그램으로 PC를 갖고 있는 사람이면 거의 기본적으로 갖추고 있고, 사용자들에게 매우 친숙하며 사용법이 매우 간단하여 교사나 학생들이 사용하기 쉽다.

엑셀은 수량적 자료 처리와 그래픽 기능을 가진 통합 프로그램의 일종으로, 컴퓨터의 기억장치가 갖는 많은 자료의 보관기능, 셀에 입력된 자료의 삭제, 수정 뿐 아니라 행이나 열 전체를 삽입·삭제·수정할 수 있는 편집 기능, 그리고 셀의 자료 수정에 따른 즉각적인 재계산 기능, 자동계산 기능, 그래프(차트)기능, 데이터 관리 기능 등을 제공한다(류희찬, 2004; 장경윤, 1997).

Wilson et al.(2004)은 중학교 1학년 학생들을

대상으로 6개의 과제로 구성된 스프레드시트 기반의 교수 프로그램을 실시하였다. 실험을 통해 특정한 수에 대한 계산을 표현하던 학생들은 스프레드시트 식을 적을 수 있었다. 문자를 대상의 약어로 받아들이던 학생들은 스프레드시트에서 사용된 셀 참조가 식을 아래로 복사하기 위해 사용된다는 것을 이해하였다. 또한 스프레드시트는 산술적 피드백을 제공하여 학생들이 자신의 식을 확인할 수 있도록 하였다. 이러한 스프레드시트 환경은 학생들이 대수식을 일반화(generalizations)하는 데 영향을 미쳤다고 보고하고 있다.

양혜진(2003), 김현주(2005)는 학생들이 엑셀 활용을 통하여 다양한 변수의 역할을 경험하고 이해할 수 있었고, 문자를 변하는 대상으로 인식하게 되었다는 연구결과를 제시하고 있다. 그리고 김지연(2005)은 엑셀을 활용한 모델링 문제에서 표, 대수식, 그래프 등의 활동이 많은 사례를 생산하고 상황을 유동적이며 상호작용적으로 탐구하도록 도왔고, 계산 과정을 시각화함으로써 모델의 오류 발견과 수정을 도왔으며, 다양한 표상을 제공함으로써 상황의 숨겨진 양상을 탐구하도록 도왔다는 연구결과를 제시하고 있다.

이상의 연구결과에 따르면, 엑셀은 수학교육에 활용될 수 있는 효과적인 소프트웨어로 상호작용적인 탐구학습 도구(Drier, 2001; 류희찬, 2004; 신동선과 류희찬, 1998)이면서 현재의 지필교육과정을 보완할 수 있는 도구라 할 수 있다.

Friedlander(1998), Huntley et al.(2000), Masalski (1990), 류희찬(2004)과 장경윤(1997) 등이 제시한 수학교육에서 엑셀 사용의 유용성 및 교육적 의의를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 엑셀은 반복적(iterative)이거나 재귀적인 (recursive) 표, 또는 개념을 알 수 있는 표를 쉽게 만들 수 있도록 도우며, 원하는 계산을 자동으로 순식간에 처리하는 등 수량 데이터의 신속한 집계 및 산출을 돕는다. 그리고 교사와 학생이 변수와 상수, 각 단계의 값을 입력할 수 있게 한다. 엑셀은 문제해결 과정에서 "만일 ~ 이면 어떨까(what if)?"라는 가정 하에 데이터, 변인 등을 변경하고 이에 따른 효과를 검토할 수 있게 한다. 학생들은 엑셀 환경 내에서 본인의 비형식적인 아이디어를 탐구하고 표현하고 테스트하며, 수를 가지고 이를 실험할 수 있다.

둘째, 엑셀은 규칙을 찾고 입력하는 과정에서 일반적인 규칙을 기호화할 수 있고, 알고리즘이나 모델링을 창출하는 데 따른 직관력을 기르고 이를 통해 귀납적 추론 능력을 배양할 수 있도록 돕는다.

셋째, 엑셀은 수를 다루는 번거로움으로부터 자유롭게 해 줌으로써 문제 자체에 집중할 수 있도록 돕는다. 학생들은 문제와 관련된 수학의 핵심을 밝히기 위해 필요한 복잡하고 지루한 계산을 하지 않고도 의미 있는 수학적 원리 및 개념 이해, 응용을 깊이 있게 탐구할 수 있다.

넷째, 계산 과정의 시각화 및 수학적 아이디어의 시각화는 오류수정이 쉽도록 도우며, 계산 결과를 한 눈에 파악할 수 있도록 돕는다. 또한 지필 환경에서 표현하기 어려웠던 그래프를 그려서, 문제의 뜻을 좀 더 의미 있게 파악할 수 있도록 돕는다. 학생들은 한 변수의 값을 바꿈으로써 그 변수의 값이 전체 계산 패턴에 어떤 영향을 미치는지를 알 수 있다.

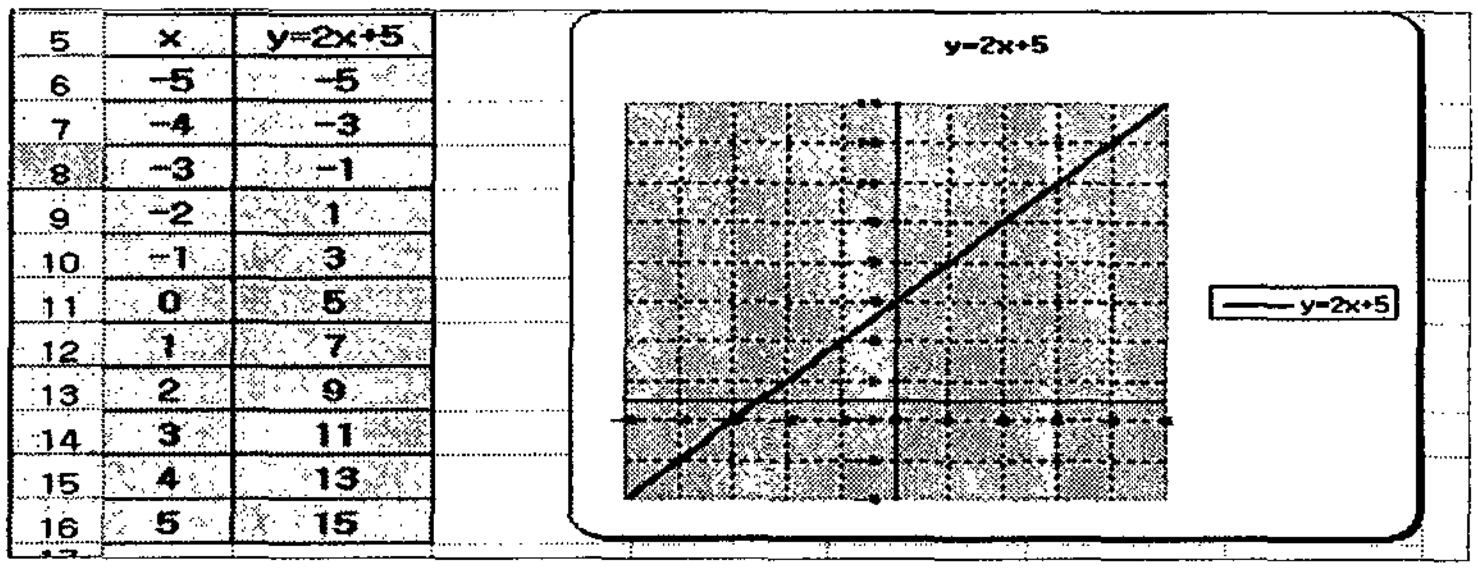
2. 엑셀과 일차함수 그래프 탐구

엑셀은 함수의 세 가지 표상인 다양한 식과 표 그리고 그래프를 함께 통합적으로 표현할 수 있는 기능이 있다. 이러한 기능은 함수 지도에서 추상적이고 형식적인 식과 직관적이면서 역

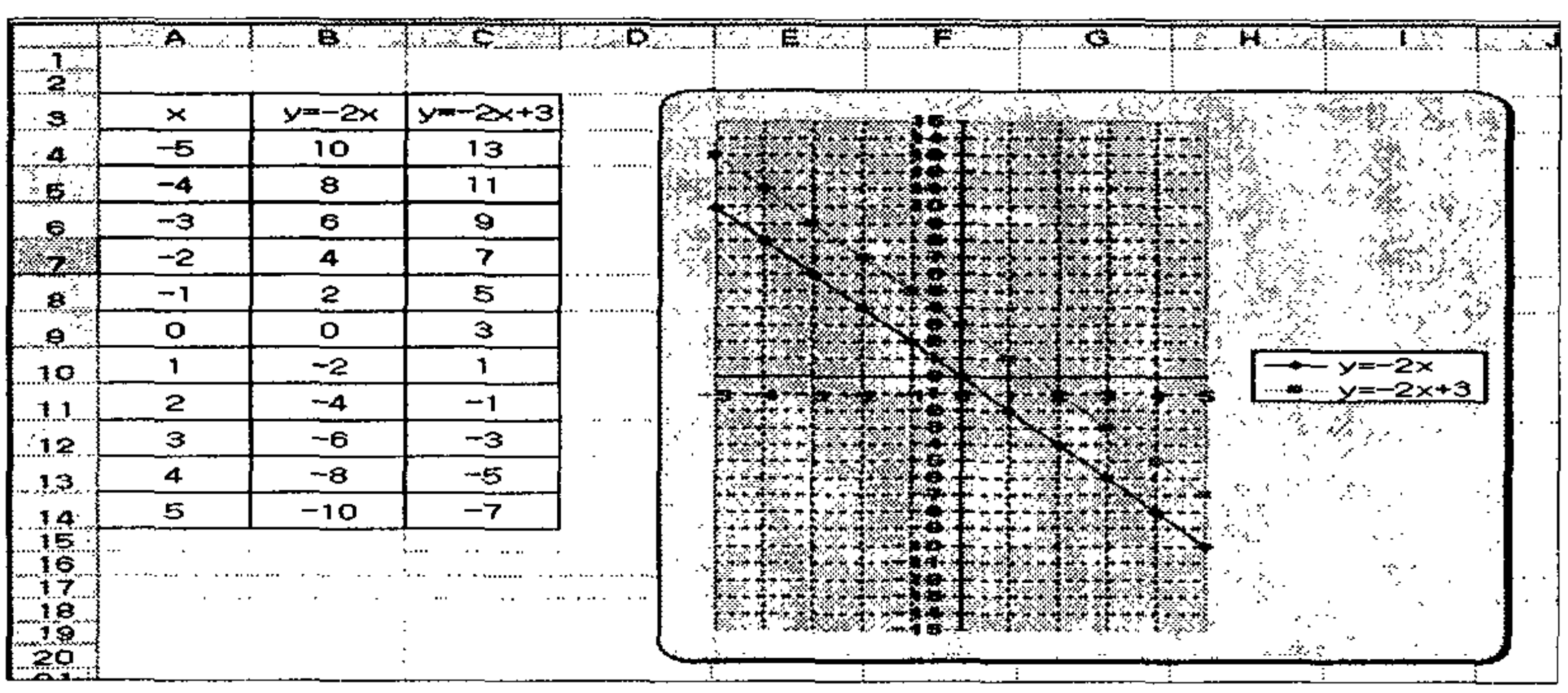
동적인 표와 그래프사이의 동적인 과정을 보여줌으로써 보다 구체적으로 함수와 관련된 내용을 대상으로 이해할 수 있는 학습기회를 제공해준다. 즉, 함수의 관계식과 표, 그래프는 서로 연결이 되어 있어서 수식의 변화를 통하여 표와 그래프의 변화를 한 화면에서 동적으로 관찰할 수 있으므로 함수식의 변화에 따른 표와 그래프의 상황을 이해하는데 큰 도움을 줄 수 있다.

학생들은 함수의 그래프를 그리기 위해서 우선 주어진 함수식을 만족하는 몇 개의 해집합을 나타내는 표를 작성한 후 이것을 좌표평면에 나타내어 함수 그래프를 그린다. 이러한 과정을 통해 함수식을 만족하는 값은 그래프의 점이 되고 그래프의 점은 함수식을 만족한다는 것을 깨닫게 된다. 그러나 함수의 그래프를 그리기 위해 개발된 대부분의 공학 도구들은 단순히 함수식만 입력하면 자동으로 그래프가 그려진다. 이런 공학 도구의 사용은 학생들이 쉬운 그래프조차 공학 도구 없이는 그리기 어렵게 하고 함수식과 그래프사이의 관계를 탐구할 기회를 박탈한다. [그림 Ⅱ-1]에서 제시한 바와 같이 엑셀 프로그램에서는 함수식($y=2x+5$)을 만족하는 표를 만들어야만 그래프를 그릴 수 있다. 이 과정은 학생들이 그래프를 그리는 과정과 동일하기 때문에 학생들에게 익숙하고 이러한 과정은 학생들이 함수식과, 표, 그래프 사이의 관계를 탐구할 기회를 제공한다. 또한 엑셀을 이용하여 표를 작성할 때, 한 셀에 적합한 함수식을 입력한 후 나머지 부분은 자동채우기 기능을 이용하면 빠른 시간에 표를 완성하고 정확한 그래프를 그릴 수 있다.

또한, 지필과정에서는 두 개의 함수 (예를 들면, $y=-2x$, $y=-2x+3$)를 정적으로 제시하고 그래프를 그려 두 개의 그래프를 비교할 때, 학생들은 모눈종이 또는 노트에 그래프를 그리게 되는데 정확한 그래프가 나오기 어렵고


5	x	y=2x+5
6	-5	-5
7	-4	-3
8	-3	-1
9	-2	1
10	-1	3
11	0	5
12	1	7
13	2	9
14	3	11
15	4	13
16	5	15

[그림 Ⅱ-1] $y=2x+5$의 그래프


3	x	y=-2x	y=-2x+3
4	-5	10	13
5	-4	8	11
6	-3	6	9
7	-2	4	7
8	-1	2	5
9	0	0	3
10	1	-2	1
11	2	-4	-1
12	3	-6	-3
13	4	-8	-5
14	5	-10	-7

[그림 Ⅱ-2] $y=-2x$, $y=-2x+3$의 그래프 비교

많은 시간이 소요된다. 하지만, 엑셀을 활용하면 함수식과 표와 그래프의 변화상황을 통합적으로 관찰함으로써 세 가지 표상의 특징을 통하여 평행이동의 의미를 쉽게 이해할 수 있다.

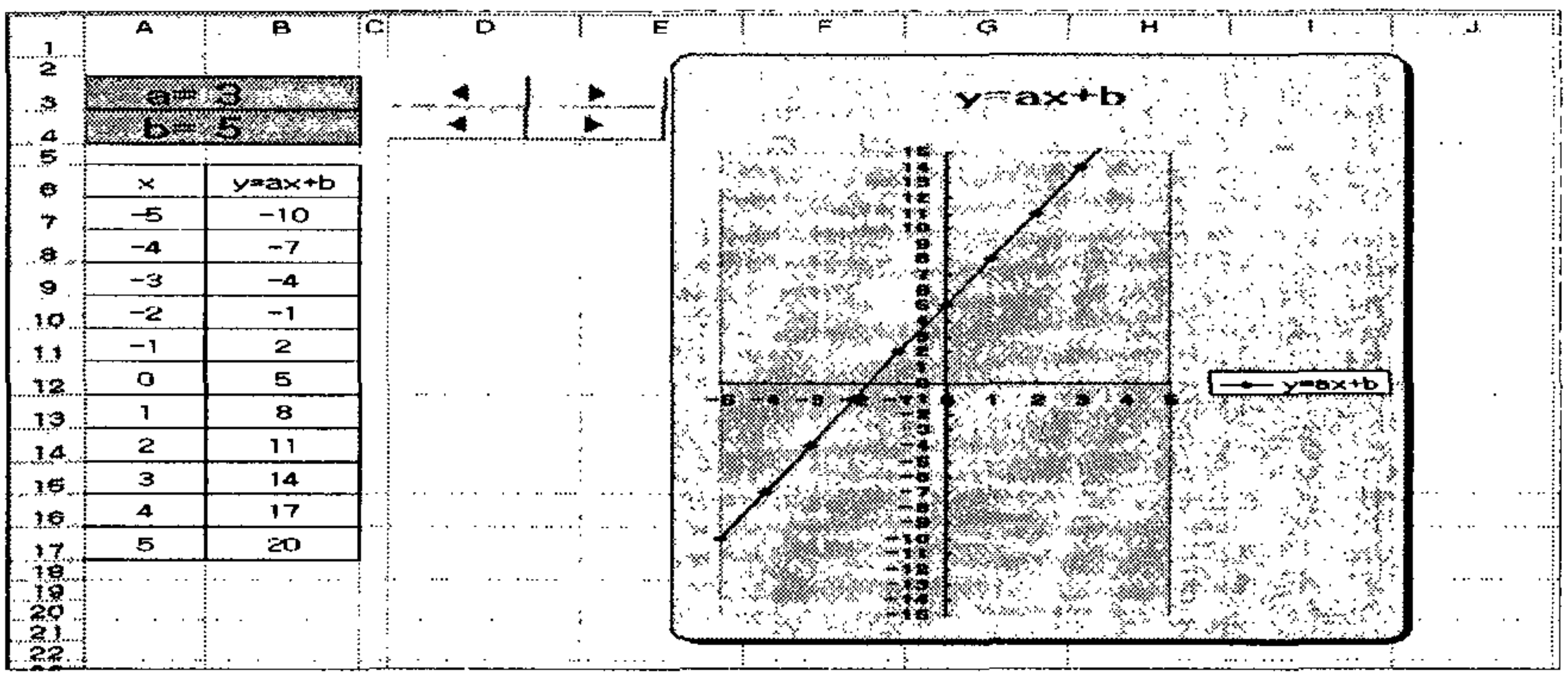
엑셀 기능의 장점중 하나는 함수의 표상을 역동적으로 관찰하고 탐구할 수 있다는 것이다. 지필환경에서는, 예를 들면, $y=ax$나 $y=ax+b$의 그래프를 다양하게 구현하는 것이 사실상 불가능하다. 교과서에서는 a, b의 값 대신에 정수 범위에서 몇 개의 수를 대입해 그래프를 그리고 이를 기초로 $y=ax$, $y=ax+b$의 그래프의 성질을 일반화시키고 있다. 따라서, 학생들은 a, b의 역할을 제대로 이해하지 못한 채 a는 기울기, b는 y절편 하는 식으로 암기를 하고 있다.

그러나 엑셀을 이용하면 [그림 Ⅱ-3]과 같이 매개변수 a, b의 값을 다양한 수로 표현할 수 있고, a와 b값의 변화에 따른 그래프의 변화를 역동적으로 관찰, 탐구하면서 매개변수 a, b의 의미를 분명히 이해할 수 있다.

3. 현행 교과서의 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 내용

일차함수의 활용부분 중 일차함수 그래프와 연립방정식의 해 단원은 기본적으로 학생들이 함수의 식, 그래프, 표를 통합해서 다룰 수 있는 수학적인 능력을 필요로 한다. 중학교 8-가의 함수단원에서 그래프와 연립방정식의 해의 관계에 대한 내용을 살펴보면, 교과서에서는 연립방정식의 해가 두 일차함수의 그래프의 교점이라는 것을 한 가지 예를 통해 설명하고 있다.

[그림 Ⅱ- 4]와 같이 식과 그래프의 개형을 통해서 두 직선의 교점의 좌표가 연립방정식의 해임을 설명하고 있는데, 실제로 교점의 좌표

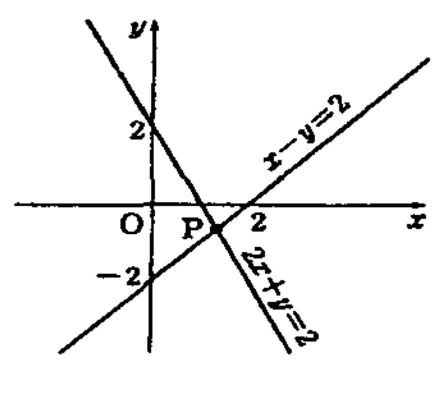


[그림 Ⅱ-3] $y=ax+b$의 그래프의 변화

두 방정식의 그래프를 같은 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 한 점 P에서 만난다.

오른쪽 그림에서 점 P는 방정식 $x-y=2$의 그래프 위의 점이면서 동시에 방정식 $2x+y=2$의 그래프 위의 점도 되므로 점 P의 x좌표, y좌표의 값이 두 방정식을 동시에 만족시키는 해가 됨을 알 수 있다.

즉, 두 직선의 교점의 좌표가 연립방정식의 해이다.



[그림 Ⅱ-4] 교과서의 일차함수와 연립방정식의 해의 관계

(x, y)가 연립방정식의 해가 되는지에 대한 확인은 하지 않고 있다. 지필환경에서는 그래프를 아무리 정확하게 그려도 좌표평면상에서 교점의 좌표를 구하는 것은 쉽지가 않다. 때문에, 학생들은 연립방정식의 해를 구할 때 그래프를 그려서 교점의 좌표를 구하기보다는 가감법, 대입법 등을 통해 쉽게 구하려는 경향이 있다. 이러한 경향은 학생들이 연립방정식의 해와 두 일차함수 그래프의 관계를 이해하는데 장해요인이 될 수 있다.

또한, [그림 Ⅱ- 5]와 같이 두 그래프의 위치에 따라 연립방정식의 해가 무수히 많거나, 하나이거나, 없게 되는 관계를 이해시키기 위해서는 매개변수 a, b의 값의 변화와 그래프의 위치관계를 분명히 이해시킬 필요가 있다. 하지만, 교과서에서는 정적인 몇 개의 예를 들어 그래프를 이용한 연립방정식의 해를 다음과 같이 일반화하고 있다.

> 기울기와 y절편이 같은 두 직선은 일치하므로 두 방정식의 그래프의 교점은 무수히 많다. 따라서, 이 연립방정식의 해는 무수히 많음을 알 수 있다. 기울기가 같고 y절편이 다른 두 직선은 평행하므로 두 방정식의 그래프의 교점은 없다. 따라서, 이 연립방정식의 해는 없음을 알 수 있다(교과서 내용 중).

위와 같은 내용을 학생들이 구체적으로 이해하기 위해서는 일차함수 $y=ax+b(a\neq 0)$와 $y=cx+d(c\neq 0)$의 그래프에서 매개변수 a, b, c, d의 값을 조작해보면서 변수와 두 그래프의 위치관계를 스스로 파악하고 발견할 수 있는 탐구환경을 제공해야 한다. 그러나 교과서에서는 [그림 Ⅱ- 6]과 같이 이러한 탐구환경을 제공하지 않고 한 개씩의 예를 들고 이어서 함수의 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 바로 정리한 후 이를 확인하는 문제를 제시하고 있다. 이러한 지필환경에서 학습한 학생들은 변수를 역동적으로 조작하고 이에 따른 표와 그래프의 변화를 살펴보지 못하기 때문에 결국은 두 일차함수의 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 이해하는데 인지적 장애를 겪을 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구방법 및 대상

본 연구의 교수실험은 정성연구의 사례연구 방법을 택하였다. 사례연구는 현실 상황과 연계하면서 한 현상에 대해서 풍부하고 전체적인 설명을 이끌어 낼 수 있고, 미래 연구의 구조

그래프를 이용한 연립방정식의 해

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 에 대하여

❶ 두 방정식의 그래프의 교점의 x좌표, y좌표의 값이 연립방정식의 해이다.
❷ 두 방정식의 그래프가 일치하면, 해는 무수히 많다.
❸ 두 방정식의 그래프가 평행하면, 해는 없다.

[그림 Ⅱ- 5] 교과서의 그래프를 이용한 연립방정식의 해

단편적인 예 ⟶ 일반화, 형식화 ⟶ 문제해결

[그림 Ⅱ- 6] 교과서의 내용 전개 과정

화를 돕는 일시적 가설로써 구성할 수 있기 때문이다(Sharan, 1998, 강윤수 외 8명 (역), 2005).

본 연구에 참여한 학생은 소도시에 위치한 남녀공학 중학교 2학년 학생 5명이다. 학생[1] 5명 모두 초등학교 때 엑셀의 기초적인 내용(합, 평균)을 배운 적이 있지만, 함수와 관련하여 표를 만들고 그래프를 그린 경험은 없다. 학생들의 수학에 대한 학업성취도는 상 수준인 학생이 2명, 중 수준인 학생이 2명, 하 수준에 해당하는 학생이 1명이다. 사전면담과 매 차시의 진단평가를 통해 학생들의 일차함수에 대한 이해정도를 파악하였고, 이를 탐구학습 내용에 반영하였다. 교수실험은 동계방학 중 오후에 실시하였고 학생들은 이미 수학 8-가 함수단원을 지필환경에서 학습한 상태이다.

지혜를 제외한 나머지 학생들은 함수의 정의를 ' 한 값에 따라 다른 값이 달라지는 것' 또는 '방정식', ' x, y의 값을 구하는 것'으로 답변한 것으로 보아 정확하게 이해하지 못한다는 것을 알 수 있다. 또한, $y=ax+b$의 식에서 x와 y의 의미에 대해서도 대부분의 학생들이 '미지수'라고 생각하고 있어, 미지수와 변수에 대한 개념을 잘 구분하고 있지 못한다는 것을 알 수 있다. 또한, 연립방정식과 일차함수의 그래프의 관계에 대한 진단평가 결과 석민과 지혜는 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표가 연립방정식의 해라는 것을 인지하고 있었지만, 나머지 세 명의 학생은 가감법 또는 대입법을 활용해 연립방정식의 해를 구하려는 시도만 했을 뿐 연립방정식과 일차함수 그래프의 관계를 이해하지 못했다. 이러한 분석결과를 토대로 학생들이 함수에 대한 이해와 일차함수의 그래프에 관련된 내용을 엑셀을 활용하여 탐구적, 역동적으로 이해할 수 있도록 구성하여 지도하였다.

교수실험에 참여한 지도교사는 현재 교육 경력이 13년인 남자 교사로서, 중학교에서 수학을 가르치고 있으며 엑셀을 활용해 함수단원을 지도한 경험은 없지만 기본적인 엑셀 조작은 가능하였다. 연구에 참여한 5명의 학생은 개인별로 탐구활동을 했으며, 지도교사는 학생들의 활동 과정에서 학습조력자로서 활동하였고, 연구자는 관찰자와 참여자로서 활동하였다.

2. 연구 절차

가. 예비 실험

본 연구의 교수실험 내용의 타당성을 점검하기 위해 엑셀을 활용한 예비실험을 하였다. 예비실험은 충남 A중학교 여학생 2명을 대상으로 실시하였다. 예비실험에 참여한 학생 2명은 초등학교 때 엑셀을 활용해 간단한 계산, 표를 만드는 정도를 배운 적이 있다.

예비실험 결과, 함수학습에 필요한 기초적인 엑셀 기능을 익히는 데에 처음에는 속도가 느렸지만, 차차 자연스럽고 효율적으로 엑셀을 활용하게 됨을 관찰할 수 있었다. 또한, 엑셀 활동지의 문제가 탐구형으로 구성되어 있기 때문에 학생들이 문제 상황을 이해하고 해결하는 데 다소 어려움이 있었지만 실험이 진행됨에 따라 표, 그래프, 식을 동시에 관찰하면서 활동지의 문제를 효과적으로 해결하는 것을 확인할 수 있었다. 이를 바탕으로 학생들의 엑셀을 활용한 교수실험에 필요한 기본적인 엑셀 기능, 학생 활동을 돕는 지도교사의 역할, 활동지의 문제수준을 예상할 수 있었다. 이러한 예비 실험 결과를 반영하여 실제 수업을 설계하였다.

나. 교수 실험 및 절차

교수실험에는 지도교사, 연구자, 학생 5명이

1) 교수실험에 참여한 학생의 이름은 모두 가명으로 했음.

항상 참여하였고, 학생 5명에게 노트북이 각각 한 대씩 주어졌다. 비디오카메라를 설치하여 지도교사의 교수 내용과 학생들의 제스처 등에 초점을 두고 녹화하였으며, 책상 위에는 녹음기를 두어 언어적 의사소통에 초점을 두고 녹음하였다. 교수실험을 진행하기 전에 학생들이 엑셀 기능을 익힐 수 있도록 1시간 정도 할애하였다. 이 시간을 통해 학생들은 엑셀의 계산 기능, 표 그리기, 그래프 그리기 등의 기본적인 기능을 익혔다.

엑셀을 활용한 교수·학습 활동은 제7차 교육과정의 8-가 함수단원 내용을 기초로 엑셀기능 익히기, '일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계 탐구'를 한 후에 이를 활용할 수 있는 '제논의 역설의 오류'를 밝히는 내용으로 구성하였다.

교수실험의 일반적인 진행과정은 다음과 같다. 지도교사는 각 차시에 학습에 관련된 기본적인 엑셀 기능에 대해 설명하고 학생들의 수행정도를 점검한다. 학생들이 엑셀의 사용 또는 문제해결의 어려움에 부딪혔을 때, 지도교사 또는 연구자가 약간의 힌트를 제공함으로써 학생 스스로 해결할 수 있도록 유도하였다. 또한 연구자는 지도교사와 학생들의 행동을 관찰하면서 특징적인 장면을 필드노트에 기록하고, 학생들이 도움을 청할 때는 참여자로서 조언해 주었다. 엑셀 활동지는 학생들이 함수관련 문제를 효과적으로 해결할 수 있도록 탐구와 추측, 문제해결 순으로 구성하였다. 학생들은 엑셀 활동지에 탐구내용을 기록하고, 활동이 끝난 후 엑셀 일지를 작성해 연구자에게 제출했다. 또한 매 차시 교수실험이 끝나면 학생들이 활동하면서 발견한 사실들, 인지적인 갈등을 파악하기 위해 활동내용을 중심으로 개별 면담을 실시하였다.

3. 주제 선정과 교수실험 분석 틀

중학교 8-가 교과서의 함수 단원에서 탐구활동이 필요한 주제를 선정한 이유는 다음과 같다. 첫째, 엑셀을 활용한 연립방정식의 해와 일차함수의 그래프 관계의 탐구활동은 연립방정식의 해는 두 일차함수 그래프의 교점이라는 사실을 직관적으로 이해시킬 수 있고 연립방정식의 해의 개수를 일차함수의 그래프를 이용하여 효과적으로 구하게 할 수 있다. 이러한 탐구활동을 통해 학생들은 연립방정식의 해와 일차함수 그래프의 관계를 일반화할 수 있다.

둘째, 엑셀을 활용한 '제논의 역설'[2]의 오류를 밝히는 탐구활동은 일차함수의 그래프, 식, 표를 종합적으로 적용할 수 있는 문제를 통해 함수의 세 표상을 활용할 수 있는 학습 기회를 제공해줄 수 있다. 그리고 학생들이 다양하게 아킬레스의 속력을 $y=ax(a\neq0)$, 거북이의 속력을 $y=ax+b\ (a\neq0)$ 식으로 수학화 하면서

---

2) 그리스의 철학자 제논의 '아킬레스와 거북이의 달리기 경주'라는 유명한 역설이다. 이 역설의 내용은 "거북이가 먼저 출발한 상황에서 아킬레스가 아무리 빨리 달려도 거북이를 따라 잡을 수 없다."는 것이다. 아킬레스가 거북이를 잡으려면 아킬레스가 자신과 거북이까지 구간의 반을 지나야 하고, 다시 그 반을 지나려면 또 그 구간의 반을 지나고, 이러한 과정을 무한히 반복하다 보면 무한히 많은 시간이 걸리게 되어 결국 따라 잡을 수 없다는 것이다. 즉, 제논은 물체의 운동을 설명하면서 물체가 이동하는 거리에 중점을 두고 물체가 이동하는 데 걸린 시간 합의 유한성을 무시하였다. 본 논문에서의 제논의 역설의 탐구내용은 학생들의 수준을 고려해 무한에 대한 접근 보다는 유한 합에 대한 의미를 엑셀을 활용해 탐구할 수 있는 내용으로 구성하였다. 아킬레스의 속력, 거북이의 속력, 거북이가 아킬레스를 앞서 있는 거리를 다양하게 설정하고, 엑셀을 통해 구현해보는 활동은 제논의 역설에 대한 모순의 발견은 물론 연립방정식의 해와 두 일차함수의 그래프의 관계를 실제적으로 체험하게 할 수 있다.

제논의 역설이 오류가 있음을 직관적으로 확인할 수 있다. 학생들은 이러한 탐구활동을 통해 연립방정식의 해와 일차함수 그래프의 관계를 활용해 아킬레스가 거북이를 앞설 수 있는 이유를 수학적으로 분석할 수 있다.

교수 실험 분석은 실제수업 후의 면담 자료, 관찰 자료, 활동지 자료를 토대로 하였다. 특히 전사(transcript)는 각 개인별로 녹화된 동영상과 녹음된 내용을 비교하면서 작성하였다. 아래에 있는 표는 엑셀을 활용한 교수실험 내용의 분석의 틀을 제시한 것이다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 엑셀 기능 배우기

지도교사는 교수실험을 시작하기 전, 교수실험에 필요한 기본적인 엑셀 기능(표 만들기, 그래프 그리기 등)에 대해 1시간 정도 학생들과 실습하는 시간을 가졌다. 5명의 학생 중 석민, 영훈, 지혜, 선애는 컴퓨터 조작이 익숙해 지도교사가 설명한대로 엑셀의 일반적인 기능을 잘 적용했지만, 인경은 타자 속도와 이해 속도가 다소 느려 엑셀 기능을 배우는 중간 중간에 지도교사와 연구자의 도움을 받았다. 학생들은 엑셀에서의 수식입력, 자동채우기, 표와 그래프를 그리는 방법은 쉽게 따라했지만, 그래프를 그린 후 다양한 메뉴(데이터계열 서식, 축서식, 챠트서식 등)를 적용할 때에는 다소 시간이 지연되었다. 다섯 명의 학생 모두 엑셀이 수학학습에 활용될 수 있다는 사실에 기대감을 표시했고 엑셀 기능 배우는 것을 재미있어했다. 특히, 석민은 다른 학생과는 달리 엑셀 기능에 빨리 익숙해져 교사가 가르치는 내용을 다양하게 활용하면서 그래프와 표의 모양을 관찰하기도 하였다.

2. 연립방정식의 해와 그래프 탐구

가. 문제 상황

교사는 활동지를 나누어주고 활동방법과 탐구내용에 대해 설명을 해준다. 학생들은 연립방정식을 $y=ax+b(a\neq0)$의 꼴로 바꾸고 엑셀을 활용하여 표와 그래프를 나타내면서 두 그래프의 교점의 좌표와 연립방정식의 해 사이에 어떠한 관계가 있는지 파악해본다. 또한, 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태와는 어떠한 관계가 있는지도 추론해본다. 그리고 교수실험이 끝난 후 문제해결에서 연립방정식의 형태를 보고 연립방정식의 해의 개수가 몇 개인지를 구해본다.

<표 Ⅲ-1> 교수실험 분석 틀

교수실험 내용	분석 틀
일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계 탐구	1. 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 어떻게 이해하는가?
	2. 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 어떻게 일반화하는가?
	3. 엑셀을 활용한 탐구환경은 어떠한 의미가 있는가?
제논의 역설 오류 탐구	1. 제논의 역설 오류 탐구를 어떻게 탐구해 나가는가?
	2. 제논의 역설 오류 탐구를 어떻게 일반화 하는가?
	3. 엑셀을 활용한 탐구환경은 어떠한 의미가 있는가?

▶ 탐구와 추측

1. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$ 의 두 방정식을 각각 y에 대하여 풀면 어떻게 되는가?

2. 연립방정식 $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-2x-2 \end{cases}$ 의 그래프를 엑셀을 활용해 같은 좌표평면에 나타냈을 때 교점의 좌표를 구하여라.

3. 문제2)에서 구한 교점의 좌표와 연립방정식의 해는 어떠한 관계가 있는가?

4. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ -2x+y=5 \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.

5. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.

7. 문제4) , 문제5), 문제6)의 해결에서 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태는 어떠한 관계가 있는지 추측해 보아라.

▶ 문제 해결

8. 다음 연립방정식의 해의 개수를 구하고, 어떻게 구했는지 설명하여라.

(1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ x+y=3 \end{cases}$

나. 교수실험 분석

1) 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 어떻게 이해하는가?

지도교사는 탐구와 추측 활동에 들어가기 전, 학생들이 연립방정식의 해가 무엇인지를 알고 있는지 확인, 설명하는 단계로 수업을 진행했다. 탐구와 추측 1번 문제에서는 학생들이 $ax+by+c=0$의 형식을 일차함수 $y=ax+b$의 꼴로 고칠 수 있는 활동시간을 부여했다.

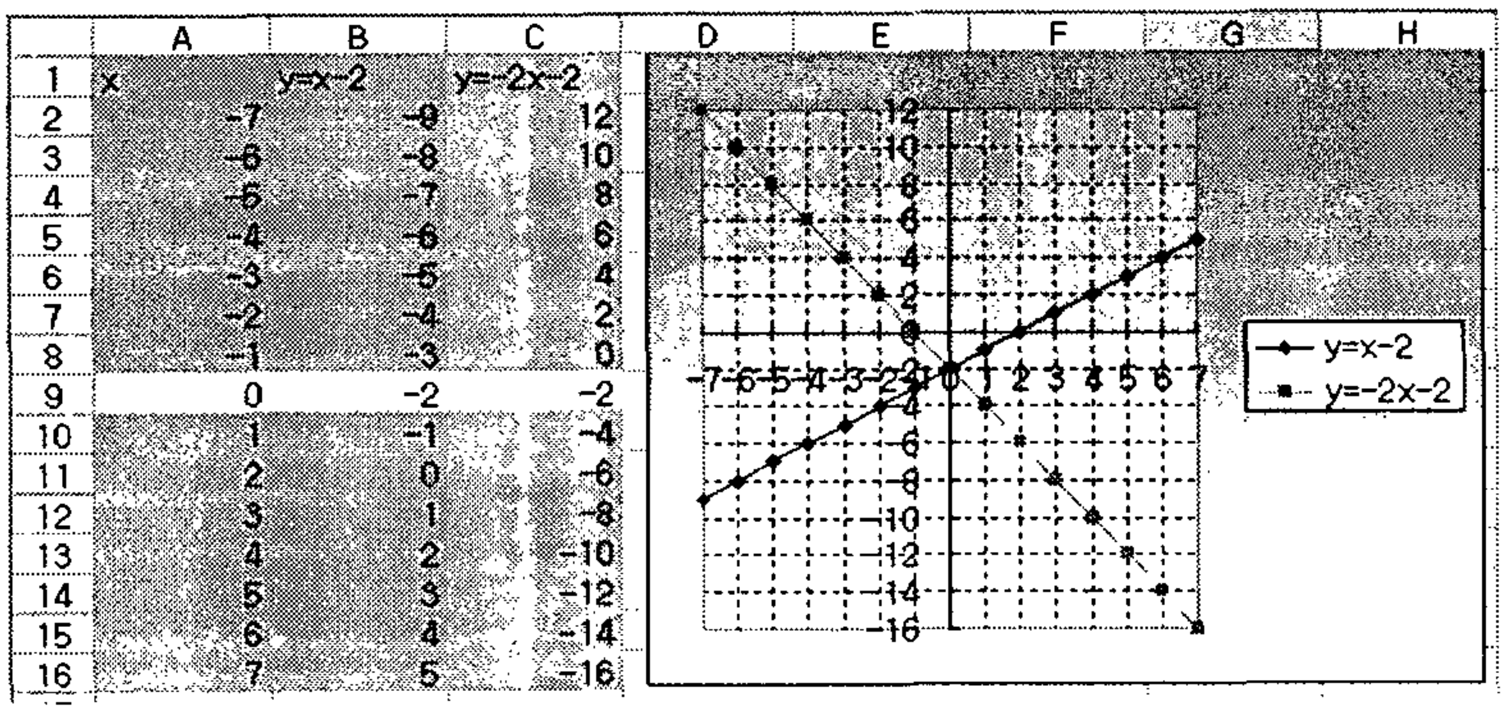
다음 면담내용은 이러한 기초적인 활동 이후에 학생들이 연립방정식을 두 개의 일차함수식으로 변환하여 엑셀을 활용해 표와 그래프를 그린 다음 교점의 좌표를 찾고, 이를 통해 연립방정식의 해와 두 일차함수 그래프의 관계를 이해하는 과정을 보여준다.

<u>발췌문 1 : 연립방정식의 해와 그래프의 관계 이해</u>

1 연구자: 탐구와 추측 2번 문제를 어떻게 해결했지?

2 선애: 여기 두 함수식의 표를 구하니까 여기 교점의 좌표가 여기 있어서요. 교점의 좌표가 (0, −2)여서.

3 연구자: 표를 보면 알 수 없나?



	x	y=x-2	y=-2x-2
2	-7	-9	12
3	-6	-8	10
4	-5	-7	8
5	-4	-6	6
6	-3	-5	4
7	-2	-4	2
8	-1	-3	0
9	0	-2	-2
10	1	-1	-4
11	2	0	-6
12	3	1	-8
13	4	2	-10
14	5	3	-12
15	6	4	-14
16	7	5	-16

[그림 Ⅳ- 1] 선애의 연립방정식 해 탐구

4 선애: 아, 표를 보면요 여기 $x=0$이고요. $y=x-2$, $y=-2x-2$의 함수를 보면요. 여기 해가 똑 같잖아요. 그래서 좌표가 (0, −2)라는 것도 알 수 있어요.

5 연구자: 그럼 교점의 좌표, 연립방정식의 해는 어떤 관계가 있지?

6 선애: 연립방정식의 해는요. $y=x-2$와 $y=-2x-2$의 그래프의 교점이 돼요.

선애는 연립방정식의 해를 그래프를 이용해 교점의 좌표 (0, −2)를 찾았고(2열), 또한 엑셀 화면의 표를 통해서도 교점의 좌표 (0, −2)를 발견하였다 (4열). 그리고 6열을 보면 엑셀 활동을 통해서 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 직관적으로 파악하고 있는 것을 알 수 있다.

선애는 진단평가시 연립방정식의 해를 일차함수 그래프를 이용해 구하는 방법에 대한 질문에 대답을 못하였고, 일차함수의 그래프를 활용하여 연립방정식의 해의 개수를 묻는 질문에도 그래프를 활용하여 문제를 해결하지 못했다. 하지만, 엑셀을 활용한 탐구 활동이 선애가 연립방정식의 해가 두 일차함수 그래프의 교점이라는 사실을 이해하는 데 도움이 되었다는 것을 알 수 있다.

2) 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계를 어떻게 일반화하는가?

다음의 면담 내용은 학생들이 탐구와 추측 문제4), 문제5), 문제6)를 통하여 발견한 사실들에 대한 것이다.

<u>발췌문 2 : 연립방정식의 유형과 해의 개수의 관계 이해</u>

1 연구자: 문제 4, 5, 6번의 해결에서 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태는 어떠한 관계가 있는지 추측한 것을 설명해보자.

2 석민: 기울기와 y절편이 다르면 그 교점은 하나이고 해도 하나라는 것을 알 수 있었어요. 그래프도 교점이 하나이고 해도 하나이고 또 기울기도 다르지만 y절편이 같으면 y축 상에 교점이 있고, 그 교점의 좌표가 연립방정식이 같으면 그 해는 무한개이고 교점도 무한개이고 그래프가 일치한다는 것을 알았어요. 어, 그 기울기는 같지만 y절편이 다르면 두 그래프는 평행하고 교점도 하나도 없고 해도 하나도 없다는 것을 알았어요.

3 지혜: 먼저 첫 번째에서 보면요. $y=ax+b$, $y=cx+d$와 같이 기울기와 상수가 모두 다른 경우에는 평행하지도 않고, y절편이 같지도 않으니까요. 어느 한 점에서 만날 수 있기 때문에요. 해의 개수가 한 개라고 생각했고요. 또, $y=ax+b$, $y=ax+d$에서는 기울기는 같고 y절편이 다르기 때문에 평행한 그래프가 나오고, y절편이 다르기 때문에 어느 한 점에서 만나지 않기 때문에 해는 없다고 생각했어요. 또 여기는 $y=ax+b$, $y=ax+b$에서 기울기와 y절편 모두 같기 때문에, 해의 개수는 일치하므로 해는 무수히 많다고 생각했어요.

4 선애: 4번은요. 여기 쓴 것처럼, 일차함수 $y=ax+b$ 꼴 중에서 a와 b가 다르면서 일차함수의 좌표점이 구할 수 있고요. 또 a, b가 각각 다르면요. 해는 한 개가 나와요. 그리고 문제 5번을 보면 여기 두 일차함수는 $y=ax+b$ 꼴 중에서 a, b가 같으면 두 일차함수의 그래프는 일치하고요. a, b가 같으면 해는 무수히 많아요. 그리고 문제 6번의 두 일차함수는 $y=ax+b$ 중에서 a가 같고 b가 다르면 두 그래프는 평행하고요. 또, a가 같고 b가 다르면 해는 없어요.

5 영훈: 기울기가 다른 경우의 연립방정식은 해가 하나였고요. 그래프에서 교점이 한

개 있었다는 것을 알 수 있었고요. 기울기가 같고 y절편이 같을 경우 해의 개수는 많았고요. 두 그래프는 일치했고요. 기울기가 같고 y절편이 다른 경우 해가 없었어요. 그래프에서는 두 그래프가 평행했고요.

위의 발췌문에서, 네 학생 모두 연립방정식의 해의 개수와 일차함수의 식의 관계를 분석적으로 제시하고 있다. 발췌문 2의 2열과 5열을 살펴보면, 석민과 영훈은 연립방정식의 해와 식의 관계에서, 기울기가 다르면 연립방정식의 해는 1개, 기울기가 같고 y절편이 같으면 해의 개수는 많고, 기울기가 같고 y절편은 다른 경우 그래프가 평행하기 때문에 해가 없다는 설명을 하고 있다. 또한, 석민은 이에 덧붙여서 해가 하나인 경우를 두 가지로 나누고 있다. 첫째, 기울기와 y절편이 다른 경우와 둘째, 기울기는 다른 데 y절편은 같은 경우로 나누면서, 두 번째의 경우 교점은 y축 상에 있음을 발견하였다. 그리고 석민과의 면담내용 중에 "연립방정식이 같으면 그 해는 무한개이고 교점도 무한개이고 그래프가 일치한다는 것을 알았어요."의 대답은 석민은 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 '방정식', '그래프', '표'의 세 가지 표상을 연결하여 이해했다는 것을 보여준다. 특히, 선애와 지혜는 구체적인 식 $y=ax+b$의 식에서 a와 b의 관계를 이용하여 연립방정식의 해와 그래프 사이의 관계를 논리적으로 설명하고 있다. 4열을 보면 선애는 $y=ax+b$의 식에서 a와 b가 각각 다르면 해는 한 개가 나오고, a와 b가 같으면 해는 무수히 많고, a가 같고 b가 다르면 두 그래프는 평행하기 때문에 해가 없다는 것을 설명하고 있다. 그리고 지혜는 두 일차함수의 식을 비교하는데 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 식을 이용하면서 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 분석적으로 설명하고 있다 (3열).

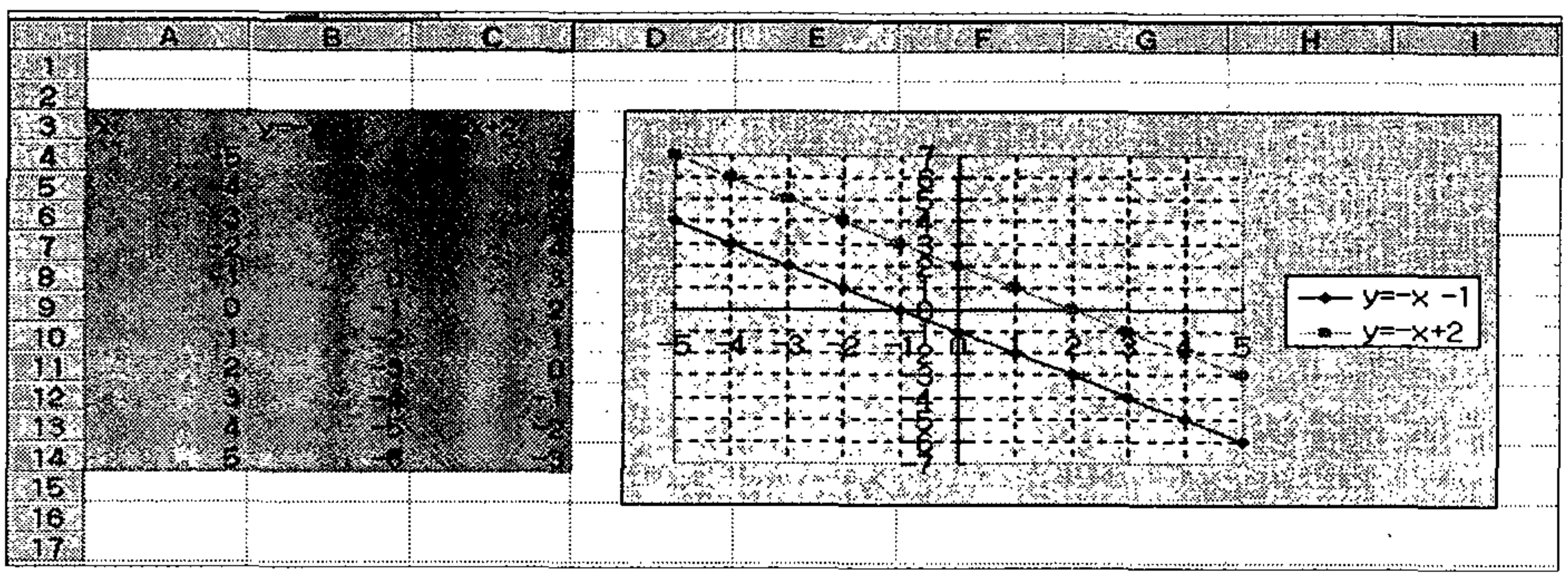
위 학생들은 연립방정식의 해의 개수를 일차함수 $y=ax+b$의 기울기 a와 y절편 b와 연결하면서 설명하고 있다. 학생들은 엑셀의 탐구과정을 통해 연립방정식과 그래프의 관계를 형식적으로 일반화하고 있다는 것을 알 수 있다.

3) 엑셀을 활용한 탐구환경이 어떠한 의미가 있는가?

다음은 본시의 교수실험을 마친 후 학생들이 교과서의 학습과 엑셀을 활용한 탐구학습의 경험을 통해 느낀 점을 표현한 내용이다.

<u>발췌문 3 : 연립방정식과 그래프의 관계 탐구 후 소감</u>

1 연구자: 음, 그러면 엑셀을 통한 탐구활동이 어떤 측면에서 도움이 되었지?



[그림 Ⅳ-2] 지혜의 연립방정식의 해 탐구

2 석민: 교과서에서는 이러한 활동을 하기 전에 미리 문제만 풀고 생각할 여유도 없이 규칙을 식을 다 알려주잖아요. 이런 식으로 엑셀을 활용하면서 유도 질문 같은 것을 해가지고요. 유도질문을 하면은 그 규칙을 스스로 알아낼 수도 있고, 또 다른 규칙도 찾아낼 수 있다는 것이 좋은 것 같아요.

3 지혜: 교과서를 통해 학습하면 그 정해진 범위에서만 하기 때문에 어떤 다른 경우를 생각하는데 한계가 있고요. 한정되어 있기 때문에요. 별로, 거기에서 정해진 것만 하기 때문에요. 그걸 넘어서 다른 방면으로 생각하지 않으려고 하는데요. 생각을 안 했었는데요. 이 엑셀 프로그램을 통해서요. 여러 가지 방면에 대해 생각해보고 직접 학습해봄으로써 왜 그런지에 대한 원리를 쉽게 깨달을 수 있어서요. 좋았어요.

4 영훈: 교과서에서는요. 이건요. 제 생각으로 직접해보니까요. 교과서만으로 보면 좀 이해가 힘들었던 것 같거든요. 엑셀에서는 x, y값이 있고 그것을 보고 그래프를 만드니까 그 과정을 알 수 있고 이해하기가 쉬웠던 것 같아요.

5 선애: 교과서에서는, 그래프가 하나 주어지고요. 해가 없을 땐 이렇게 구해지고 해가 무수히 많을 땐 이렇게 구해지고, 해가 하나 밖에 없을 땐 이렇게 구해지고 하나 밖에 안 나와 있잖아요. 그런데 여기는 자기가 할 수 있는 만큼 대입해서 할 수 있으니까 쉽게 알 수 있는 것 같아요.

위의 면담에서 학생들의 엑셀 활동 후의 반응을 종합하면, 석민은 교과서가 문제위주로 되어 있고, 규칙과 식이 다 제시되어있기 때문에 탐구할 기회가 없다는 것을 지적하고 있다(2열). 그리고 엑셀을 활용한 탐구활동 순서가 스스로 규칙을 찾아낼 수 있는데 도움이 되었다고 말하였다(2열). 지혜는 3열에서 엑셀을 통해 직접 탐구학습을 함으로써 원리를 쉽게 깨달을 수 있었다고 말하였다. 그리고 선애와 영훈도 엑셀의 탐구활동을 통하여 다양한 그래프와 표를 적용해봄으로써 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 이해하기가 쉬웠다고 하였다(4열, 5열).

위와 같이 학생들이 엑셀을 통한 탐구활동을 통하여 경험한 내용을 종합해보면, 현재 교과서 중심의 지필환경을 보완하기 위해서는 엑셀과 같은 컴퓨터 환경이 필요하다는 사실을 알 수 있다. 학생들은 다양한 탐구활동을 통하여 학습내용의 원리를 이해할 수 있기 때문이다.

3. 제논의 역설의 오류

가. 문제 상황

학생들은 제논의 역설이 잘못되었다는 것을 실제 엑셀의 탐구활동을 통해 밝혀본다. 학생들이 거북이와 아킬레스의 속력을 추측하여 세워보고, 그 식을 그래프와 표로 구현하는 활동을 통해 거북이와 아킬레스가 간 거리를 비교함으로써, 몇 분 후에 어느 정도 거리를 아킬레스가 앞서고 있는지를 탐구하게 된다.

▶ 탐구와 추측

※ 엑셀을 활용하여 제논의 역설이 오류가 있음을 밝혀보자.

1. x분 후 거리를 ym라고 할 때, 거북이와 아킬레스의 속력, 거북이가 몇 m앞에서 출발했는지 추측해서 식을 세워 보아라.
2. 문제 1)에서 세운 식을 엑셀을 활용해 표와 그래프로 나타내보자.
3. 문제 2)의 탐구활동에서 발견한 사실은 무엇인가?

▶ 문제 해결

4. 순영이와 철민이가 달리기 시합을 하는데, 철민이가 1km 앞에서 출발하였다. 순영이는 1분에 0.3km, 철민이는 1분에 0.2km의 일정한

속력으로 달린다. x분 후에 순영이와 철민이가 간 거리를 $y$km라 할 때 다음 물음에 답하여라.(단 거리 y의 기준점은 순영이가 출발한 지점을 기준으로 한다.)

(1) x분 후에 순형이가 간 거리를 $y$km라고 할 때 x와 y사이의 관계식을 구하면?

(2) x분 후에 철민이가 간 거리를 $y$km라고 할 때 x와 y사이의 관계식을 구하면?

(3) 엑셀을 활용하여 문제(1), (2)번의 관계식을 표와 그래프로 나타내어라.

(4) 두 사람이 만나게 되는 것은 몇 분 후가 되는지 여러 가지 방법으로 설명하여라.

나. 교수실험 분석

1) 제논의 역설 오류를 어떻게 탐구하는가?

다음은 학생들이 엑셀을 통해 탐구한 제논의 역설이 오류가 있음을 실제 탐구활동을 통해 발견하는 면담내용이다.

<u>발췌문 4 : 제논의 역설 탐구 1</u>

1 연구자: 제논의 역설 탐구 활동을 하면서 속력과 거리를 어떻게 정하여 식을 구했는지 설명해볼까?

2 영훈: 아킬레스는 $y=450x$, 거북이는 $y=400x+200$으로 해가지고요. 분당 아킬레스가 450m, 거북이가 분당 400m 해가지고(좀 빠르긴 한데) 그래프를 만들었어요.

3 연구자: 몇 m 앞서게 한 거야?

4 영훈: 200m요.

5 연구자: 이 그래프와 표에서 어떤 사실을 발견했어?

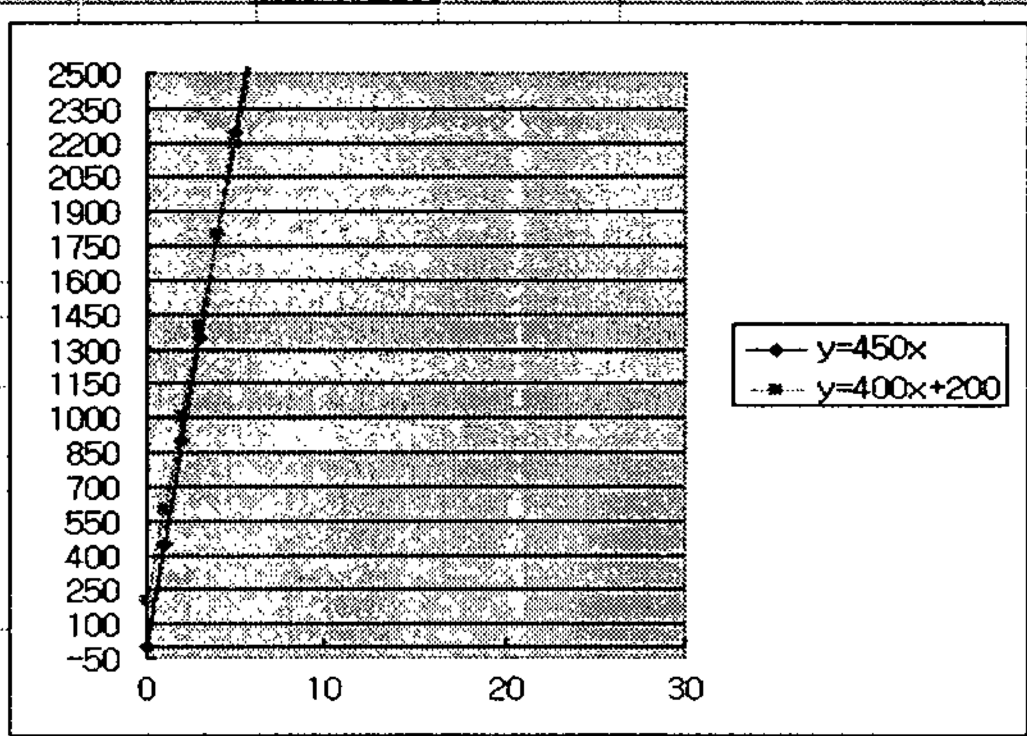
6 영훈: 200m 먼저 출발하더라도 아킬레스가 분당 속력이 더 빠르니까 아킬레스가 나중에 거북이를 앞지르게 된다는 것을 발견했어요.

7 연구자: 그 지점은 어디를 말하지?

8 영훈: x가 4분이 될 때 아킬레스는 1800m, 거북이는 1600m 인데 200m 앞서 가니까 1800m, 4분이 지나서는 아킬레스가 거북이를 앞서게 됐어요.

위의 면담내용을 살펴보면, 영훈은 아킬레스의 속력을 450m, 거북이의 속력을 400m라 하고 거북이가 200m 앞서게 하는 상황을 만들었다. x는 시간, y는 거리, 그리고 속력을 활용하여 아킬레스가 간 거리는 $y=450x$, 거북이가 간 거리는 $y=400x+200$으로 식을 세운 다음 표와 그래프로 나타내었다(2열). 이러한 문제 상황의 탐구를 통해 4분이 되었을 때 거북이와 아킬레스는 만나게 되고, 4분이 지난 후에는

x	y=450x	y=400x+200
0	0	200
1	450	600
2	900	1000
3	1350	1400
4	1800	1800
5	2250	2200
6	2700	2600
7	3150	3000
8	3600	3400
9	4050	3800
10	4500	4200
11	4950	4600
12	5400	5000
13	5850	5400
14	6300	5800
15	6750	6200
16	7200	6600
17	7650	7000
18	8100	7400
19	8550	7800
20	9000	8200



[그림 Ⅳ-3] 영훈의 제논의 역설 탐구

아킬레스가 앞선다는 것을 알게 되어, 제논의 역설이 오류가 있음을 밝혀내었다(6열, 8열). 즉, 영훈은 제논의 역설의 오류를 밝히는 과정에서 속력과 시간 거리의 관계를 식으로 나타내고, 그 식을 바탕으로 표와 그래프로 나타내 봄으로써 함수의 세 가지 표상을 활용하여 문제를 해결했다는 것을 알 수 있다.

다음 그림은 인경이가 제논의 역설 탐구과정에서 그린 그래프이다. 그래프를 보면, 위의 그래프는 만나지 않고, 아래의 그래프는 만난다. 인경은 아킬레스의 관계식을 $y=500x$로 거북이의 관계식을 $y=250x+9999$로 만들고 그래프와 표를 그렸다. 그런데 x값의 범위를 주는 과정에서 첫 번째 그래프는 x값의 범위를 0부터 20까지 주어도 두 일차함수의 그래프가 만나지 않자 인경은 당황하면서 "평행이 아닐까?"라는 생각도 했다. 하지만, 연구자가 면담과정에서 x값의 범위를 확대해보라는 힌트를 주자 스스로 x의 값의 범위를 40까지 주었고, 결국 40분부터 아킬레스가 거북이를 앞선다는 사실을 발견하였다. 엑셀을 활용한 제논의 역설 탐구활동은 인경에게 두 그래프가 평행하지 않으면 어느 한 점에서 만난다는 사실을 직관적으로 이해할 수 있는 학습기회를 제공해준 것이다.

나) 제논의 역설 오류 탐구내용을 어떻게 일반화하는가?

엑셀 조작에 가장 능숙한 학생이 석민이다. 석민은 상수 그래프의 탐구활동에도 스핀버튼을 활용했는데, 활용문제에도 스핀버튼을 활용해 다른 학생들보다 다양하게 제논의 역설을 탐구하고 있었다. 다음은 석민과의 면담내용이다.

발췌문 5 : 제논의 역설 탐구 3

1 연구자: 아킬레스와 거북이 달리기에 대한 내용을 잠깐 살펴보면, 아킬레스의 속력, 거북이의 속력 그 다음에 거북이가 몇 미터 앞에서 출발했는지, 이런 내용들을 설명해볼까?

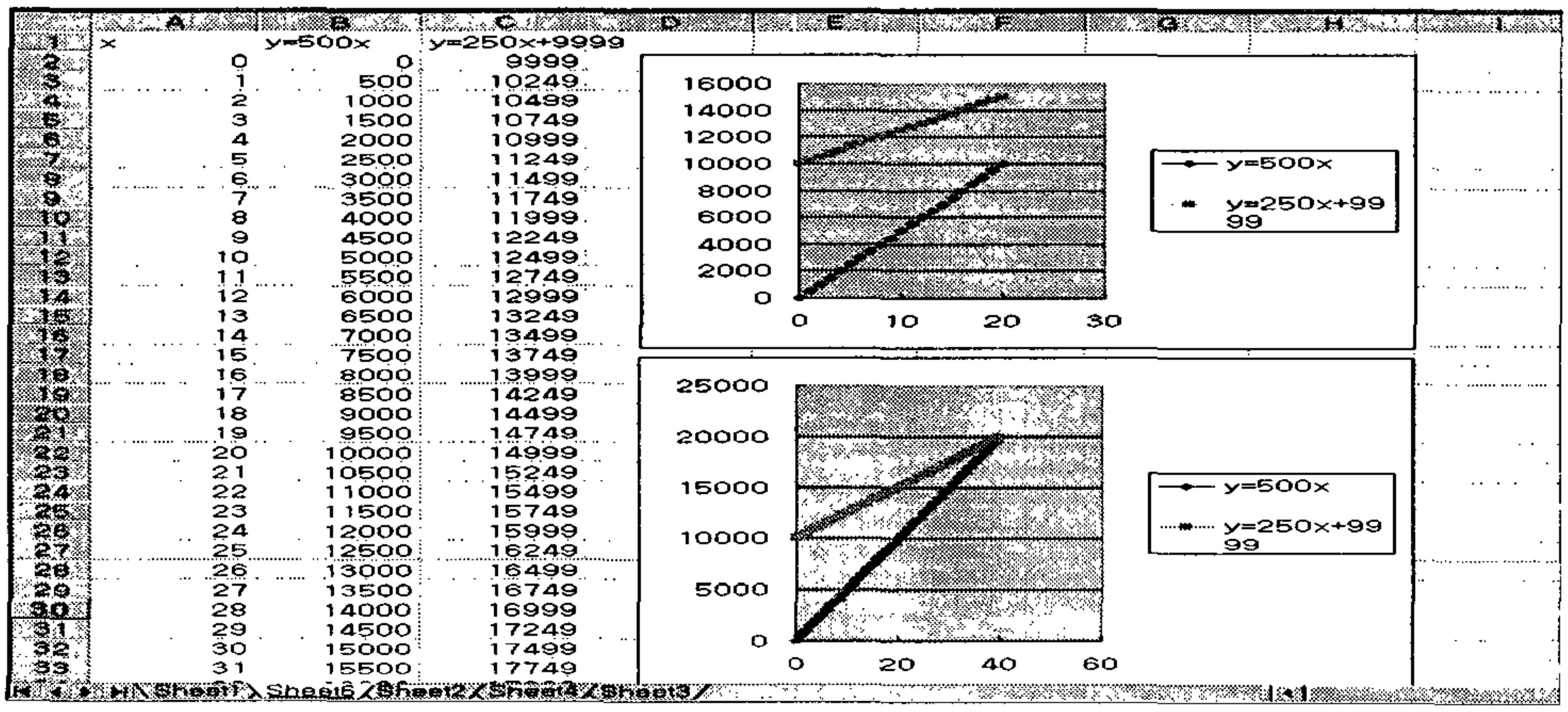
2 석민: 어, 제가 한 건요. 아킬레스가 1분에 600m 가고 거북이는 5000m 앞에서 출발하고 분당 60m 속력으로 달리는 것으로 설정했어요.

3 연구자: 그래서 식이 어떻게 나왔지?

4 석민: 식은 아킬레스는 $y=600x$이고요. 거북이는 $y=60x+5000$.

5 연구자: 그러면 석민이가 속력도 정하고 거북이가 앞서 출발한 거리도 정하고, 그래서 그래프를 그리고 표도 만들어봤는데, 거기서 발견한 사실이 뭔지 설명해볼까?

6 석민: 어, 거북이가 아무리 앞서 갔더라도, 이 기울기가 다르면 언젠가는 만날 거



[그림 Ⅳ-4] 인경의 제논의 역설 탐구

란 사실을 알게 됐어요. 그리고 9분 후에 아킬레스와 거북이가 5400m 지점에서 만나고요. 그 이후로는 쭉 아킬레스가 앞서가게 돼요.

7 연구자: 그런 걸 발견했다.

8 석민: 어제 배운 걸 활용해가지고요. 그런 걸 알게 됐어요. 기울기가 다르면 교점이 하나이고 그런 것을 생각했어요.

9 연구자: 실제로 이런 활동을 해보니까 어떤 것 같아?

10 석민: 활용력, 응용력, 이해력이 더 좋아지는 것 같아요.

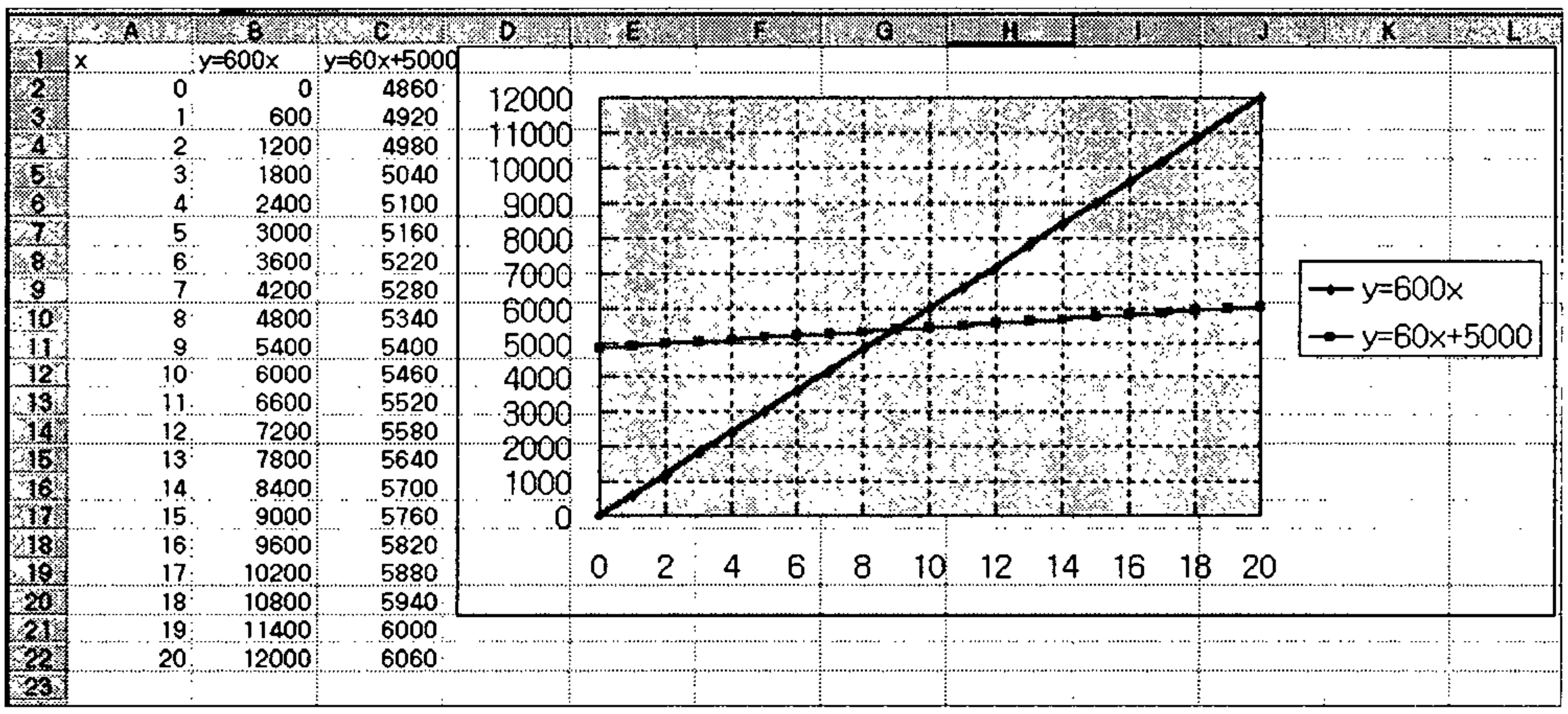
11 연구자: 실제로 속도도 정해보고, 직접 본인이 풀어보는 거니까 그렇겠지? 그 다음에 아까 그것 좀 보여줄래? 스핀 버튼 이용해서 활용하는 것 같았는데.

12 석민: 네. 이걸 시간이라 하고요. 이건 아킬레스의 속도, 이건 거북이의 속도고요 (엑셀 화면을 보면서 설명).

13 연구자: $y=ax$가 아킬레스 거리이고, $y=nx+b$가 거북이 거리라고 했는데?

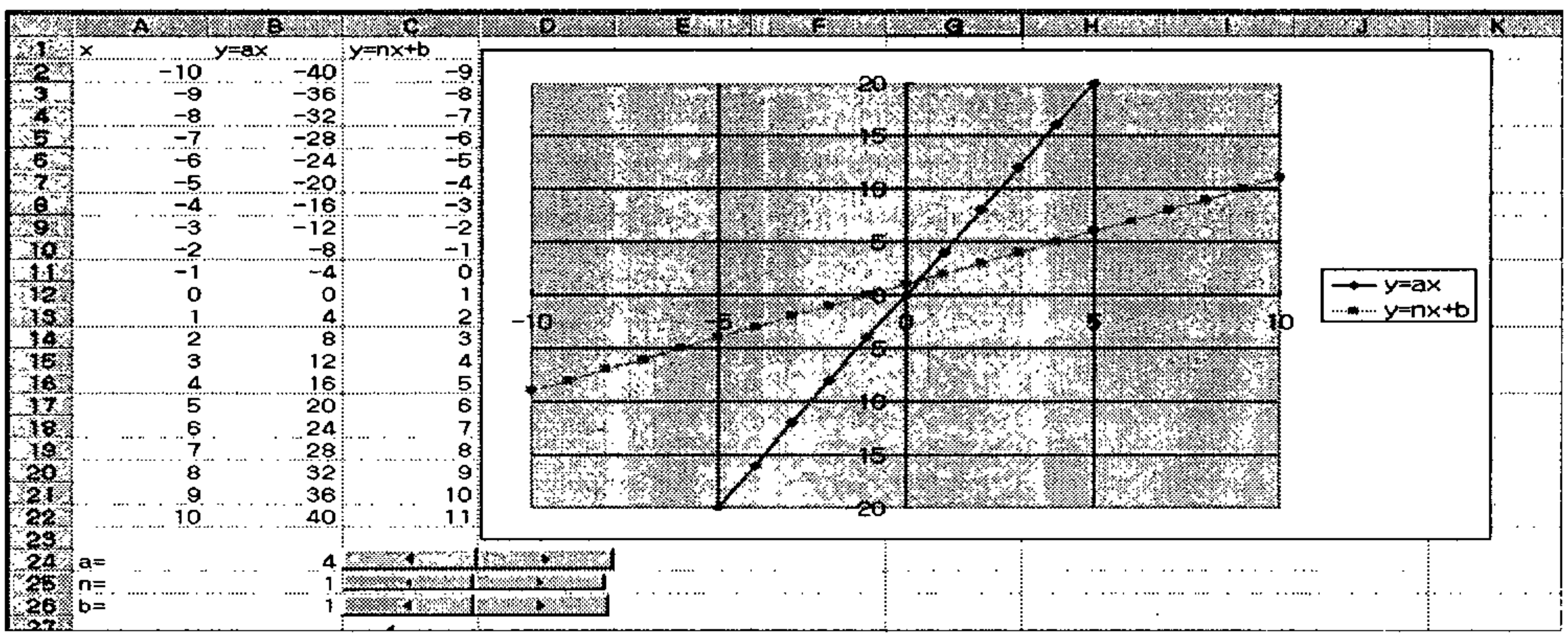
14 석민: 여기서 아킬레스의 속력 a를 조정하면, 아킬레스의 속력을 조절할 수 있고요. 이 파란색($y=ax$의 그래프). 그리고 거북이의 속력도 n스핀 버튼을 이용해서 조절할 수 있어요. 또 거북이가 얼마나 앞서갔는지 세 번째 스핀버튼을 이용해가지고 이것도 조절해서요. 그 만나는 부분을 알아낼 수 있어요.

15 연구자: 음. 이런 활동하니까 어떤 점이 좋았어?



x	y=600x	y=60x+5000
0	0	4860
1	600	4920
2	1200	4980
3	1800	5040
4	2400	5100
5	3000	5160
6	3600	5220
7	4200	5280
8	4800	5340
9	5400	5400
10	6000	5460
11	6600	5520
12	7200	5580
13	7800	5640
14	8400	5700
15	9000	5760
16	9600	5820
17	10200	5880
18	10800	5940
19	11400	6000
20	12000	6060

[그림 IV-5] 석민의 제논의 역설 탐구 1



x	y=ax	y=nx+b
-10	-40	-9
-9	-36	-8
-8	-32	-7
-7	-28	-6
-6	-24	-5
-5	-20	-4
-4	-16	-3
-3	-12	-2
-2	-8	-1
-1	-4	0
0	0	1
1	4	2
2	8	3
3	12	4
4	16	5
5	20	6
6	24	7
7	28	8
8	32	9
9	36	10
10	40	11

a=	4
n=	1
b=	1

[그림 IV-6] 석민의 제논의 역설 탐구 2

16 석민: 이것도 응용력과 필요에 의해서 발견했는데요. 자신감도 생기고 창의력도 좋아지는 것 같아요.

석민은 아킬레스의 속력을 분당 600m, 거북이의 속력을 분당 60m, 그리고 5000m 앞에서 출발한다고 가정했다. 이를 기초로 두 개의 관계식 $y=600x$, $y=600x+5000$을 세우고 그래프와 표로 나타내면서 9분 후에 5400m 지점에서 아킬레스와 거북이가 만나고 9분 이후부터는 아킬레스가 앞서게 됨을 직관적으로 파악했다(4열, 6열). 그리고 석민은 전 시간에 배운 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 활용하여 $y=600x$와 $y=60x+5000$의 기울기가 다르기 때문에 언젠가는 만날 것이라는 것을 확신하고 있었다(6열, 8열). 즉 석민은 엑셀의 탐구활동을 통해 연립방정식의 해와 그래프의 관계, "두 그래프가 한 점에서 만나면, 그 만나는 점의 좌표가 연립방정식의 해이다."라는 것을 일반화시키고 있음을 알 수 있다. 14열을 보면 석민은 엑셀의 동적도구인 스핀버튼을 활용해 제논의 역설문제를 다양하게 조작하면서 관찰한 것을 알 수 있다. 아킬레스와 거북이의 관계식을 $y=ax$, $y=nx+b$, a는 아킬레스의 속력, n은 거북이의 속력, b는 거북이가 앞선 거리로 놓고, a, n, b를 역동적으로 조작하면서 두 관계식의 표와 그래프를 관찰했다. 석민의 이러한 활동은 일차함수의 관계식 $y=ax+b$에서 매개변수 a와 b의 역할을 대상화했다는 것을 보여준다.

지혜는 다른 학생과는 다르게 분당 거리를 초당 거리로 바꾸어 식을 세웠다. 아킬레스는 1초당 200m 가기 때문에 $y=200x$, 거북이는 초당 2m 가고 200m 앞의 지점에서 출발하기 때문에 $y=2x+200$의 식을 세워 그래프를 그렸다. 이러한 탐구를 통해 지혜는 아킬레스의 기울기가 크므로 그래프가 만나는 지점으로부터 아킬레스가 앞서나간다는 사실을 발견했다. 지혜도 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 이해하고 있음을 알 수 있다.

3) 엑셀을 활용한 탐구환경은 어떠한 의미가 있는가?

<u>발췌문 6 : 제논의 역설 오류 탐구 후 소감</u>

1 연구자: 엑셀 활동을 통해 일차함수의 활용문제를 탐구해보았는데 좋았던 점은?

2 석민: 일단 자기 스스로 해보니깐 재미있죠. 컴퓨터 이렇게 조작하는 거 싫어하는 애는 거의 없거든요. 그렇게 해서 수업에 더 집중도 잘 되고 참여도도 높아지고. 또, 스스로 해보니깐 창의력 같은 게 더 좋아지고요.

3 인경: 쉬운 것 같아요. 이걸 하면은요. 그래프를 잘 그리는데요. 그냥 딱 보고 하면 어렵잖아요. 사람이 보고 해야 잘 하잖아요. 안보고 하면 못하잖아요.

4 지혜: 일반적으로 그냥 식으로 계산하는 것보다 실제로 그래프로 보면서요. 얼마 정도의 차이가 나는지 눈으로 쉽게 비교할 수가 있어서 좋아요. 식으로 풀면 계산만 할 뿐 어떻게 해서 어느 지점에서 만났는지 그것까지 정확하게 알 수 없었는데, 일차함수 그래프를 통해서 보면요. 만나는 지점을 확인할 수 있고 원리를 파악하고 학습할 수 있어서 좋았어요.

5 영훈: 아까 답을 구하는 데, 여러 방법들이 있잖아요. 그 방법들을 이 활동을 통해 알게 되었고요. 제가 공식으로 알고 있었던 거를 이해할 수 있었던 거 같아요. 그 공식이 왜 그렇게 되었는지 이해할 수 있게 됐어요.

위의 면담내용을 살펴보면, 학생들 모두 엑셀 활동이 학습에 도움이 되었다고 말하고 있다. 2열을 보면 석민이가 엑셀 활동과 창의적인 사고를 연관시킨 것은 제논의 역설의 오류를 밝히는 탐구활동에서 나름대로 독창적으로

스핀버튼을 활용했기 때문이다. 3열은 인경이가 수식에 약하기 때문에 표와 그래프의 직관적인 정보가 도움이 되고 있음을 암시하고 있다. 실제로 인경은 엑셀 활동을 하기 전 일차함수의 관계식 세우는 것을 상당히 어려워했지만, 엑셀 활동 이후에는 표와 그래프의 탐구활동으로 수식에 상당히 익숙해졌다. 지혜는 수학적인 능력이 뛰어난 학생이라, 교과서에서 다루는 활용문제를 잘 해결했지만, 어떻게 해서 어느 지점에서 만나는지는 정확하게 알 수 없다는 말을 하였다. 하지만, 엑셀 활동을 통해 그래프와 표를 통해서 만나는 점을 눈으로 확인함으로써 원리를 파악할 수 있었다고 한 것(4열)은 엑셀 활동이 실제로 학생들이 일차함수의 원리를 이해하는 데 도움이 되었음을 의미한다. 그리고 영훈이도 엑셀을 활용한 탐구 활동을 통하여 문제를 해결하는 여러 가지 방법을 알았고, 공식이 가지고 있는 의미를 이해할 수 있었다(5열)고 말했다. 이러한 학생들의 반응들은 엑셀이 지필환경을 보조할 수 있는 강력한 도구임을 시사해준다.

V. 결론 및 논의

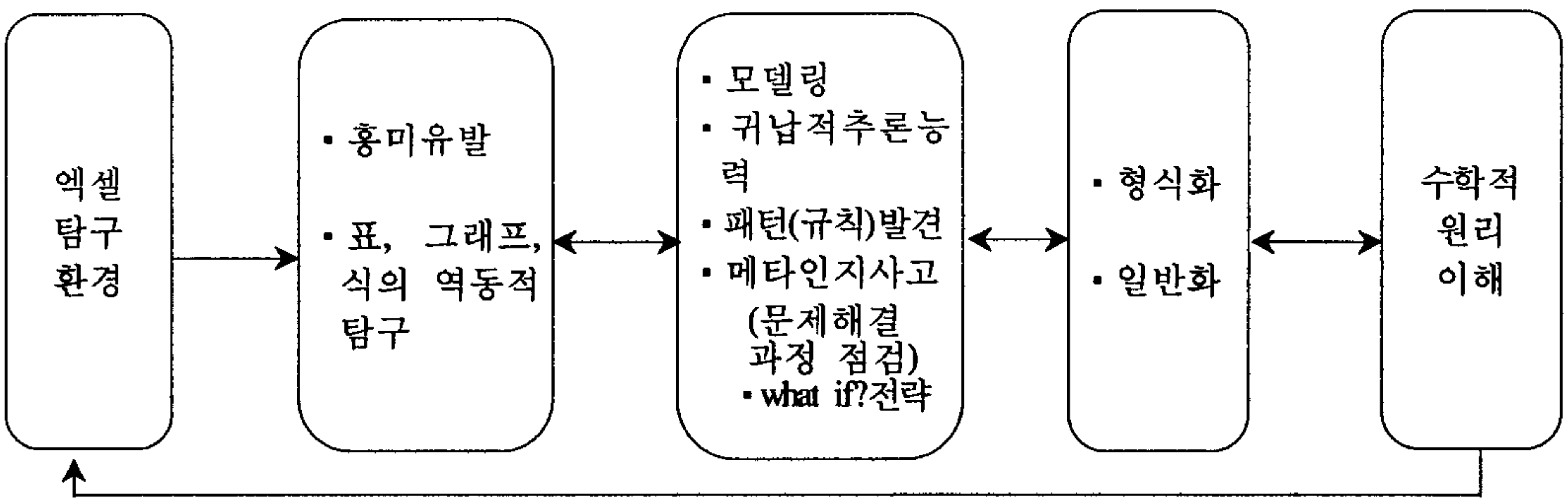
본 연구의 목적은 중학교 2학년 학생들이 엑셀을 활용하여 연립방정식과 일차함수 그래프에 관련된 내용을 학습할 때 방정식과 그래프의 관계 개념을 어떻게 형성해나가는지 분석함으로써 효과적인 교수-학습방안을 모색하는 데 있다.

교수실험 전 진단평가에서 학생들은 연립방정식의 해를 그래프를 통해 구해보라는 질문을 했는데도 불구하고 가감법, 대입법을 활용하여 교점의 좌표를 구했을 뿐, 표와 그래프를 활용하여 교점의 좌표를 구하려는 시도는 하지 않았다. 하지만 교수실험 후, 학생들은 두 일차함수의 식을 표와 그래프로 나타낸 다음 교점의 좌표를 확인하는 활동을 통해 연립방정식의 해가 두 일차함수 그래프의 교점의 좌표라는 사실을 구체적으로 이해하였다. 또한, 엑셀 활동을 통해 연립방정식의 해의 개수와 일차함수의 식 사이의 관계를 분석적으로 발견하였다. 학생들은 두 일차함수의 관계식 $y=ax+b$에서 a와 b가 각각 다르면 연립방정식의 해는 1개, a가 같고 b가 다르면 두 그래프가 평행하기 때문에 해가 없고, a, b가 각각 같으면 해는 무수히 많다는 것을 발견하였다.

엑셀을 활용해 제논의 역설의 오류를 탐구하는 활동에서 학생들은 아킬레스의 속력, 거북이의 속력, 거북이가 아킬레스보다 몇 m앞에서 출발했는지를 추측하고 이러한 내용을 대수식, 표, 그래프로 나타내어 관찰하였다. 관찰 결과 학생들은 거북이가 아킬레스보다 몇 m앞에서 출발하든지간에 거북이의 속력으로는 아킬레스를 이길 수 없다는 사실을 표와 그래프를 통해 확인함으로써 제논의 역설이 오류가 있음을 이해하였다. 특히, 인경은 함수의 활용문제를 상당히 어려워했지만, 엑셀을 활용한 탐구활동에서는 스스로 속력을 정하고 식을 만들고 표와 그래프로 나타내는 과정을 상당히 흥미 있어 하는 것을 발견할 수 있었다. 석민은 아킬레스의 식 $y=ax$와 거북이의 식 $y=nx+b$을 만들고 스핀버튼을 활용해 a, n, b 의 값을 다양하게 조작하면서 두 그래프의 관계를 창의적으로 탐구하였다. 즉, 엑셀을 활용한 탐구활동에서 학생들은 능동적으로 그래프의 변화를 관찰하면서 문제해결과정을 점검하고 수학적인 패턴을 스스로 찾았고, 이를 통해 연립방정식과 일차함수 그래프의 관계를 형식적으로 일반화하였다. 이러한 교수실험 결과는 [그림 V-1]과 같이 도식화 할 수 있고 Masalski(1990), Garay(2001), Wilson et al.(2004)의 연구결과와 부합한다.

일반적으로 지필환경에서는 두 일차함수의 그래프를 활용하여 연립방정식의 해를 구하는 방법을 한 가지 예를 들어 단순하게 설명한 다음, 예제와 문제에서 일차함수 그래프를 이용해 연립방정식을 풀도록 유도하고 있다. 이와 같은 학습 환경은 다양한 연립방정식의 유형에 따른 일차함수의 그래프를 표현할 수 있는 탐구기회의 제한으로 이해의 부족을 초래할 수 있고, 이로 인해 학생들은 연립방정식의 해와 두 일차함수 그래프의 관계를 형식적으로 일반화하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 즉, 학생들에게는 연립방정식과 두 일차함수 그래프의 관계를 자연스럽게 일반화시킬 수 있도록 식과 표와 그래프를 통합적으로 다양하게 다룰 수 있는 탐구환경이 필요하다.

엑셀환경에서 다양한 식을 표와 그래프로 나타내고, 스핀버튼을 활용해 그래프를 역동적으로 변화시키면서 탐구하는 것은 디너스(Dienes)가 주장하는 '수학적 다양성의 원리'[3]와 부합한다고 할 수 있다. 하지만 엑셀의 탐구적인 환경을 효과적으로 활용하려면 교사의 역할이 무엇보다 중요하다. 즉 교사는 엑셀을 활용하여 지도할 수 있는 전문성이 있어야 하며, '메타-인지 이동'[4]이 일어나지 않도록 학습내용 선택이나 과제의 계열 구성부터 학생 활동과정, 교사의 적절한 피드백에 이르기까지 세심한 활동계획을 구성해야 한다. 또한, 학생이 엑셀의 탐구환경에서 발견한 일부 내용을 가지고 그 학생이 탐구관련 수학적 내용을 완전히 이해했을 것이라는 죠르단 효과[5]에 빠지지 않도록 주의해야 한다.



[그림 V-1] 엑셀 탐구 활동 흐름도

3) 딘즈(Dienes)는 자신의 학습 이론을 구현하기 위한 효과적인 학습 원리를 역동적 원리(Dynamic Principle), 구성의 원리(Constructivity Principle), 수학적 다양성의 원리(Mathematical Variability Principle), 지각적 다양성의 원리(Perceptual Variability Principle)의 4가지로 제시하였다. 수학적 다양성의 원리란 "수학적 개념은 보통 몇 개의 변인을 포함하고, 개념을 구성하는 변인은 변화하지만 이 변인들 사이의 항구적인 관계가 수학적 개념이다. 개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제공하려면, 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다는 것이다.

4) 메타-인지 이동(meta-cognitive shift)은 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하기 위해 도입된 교수학적 보조수단에 학생들의 사고가 집중되는 현상을 의미한다. 즉, 수학적 지식의 개인화/배경화에 주목한 나머지 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 자체로부터 교수학적 고안물로 옮겨가는 것을 의미한다(이경화, 1996a, 재인용). 엑셀을 활용한 교수학적 상황에서 학생들이 주어진 과제를 해결하거나 수학적 지식을 학습하는 데 집중하기보다는 엑셀의 기능적인 측면을 이용하여 문제를 쉽게 해결하는 것에 집중하는 메타인지 이동이 일어날 수 있음에 주의해야 한다.

5) 죠르단 효과(Jourdain effect)는 탈배경화/탈개인화 측면을 과대평가하는 현상으로서, 학생의 사소한 행동을 보고 학생이 특정한 수학 지식을 형성했다고 잘못 판단하는 경우를 말한다(황혜정 등, 2007).

본 연구의 교수실험 결과는 엑셀을 활용한 탐구학습 환경이 지필환경을 보완할 수 있음을 시사한다. 직관적, 역동적, 탐구적인 기능을 가지고 있는 엑셀은 학생들의 연립방정식과 일차함수 그래프의 관계를 이해하는 데 중요한 매개역할을 할 수 있을 것으로 판단된다. 아직까지는 교과서에서 컴퓨터의 활용 예를 일부 제시하는 정도로 다루고 있지만, 실제로 정적인 지필환경과 동적인 교육공학의 환경을 통합한 새로운 교육과정의 구성에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2004). 수학 8-가. 서울: 고려출판.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2007). **수학교육과정과 교재연구**. 경문사.

김지연 (2005). **엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서의 상호작용**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

김현주 (2005). **엑셀 환경에서 대수 문장제 해결 경험을 통한 학생들의 문자 인식과 문자식 표현에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

류희찬 (2004). 수학교육에서 탐구형 소프트웨어의 활용방안. **청람수학교육 제 14집**, pp. 1-15. 한국교원대학교 수학교육연구소.

손홍찬 (2006). **스프레드시트를 활용한 수학적 모델링 활동에서의 수학적 발견과 정당화**. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

신동선 · 류희찬(1998). **수학교육과 컴퓨터**, 경문사.

양혜진 (2003). **엑셀을 활용한 변수 개념 지도에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

우정호 (1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

장경윤 (1997). 스프레드시트를 이용한 수학교육적 활동. **청람수학교육, 제 6집**, pp.143-158. 한국교원대학교 수학교육연구소.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재 (2000). **수학 8-가**. (주)금성출판사.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽 (2007). **수학교육학신론**. 문음사 도서출판.

Friedlander, A. (1998). An excellent bridge to algebra. *Mathematics Teacher, 91*(5), pp.382-383.

Garay, A. (2001). *Using multiple coordinated representations in a technology-intensive setting to teach linear functions at the college level.* University Of Illnois At Urbana-Champaign(0090). Ed.D.

Healy, L. (1990). An Ideal Spreadsheet for the Mathematics Classroom, *Micromath, 6*(3).

Huntley, MA., Zucker, AA., & Edtey, ET. (January 2000). *A review of research on computer-based tools (Spreadsheets, graphing, data analysis, and probability tools), with annotated bibliography.* Arlington, VA: SRI international, Project Po 3377.

Kaput, J. (1993). The Urgent Need for Proleptic research in the representation of quantitative relationships. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), *Integrating research on the graphical representation of* *functions*(pp.279-312). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology: Integrating research on learning and instruction. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*(pp.189-238). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

Masalski W. J. (1990). *How to use the spreadsheet as a tool in the secondary school mathematics classroom*, Reston, VA : NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Sharan, M. (1998). *Qualitative Research and case study application in education.* 강윤수 외 7인 (역) (2005). 정성연구방법론과 사례연구. 교우사.

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, pp353-383.

A Case Study on Application of Linear Function using Excel

Lee, Kwang Sang (Seosan Jungang High School)

The purpose of this study is to search the effective teaching-learning program by considering how affect on formation of linear function using Excel. This study was based on qualitative case study. The teaching experiment using Excel executed with five 8th graders' students for second research content. Teaching experiment was performed for two classes. Collecting the data was conducted via observations and interviews with students. The data include audio and video recording of the students' work, students' worksheets and detailed field notes. The conclusions drawn from teaching experiment are as follows: First, when students explored relevancy content of function in Excel environment, formation of concept of function was facilitated by experiencing operation of algebraic formulas, tables and graphs. We could infer that formation of concept was effected by conjecture activity and iterative process of feedback through Excel environment. Second, the students explored the changes very interestingly making algebraic formulas and presenting tables and graphs. The students were familiarized with observation on algebraic formulas, graphs and tables concurrently. Also, they tried to look for general rules through inductive observation. According to this study, we noticed that exploration learning environment using Excel could supplement paper-and-pencil environment.

* key words : formation of concept(개념형성), Excel environment(엑셀 환경) , explorative process(탐구과정).

논문접수 : 2008. 2. 11
심사완료 : 2008. 3. 14