대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.1, 123-138. Mar. 2008

넓이 개념의 SMSG 교수-학습 방식에 대한 비판적 고찰

박 선 용* · 최 지 선** · 박 교 식***

이 연구의 목적은 새수학의 전형이라 할 수 있는 SMSG의 넓이 교수-학습 방식에 대한 비판적 고찰을 통해 새수학 실패의 원인을 교수학적 측면에서 밝히는 것이다. SMSG의 계량도식에 따른 넓이 도입 방식의 독특성에 대해 파악하기 위해 Euclid의 《원론》, De Morgan의 《*Elements of arithmetic*》, 그리고 Legendre의 《*Elements of geometry and trigonometry*》를 살펴보았다. 또, SMSG의 넓이 교수-학습 방식에 대한 Wittenberg(1963)과 Moise(1963)의 논쟁에 대해 고찰함으로써 초등성과 넓이개념에 대한 심상 형성이 SMSG의 넓이 교수-학습 방식의 성패의 중요한 관건이었다는 점을 확인하였다. 더 나아가 SMSG 넓이 교수-학습 방식이 닮음, 같은 넓이, 통약불가능성 등과 같은 수학 내용과의 단절을 초래한다는 점에서 초등성과 기하적 심상의 부재를 낳을 수밖에 없었고, 그것이 SMSG 교수-학습 실패의 원인이라는 것을 보였다.

Ⅰ. 서 론

새수학의 실패에 대하여, "새수학 프로그램의 설계가 과학적 연구에 의해 진행되지 않았다(Moise, 1962: 98)"는 자성의 목소리도 있었지만, 새수학의 이상은 교사교육이 제대로 이루어졌으면 실현되었을 것이라고 보는 견해가 여전히 있다(數學教育硏究會, 1989). 이것은 새수학 실패를 교수학적인 차원에서 규명한 연구가 별로 없기 때문이기도 하다. 이러한 견해를 옳지 않다는 것을 보이기 위해서는 새수학의 실패를 교수학적인 차원에서 규명하는 연구가 필요하다. 새수학 당시에도 교사교육은 새수학의 성공을 위한 중요한 가정이었다. 예를 들어 Moise(1962: 86)는 새수학은 "준비된 교사가 있다면 이것(여기서는 고등학교 12학년에서 미적분학을 가르치는 것과 같은 프로그램)이 실현될 수 있다는 점을 보여주었다. 여기서 '가정 부분'이 중요하다."고 주장했다. 하지만 실제로는 교사교육과 관계없이 아동들의 인지적 수준을 고려하지 않은 채 현대수학을 성급하게 도입하는 반-교수학적 전도이었기에 새수학의 적용은 실패할 수밖에 없었다(Freudenthal, 1973). 비록 Moise(1962)가 12학년이 되기 전까지는 새수학 프로그램에 현대수학을 포함시키기 않았기 때문에 현대적이라는 이유로는 어느 누구도 정죄할 수 없다고 했지만, 당시의 교육적 움직임이 현대수학의 방법 및 정신과 조화를 이루려는 교육과정 재편 작업이었다는 점을 부정할 수는 없다.

현대수학을 수학교육에 접목시키려는 시도 자체가 새수학 운동의 부적절성을 말한다고 볼 수는 없다. Moise(1962)에 의하면, 새수학 운동

* 경인교육대학교 강사, 교신저자(polya@paran.com).
** 경인교육대학교 강사(everii@hamail.net)
*** 경인교육대학교(pkspark@dreamwiz.com)

과 관련된 유일한 과학은 수학 그 자체인 바, 당시의 기획 작업은 철저한 수학적 분석을 바탕으로 이루어진 것으로, 그 이면에 자리 잡고 있는 아이디어는 그렇게 쉽게 파악할 수 있는 것이 아니다. 하지만, 결과적으로는 "(당시의 교육으로 말미암아) 상상력이 결여된 가르침을 유발했고, 과도한 형식적 연습을 하게 하여 (학생의) 창조성마저 제한해 버리는(Blank, 1966: 15)" 비극적 결과를 초래했다. 이것은 교사교육의 탓으로만 돌릴 수 없는 무엇인가 더 근본적인 원인이 새수학 운동의 실패의 배후에 자리 잡고 있음을 시사한다. "최상의 수학 수업이라도 그것이 독단적 방법을 따르는 한 그 모든 명료함에도 불구하고 철저한 이해를 가져오는 데 실패(Nelson, 1949: 37)"할 수 있다.

새수학 운동의 기획자들은 자신들의 접근 방식에 대해 그것이 수학교육의 신기원을 이룩하는 것이라 판단했다. 하지만 일단의 수학자들은 새수학 운동이 수학적 즐거움과 의미를 누리게 하기는커녕 기계적 수행을 답습하는 '잃어버린 세대'를 낳을 것이라고 예견했다(Buck, 1966: 26). 이것은 새 수학이 실패할 수밖에 없었던 이유를 수학교육의 이상을 실현하기 위한 접근 방식 차원에서 구체적으로 조명해 보는 작업이 이루어져야 함을 시사한다. Birkhoff 공리계를 기초로 대수와 기하의 유기적 결합을 시도했던 '계량 도식(metric scheme)'은 새수학의 전형이라 할 수 있다. 새수학 운동의 기획자들은 그것을 '중요한 혁신'으로 간주했다. 그런데 그러한 접근 방식에 의해 가장 큰 영향을 받는 것 중의 하나가 넓이 개념의 교수-학습이라는 점에서, 새수학에 대한 비판적 고찰을 위해서는 그러한 교육을 위한 접근 방식에 대한 상반된 입장과 넓이 개념 교수-학습의 변천사를 중심으로 한 교수학적[1] 분석 작업이 요청된다. 새수학의 진정한 모습을 보기 위해서는 근본적인 수준에서의 교수학적 분석이 필요하다(Vollrath, 2007: 39).

이런 관점에서 이 연구에서는 넓이 개념에 한정해서 새수학의 실패를 교사교육의 차원이 아니라 교수학적 차원에서 조명한다. 이를 위해 먼저 Euclid의 《원론》, De Morgan의 《*Elements of arithmetic*》, Legendre의 《*Elements of geometry and trigonometry*》에 나타난 넓이 개념의 도입 방식 및 SMSG(School Mathematics Study Group)의 넓이 교수-학습 방식을 개관한다. 그리고 SMSG 방식에 대한 Wittenberg(1963)의 비판을 검토하고, 이에 대한 Moise(1963)의 답변을 검토한다. 그런데 Moise의 답변에 대한 Wittenberg의 반박은 이루어지지 않았지만, 그가 Moise의 이러한 답변에 수긍했다는 증거는 없다. Wittenberg(1925-1965)는 이러한 논쟁이 있은 2년 후에 사망했기 때문이다. 이 연구에서는 새수학을 옹호했던 대표적인 수학자 중의 한 사람인 Moise의 답변을 비판적으로 고찰하여 새수학의 실패가 교수학적으로 불가피했다는 것을 보인다.

Ⅱ. 넓이 개념의 도입 방식에 대한 역사적 개관

여기서는 넓이 개념의 도입 방식에 대해 개관하는 바, 그것은 SMSG의 넓이 교수-학습 방식이 과거의 넓이 교수-학습 방식으로부터 얼마나 멀리 떨어져 있는지, 그리고 SMSG 방식이

1) 여기서 '교수학적'은 '가르치는 것과 관련된'을 의미하는 것이 아니라 '수학의 특정한 내용과 관련된'을 의미한다(박교식, 2006: 44).

다른 방식에 비해 어떤 특성을 가지고 있는지를 확인하기 위한 것이다. 이러한 개관을 통해 SMSG의 방식이 과거의 역사 발생적 방식으로부터 상당히 유리되어 있다는 것을 알 수 있다. 또, 과거의 방식은 기하를 중심으로 산술이 보조적인 역할을 하는 방식이었으나, SMSG 방식에서는 그것이 역전되었다는 것을 알 수 있다.

1. Euclid 《원론》

넓이 개념의 교수-학습을 위한 교재화는 Euclid 《원론》까지 거슬러 올라간다고 할 수 있다. Euclid 《원론》에서는 선분의 길이와 선분의 길이를 곱한다는 것의 의미를 정의하지 않았고, 평행사변형의 넓이를 구하는 공식을 형식화하지 않았다. 이것은 Euclid가 같은 종류의 양 사이의 비를 관계로만 여기고, 그것을 수학적 대상으로 형식화하지 않았기 때문이기도 하다(Roche, 1998). 또, 평행사변형의 넓이공식의 형식화에 관심을 보이는 대신 통약불가능성으로 인해 불거진 도형의 비례관계를 논리적으로 전개하는데 관심을 보였기 때문이었는지도 모른다(Mueller, 1981).

Euclid 《원론》에서는 도형을 구성하는 선분끼리 비교하지만 선분과 선분을 곱하여 넓이를 구성하지는 않는다. 기하학적 도형에 비례관계를 적용하는 《원론 VI》에서는 첫 번째 정리인 "높이가 같은 두 삼각형(평행사변형)의 넓이는 그 밑변의 길이에 비례한다."를 이용하여 다른 정리들을 증명한다. 여기서 비례관계는 Eudoxus가 정의한 것으로 두 선분의 길이가 통약불가능한 경우까지 포함한다(Heath, 1952). 즉, 이것은 Euclid가 통약불가능성 때문에 두 선분의 길이를 비교하는 것에 대한 엄밀한 증명을 하고자 했다는 것을 의미한다. 이 정리를 통해 두 선분의 비례관계를 이용하여 두 도형의 관계를 정리하지만, 선분의 길이와 선분의 길이를 곱하여 직사각형을 구성하지는 않는다. 선분과 선분의 곱 대신에 '복비(duplicate ratio)'를 사용한다. 예를 들어 "대응하는 각의 크기가 같은 평행사변형의 넓이의 비는 같은 각을 끼고 있는 두 변의 길이의 비의 복비와 같다(VI권, 정리23)."는 정리는 언뜻 보면 평행사변형의 넓이공식에 대응한다. 하지만 이 정리는 양과 양의 곱을 정의하지 못하기 때문에, 비례관계를 이용하여 우회적으로 증명하는 것이다.

2. 산술화된 직사각형의 넓이: De Morgan의 방식

15세기 중반에 인쇄술이 발명되고 상업이 발전함에 따라, 상업적인 산술 교과서를 출판하기 시작했다. 대부분의 교재는 명수법, 가감승제, 제곱근, 가정법 등을 포함하고 있었다. 17세기에는 더 많은 수의 교과서가 출판되었으나, 대부분 상업적인 차원에서 알고리즘화된 산술법칙만을 포함하였고, 반면 증명은 점차 자취를 감추었다. 18세기 말경부터 이러한 방식에 대한 비판으로 증명이 나타나기 시작했으나, 단지 페이지 아래에서 각주로 제시했기 때문에, 교수-학습 상황은 크게 달라지지 않았다. 그래서 교사와 학생들은 사실상 증명에 조금도 주의를 하지 않고 법칙을 학습할 수 있었다(Cajori, 1917: 211). 이를 두고 De Morgan은 "이 나라에서는 이론적인 산술이 파멸했다. 아니, 차라리 그 육성이 방해되었다고 할 것이다(Cajori, 1917: 211, 재인용)."라고 비판했다.

De Morgan은 어떤 정리에 대한 이유를 체계적으로 설명하는 최초의 교과서 《*Elements of arithmetic.*》을 저술했다. 이 교과서의 부록에는 산술규칙을 기하학에 응용한 결과들, 예를 들어 직사각형, 평행사변형, 그리고 삼각형의 넓

이, 내접원의 반지름, 피타고라스 정리를 이용한 직각삼각형의 변의 길이, 호의 길이, 원의 넓이, 구의 겉넓이, 구의 넓이, 원뿔의 겉넓이, 원기둥의 겉넓이 등을 구하는 공식을 포함하고 있다(De Morgan, 1846: 217-220). 그런데 이 부분에 도형의 그림을 하나도 제시하지 않았을 정도로, 오직 산술적인 계산 방법을 기하학에 응용한 결과들만을 나열하였다. De Morgan은 기하학적 양을 수로 표현할 때, 제약이 있다는 것을 알았음에도 불구하고, 산술적인 비례관계를 기하학적 도형에 적용했다. De Morgan(1846: 217)에 의하면, 선분의 길이와 선분의 길이를 곱하는 것은 한 선분을 단위로 삼고 다른 선분을 그 단위가 반복된 횟수로 해석될 수 있다. 이에, 그는 기하학적 량을 구성하는 단위를 구별할 것을 강조하였다. 구체적으로, 그는 임의의 선분의 길이는 피트 혹은 인치로, 겉넓이는 주어진 단위에 대응하는 정사각형 단위로, 그리고 주어진 단위에 대응하는 정육각형 단위로 표현되어야 한다고 보았다.

선분의 길이와 선분의 길이를 서로 곱하여 직사각형의 넓이를 구성한다는 아이디어는 19세기에서조차도 쉽게 형식화되지 못했다. 19세기에는 산술규칙을 기하학에 적용하려는 경향이 강하게 나타났고, 그 결과 직사각형의 넓이도 산술규칙을 적용하여 형식화하고, 그것을 타당한 것으로 받아들였다. 즉, 직사각형의 넓이를 단위길이가 가로에 포함된 횟수와 세로에 포함된 횟수를 곱한 것으로 정의하고, 이에 대한 정당화는 보통 단위정사각형의 개수를 구하는 방식으로 이루어졌다. 한편, De Morgan (1831/1910)은 이런 점을 충분히 고려해 《*On the study and difficulties of mathematics*》에서 학생들이 대수적 개념으로서 직사각형의 넓이를 이해하기 어려워 한다는 것을 지적하고 직사각형의 넓이가 무엇인지를 다음과 같이 상세하게 제시했다.

모든 넓이는 직사각형의 측정으로 환원된다. 왜냐하면 모든 도형은 삼각형으로 나누어지고, 모든 삼각형은 밑변의 길이와 높이가 같은 직사각형의 반이기 때문이다. 단위넓이 혹은 공간의 양, 다른 모든 공간을 표현하기 위해 선택된 용어는 완전히 임의적이다. 그럼에도 불구하고, 일반적인 정리는 단위넓이로서 단위길이로 선택된 선분으로 구성된 정사각형을 선택하는 것이 편리하다고 지적한다. 만약 직사각형의 변이 a단위와 b단위를 포함한다면, 직사각형 자체는 그 단위로 그려진 정사각형 ab를 포함한다. 이 명제는 a와 b가 분수인 경우에도 성립한다. 변의 단위의 개수가 $\frac{m}{n}$ 와 $\frac{p}{q}$ 이라고 하면, 첫 번째 것의 $\frac{1}{nq}$ 인 또 다른 단위를 취하거나 첫 번째 단위를 nq개로 나누어서 그 중 하나를 취한다. 그런 다음, 앞서 인용했던 명제에 의해서, 큰 단위 위에 그려진 정사각형은 작은 정사각형 $nq \times nq$ 를 포함한다. 또 다시 $\frac{m}{n}$ 와 $\frac{mq}{nq}$ 는 같고, $\frac{p}{q}$ 와 $\frac{np}{nq}$ 는 같기 때문에, 첫 번째 단위를 nq개로 나누어서 mq개와 np개를 취함으로써 형성된다. 즉, 작은 단위 mq개와 np개를 포함한다. 따라서 직사각형은 작은 단위 위에 그려진 정사각형 $mq \times np$ 개를 포함한다. 그러나 더 큰 단위 위에는 정사각형 $nq \times nq$ 개가 존재한다. 따라서 $\frac{mq \times np}{nq \times nq}$ 또는 $\frac{mp \times nq}{nq \times nq}$ 또는 $\frac{mp}{nq}$ 는 직사각형에 포함된 큰 정사각형의 개수이다. 그러나 $\frac{mp}{nq}$ 는 $\frac{m}{n}$ 와 $\frac{p}{q}$ 의 대수적 곱이다. 이 명제는 직사각형의 변이 단위와 통약불가능한 경우에도 참이다. 단위가 어떠할 지라도, 우리는 어떤 통약불가능한 크기에 대해서도 증명한다. 우리가 원하는 만큼 a를 크게 해서, $\frac{b}{a}$ 는 너무 작고 $\frac{b+1}{a}$ 는 너무 큰, 그런 두 자연수 a와 b를 찾을 수 있다. AB와 AC가 직사각형 AK의 두 변이라고 하고, 그것은 단위 M과 통약불가능하다고 하자. 선분 AF는 $\frac{b}{a}$ 를 포함하고 AC

보다 크고, AG는 $\frac{b+1}{a}$ 단위를 포함하고 AC보다 크다고 하자. 그리고 그림을 완성한다. 직사각형 AH와 AI는 각각 $\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$ 정사각형 단위와 $\frac{b+1}{a}\times\frac{c+1}{d}$ 정사각형 단위를 포함하고 첫 번째 것은 주어진 직사각형보다 작다. 두 번째 것은 더 크다. 결과적으로 주어진 직사각형은 크게 다르지 않다. 그러나 AH와 AI의 차이는 $\frac{(b+1)(c+1)}{ad}-\frac{bc}{ad}$ 또는 $\frac{b+c+1}{ad}$ 또는 $\frac{b}{ad}+\frac{c}{ad}+\frac{1}{ad}$ 이다. 근사 과정을 더 여러 번 진행한다. $\frac{b}{a}$M 이 항상 AC보다 적지만 그것으로 계속적으로 접근해가도록 그 결과가 이루어질 것이다. 따라서 $\frac{1}{d}\frac{b}{a}$M 은 항상 $\frac{AC}{d}$ 보다 작고, AC는 그대로이기 때문에 d 는 우리가 원하는 만큼 증가시킬 수 있는 수이다. 근사값을 구함으로써, $\frac{AC}{d}$ 와 $\frac{1}{d}\frac{b}{a}$M 는 우리가 원하는 만큼 작아질 것이다. 즉, $\frac{1}{d}\frac{b}{a}$ 는 우리가 원하는 만큼 작게 만들 것이고, 따라서 $\frac{1}{a}\frac{c}{d}$ 도 같은 방법으로 이루어진다. 또한 $\frac{1}{ad}$ 은 원하는 만큼 작아질 것이고, 따라서 그 합 $\frac{1}{d}\frac{b}{a}+\frac{1}{a}\frac{c}{d}+\frac{1}{ad}$ 도 그렇다. 그러나 이 수는 직사각형 AH와 AI의 차이를 나타내고, AK와 AI의 차이보다 더 크다. AB와 AC를 나타내는 근사된 분수는 우리가 원하는 만큼 가깝게 취할 수 있고, 이 직사각형의 정사각형 단위의 개수를 나타낸다(De Morgan, 1831/1910: 282-283).

이러한 도입 방식과 관련해, De Morgan은 특히 산술적 계산과 기하학적 구성 사이의 차이점에 주의할 것을 당부하였다. 그에 의하면, 그리스 기하학자들은 대수를 기하학에 적용하는 것 대신에 기하학에서 대수를 연역했다. 예를 들어, aa 는 a 의 정사각형(square of a), aaa 는 a 의 정육면체(cube of a), ab는 a 와 b의 직사각형(rectangle of a and b)이라고 불렀다. 그런데 그러한 용어의 오랜 사용과 정착으로 인해 당시의 학생들은 흔히 단위의 개수가 a 인 선분 위에 그려진 정사각형에 대해 정사각형단위 aa 개를 포함한다고 보고 더 이상의 형식화를 시도하지 않기 때문에, 그는 대수에서 사용되는 aa 와의 구별을 제기했던 것이다. 구체적으로, De Morgan(1831/1910: 284)은 "학생은 대수에서 제곱과 기하학에서 정사각형이 서로 다른 것을 의미한다는 것을 생각해야 한다. 이러한 혼동을 피하기 위해서 aa 를 a 의 이제곱, aaa 를 a 의 세제곱이라고 부르는 것에 익숙해지는 것이 더 좋다."고 제안하였다. 이와 같이 19세기까지도 직사각형의 넓이를 가르치거나 배우는 것은 간단한 작업이 아니었다. 그 안에는 통약불가능성이라는 어려움이 존재했고, 그것을 표현하는 기호도 제한되어 있었다.

3. 산술을 도입한 Euclid 《원론》의 개정: Legendre의 방식

산술계산의 편리함은 19세기 후반 기하교과서의 구성에 상당한 영향을 미치게 되었는데, Legendre의 《*Elements of geometry and trigonometry*》은 그 전형을 보여준다. 특히, 그 책에서는 Euclid 《원론》과 달리 측정단위를 1로 둠으로써 여러 가지 도형의 크기를 구하는 공식을 유도할 수 있었다. 예를 들어, 직사각형의 넓이공식의 경우 "높이가 같은 직사각형은 그 밑변의 길이에 비례한다."라는 정리를 두 밑변의 길이가 통약가능한 경우와 통약가능하지 않은 경우로 구분하여 증명한 이후에 측정단위를 1이라고 가정하여 유도하였다.

두 직사각형은 그것의 밑변과 높이의 곱에 비례한다.

두 직사각형 ABCD와 AEGF에서 ABCD와

AEGF의 비는 AB×AD와 AE×AF의 비라는 것을 보일 것이다. 각 DAB와 EAF가 서로 엇각이 되도록 위치시킨다. 그런 다음 변 CD와 GE가 점 H에서 만나도록 그린다. 직사각형 ABCD와 ADHE는 같은 높이 AD를 갖는다. 따라서 $ABCD : ADHE = AB : AE$. 직사각형 ADHE와 AEGF는 같은 높이 AE를 갖는다. 따라서 $ADHE : AEGF = AD : AF$. 이 비례식을 항별로 곱하고 공통항 ADHE를 없애면 $ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF$ 을 얻는다. 증명되었다.
AE와 AF가 같고, 직선단위와 같다고 가정하면, 직사각형 AEGF는 단위넓이가 되고, 다음과 같이 된다. $ABCD : 1 = AB \times AD : 1$. 즉, $ABCD = AB \times AD$. 따라서 직사각형의 넓이는 밑변의 길이와 높이의 곱이다. 즉 직사각형의 단위넓이의 개수는 밑변의 직선단위의 개수와 높이의 직선단위의 개수를 곱한 것이다(Legendre, 1866: 98).

Legendre의 《*Elements of geometry and trigonometry*》은 Euclid 《원론》을 개정한 것이었으나, 기하적인 내용을 산술적인 형태로 제시할 수 있어서 Euclid 《원론》보다 직관적이고 논리적인 것으로 평가받는다.

III. SMSG의 넓이 교수-학습 방식

역사적으로 두 선분의 길이가 통약불가능한 경우에 직사각형의 넓이를 정의하는 것은 쉬운 일이 아니었지만, 19세기말에 실수공리를 형식화하면서 상황이 급격하게 변하게 되었다. 특히, 20세기에 Birkhoff(1932)는 유클리드 기하학에서 성립하는 공리계를 실수공리 위에서 새로이 구성하였는데, 이는 SMSG의 수학적 배경이 되었다. 즉, SMSG는 선분의 길이를 수로 나타내기 위하여 실수공리를 받아들이고 실수체 위의 수의 연산을 기본가정으로 한 후 평면도형의 넓이를 실함수 값으로 받아들였다.

도형의 넓이에 실수값을 대응시키기 위해서는 정규성(normalization) 공리를 제시해야 한다(Hartshrone, 2000). 정규성 공리는 다음 3가지 형태로 나타낼 수 있다. 첫째, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이다. 둘째, 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이는 a^2이다. 셋째, 직사각형의 넓이는 가로변의 길이와 세로변의 길이의 곱이다. 이와 관련해, SMSG는 10학년 학생들에게 첫째는 부적절하고 둘째보다는 셋째가 도입의 수월성 측면에서 우수하다고 판단하였다. 역사적으로 단위길이를 한 변으로 하는 정사각형을 단위넓이로 사용해 왔기 때문에, 교수-학습 과정에서도 단위정사각형을 단위넓이로 사용하는 것이 가장 자연스럽지만, 직사각형의 가로변의 길이와 세로변의 길이가 통약불가능한 경우에 그 넓이를 표현하기 어렵다는 문제가 있다.[2)] SMSG(1960: 322)는 이러한 어려움을 피하기 위하여 "직사각형의 넓이는 그것의 밑변의 길이와 높이의 곱이다."라는 '직사각형의 넓이 공리'를 가정함으로써, 넓이 측정에서 나타나는 통약불가능성의 문제를 회피했다.

SMSG가 넓이를 실함수로 다루는 것에는 통약불가능성을 피하려는 것 이외에도 또 다른 두 가지 이유가 있다. 그 중 하나는 수학적 정확성을 확보하는 동시에 수학적 개념 내에 존재하는 복잡한 논리를 이해하기 이전에 학생들이 이해하기 쉽게 학습하도록(intelligible) 하기 위함이다. SMSG(1960, 서문)에 의하면, Birkhoff가 한 것처럼 실수를 가정한다면, 공리들을 다루는 방법은 보다 쉬워질 것이고 수학적 정확

2) Legendre는 통약가능한 경우와 통약가능하지 않은 경우를 구분하여 각각 증명했다. 특히 통약가능하지 않은 경우는 모순법을 이용하여 증명했다. 이에 비해 De Morgan은 극한의 아이디어를 이용하여 증명했다.

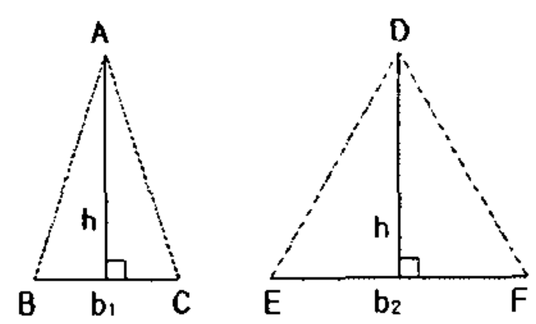
성과 학생들의 이해가능성 사이에서 괴로운 선택을 할 필요가 없다. 다른 하나는 공리의 중요성을 학습하도록 하기 위함이다. 그들이 넓이를 다루는 과정에서 공리는 '증명 없이 가정된 정리'를 의미한다(Moise, 1963: 465). SMSG 기하 교과서에서는 직사각형의 넓이를 공리로 택하여 학생들이 사용하게 하는데, 교과서 연구진과 집필진은 넓이와 관련된 몇 가지 공리의 소개가 학생들에게 공리의 중요성과 목적을 상기시키는 좋은 기회가 된다고 보았다. 즉, 그러한 공리는 경험을 통해 생각했던 직관적 판단을 정확하게 형식화한 것으로 간주했던 것이다(Wittenberg, 1963: 457, 재인용).

이러한 교육적 의도에서 Birkhoff(1932) 공리계에 근간을 두고 있는 SMSG 교과서에서는 4개의 공리와 1개의 정의를 사용해서 넓이함수를 정의했다. '다각영역의 넓이'라는 단원에서는 먼저 '다각영역'을 정의한다. 삼각영역이란, 삼각형과 그 내부의 합이고, 다각영역은 유한개의 삼각영역의 합이다. 이어서 도형의 넓이를 다음과 같이 제시한다.

공리17. 모든 다각영역에 하나의 양의 수가 대응한다.
정의. 다각영역의 넓이는 공리17에 의해 할당된 수이다.
공리18. 두 삼각형이 합동이면 그 삼각형의 영역들은 같은 넓이를 갖는다.
공리19. R이 두 영역 R_1과 R_2의 합이라고 하자. R_1과 R_2는 많아야 유한개의 선분과 점에서 만난다고 하자. 그러면 R의 넓이는 R_1과 R_2의 넓이의 합이다.
공리20. 직사각형의 넓이는 밑변의 길이와 높이의 곱이다.
(SMSG, 1960: 320-322).

이러한 공리들을 사용하면 평면도형의 넓이 공식을 간단하게 유도할 수 있다. 직각삼각형의 넓이는 직사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$로, 삼각형의 넓이는 직각삼각형 넓이의 합과 차로, 평행사변형의 넓이는 두 합동 삼각형의 합으로, 그리고 사다리꼴의 넓이는 대각선으로 구분되는 삼각형의 합으로 정의한다. 사실, 이러한 모습은 계량도식의 전형적 모습이라 하겠는데, 도형의 닮음과 비례를 이용하여 넓이에 대한 아이디어를 구성했던 이전의 방식을 몇 개의 공리를 사용해 간단하게 처리하게 되었음을 보여준다. 특히, 계량도식에 의해 관련된 기하정리를 증명하는 과정이 매우 단순화되었다. 예를 들어 SMSG는 Euclid 《원론》 VI권의 "높이가 같은 삼각형의 넓이는 그 밑변의 길이에 비례한다."는 첫 번째 정리를 넓이공식을 이용하여 다음과 같이 증명한다.

조건: △ABC와 △DEF는 높이가 같다.



결론: $\dfrac{\triangle ABC \text{ 넓이}}{\triangle DEF \text{ 넓이}} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

증명: 우리가 공식 $A = \frac{1}{2}bh$ 를 일단 구성하면,

이것은 $\dfrac{\frac{1}{2}b_1h}{\frac{1}{2}b_2h} = \dfrac{b_1}{b_2}$ 을 의미하기 때문에, 참이다 (SMSG, 1960: 332).

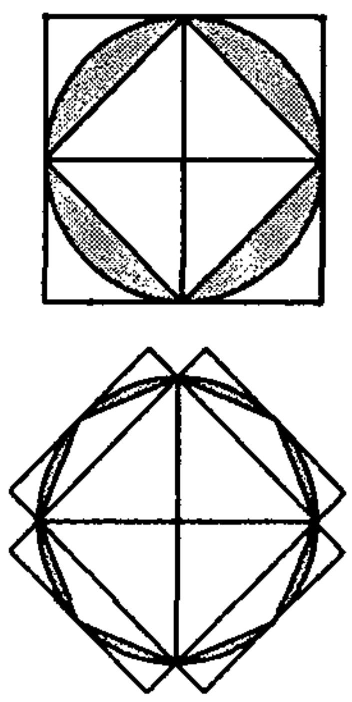
이 증명에서, 두 삼각형의 넓이의 비와 밑변의 길이의 비가 같음을 넓이공식을 이용하여 대수적으로 증명했다. 이런 접근방식은 형식화된 넓이공식을 비례와 닮음에 관한 증명의 기초로 사용한다는 점에서 이전의 방식과는 다르다고 하겠다.

Ⅳ. Wittenberg의 SMSG 접근 방식에 대한 비판

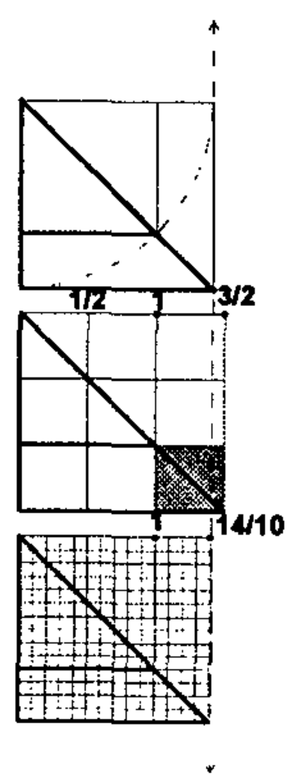
1. 넓이의 초등적 도입에 대한 비판

Wittenberg는 넓이 개념의 교수-학습에 대한 새 수학의 초등적 도입 방식을 비판했다(Wittenberg, 1963: 452). 그는 '초등적(elementary)'을 '학생들이 학습 내용에 접근가능하다.'는 의미로 사용했다(Vollrath, 2007: 36). 그는 이런 관점에서 SMSG 방식은 하향초등화를 통해 학습 내용을 빈약하게 만든다고 비판했다. 즉, 갑작스럽게 다각형의 넓이에 대한 4개의 공리를 제시한 후에 직사각형의 넓이공식을 지속적으로 사용하게 함으로써, 결국 학생들은 그 공식만을 기억하게 된다고 비판했다(Wittenberg, 1963: 453). 이것은 "계산을 수행하기 위해 넓이 정의를 필요로 하는(Moise, 1963: 465)" SMSG 방식에 대한 비판이다. Wittenberg (1963: 454)는 학생들이 기하학적 내용이 없는 넓이 이론 즉, 맹목적인 대수 계산으로 기하를 배움으로써 공허한 형식적 연역만을 수행하게 된다고 주장했다.

구체적으로 "두 삼각형이 합동이면 그 삼각형들은 같은 넓이를 갖는다."라는 명제는 공리로 선언되었을 뿐 이후에 어떠한 역할도 하지 않는다. 학생들은 이러한 명제를 매우 직관적으로 이해하지만, 그것의 공리로서의 특징을 이해한다고 볼 수는 없다. 즉, 학생들은 이것을 진정으로 공리로 수용하는 것이 아니다. 또, 직사각형의 넓이공식을 공리로 도입하게 되면 직사각형의 넓이 측정에서 나타나는 핵심적인 어려움 즉, 직사각형의 한 변의 길이가 단위길이와 통약불가능한 경우를 인식하게 하는 것을 원천적으로 막을 수 있다(SMSG, 1960, 서문; Wittenberg, 1963: 454). 하지만 Wittenberg는 이러한 단순함의 추구로 통약불가능성 및 무한 과정과 관련된 흥미롭고 도전할 만한 주제들을 (이후에라도) 취급할 기회를 아예 놓쳐버린다고 비판했다. [그림 Ⅳ-1]은 내접다각형의 변수가 2배로 늘어날 때 잔량(residual error)이 절반이하로 줄어드는 것을 나타내는데 연속성의 공리, 실진법의 아이디어와 관련된다. [그림 Ⅳ-2]는 정사각형의 한 변의 길이와 그 대각선의 길이는 통약불가능한데 그 두 선분의 길이를 공통으로 측정하는 선분을 찾는 과정과 두 선분의 길이의 비를 찾는 근사과정을 보여준다.



[그림 Ⅳ-1]



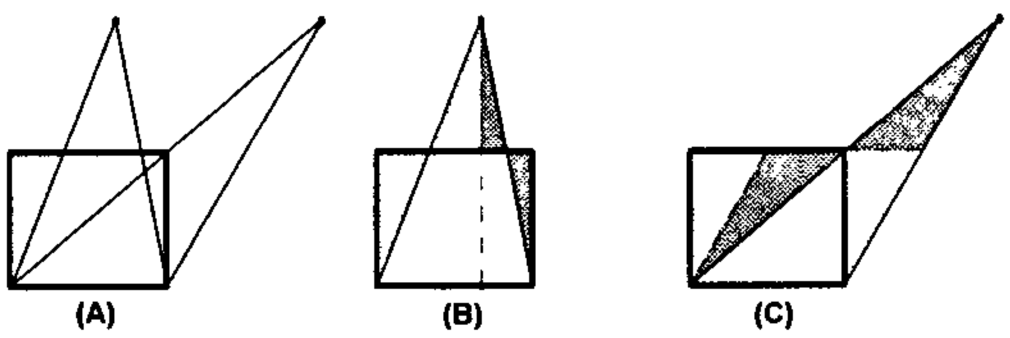
[그림 Ⅳ-2]

요컨대, 그는 SMSG 기하교재가 수학의 내용적 측면을 간과한다는 것, 즉 중요하고도 흥미로운 수학적 관계 측면을 도외시한다고 비판했다(Wittenberg, 1963: 455).

2. 같은-넓이의 중요성

SMSG 방식에서 "같은 넓이를 갖는다."는 것은 직사각형의 넓이공식에 의해서 얻어진 실수값이 같음을 의미한다. 평면도형이 "같은 넓이를 갖는다."는 것은 직관적이고 정확한 의미를 주지만 대수적인 넓이 공식은 그렇지 못하기 때문에 Wittenberg(1963: 453)는 이러한 넓이 이론에는 기하학적 내용이 없다고 비판했다. 예를 들어 분할-합동에 의해서 삼각형은 같은 길

이의 밑변과 높이의 반을 가진 직사각형의 넓이와 같다는 것과 평행사변형의 넓이는 같은 길이의 밑변과 같은 높이를 가진 직사각형의 넓이와 같다는 사실을 파악할 수 있다. 겉보기에 완전히 상이한 두 삼각형의 경우에도 밑변의 길이와 높이가 같으면 넓이가 서로 같다는 것을 파악할 수 있다([그림 Ⅳ-3] 참조).



[그림 Ⅳ-3]

이러한 사실들은 대수를 통해 파악할 수 있는 것이 아니다. 이것은 동일한 직사각형과 합동이 되게 만들 수 있다는 사실로부터 나오는 것이다. 학생들은 분할-합동 방법을 이용해서 도형의 넓이에 관한 간단하고 직접적인 기하학적 추론을 통해 그러한 기하학적 사실들을 쉽게 증명할 수 있다. 학생들은 이러한 방식으로 공간 내의 사물들에 관한 성질을 흥미 있게 학습할 수 있다(Wittenberg, 1963: 453).

Ⅴ. Wittenberg의 비판에 대한 Moise의 변론

1. '이해가능성'에 대한 추구

Moise(1963)는 SMSG가 넓이의 내용을 빈약하게 만들었다는 Wittenberg의 비판에 대해서 이해가능성(intelligibility)을 근거로 재반박하였다. 우선, 그는 Euclid 《원론》에서 Eudoxus의 비례론에 근거해서 원의 넓이를 다루는 전통적 방식을 비판하였다. 현대수학의 관점에서 Eudoxus의 비례론 안에는 실수를 정의하는 과정 즉, 유리수에서의 Dedekind 절단(cut)의 아이디어가 암묵적으로 포함되어 있다(Moise, 1963: 461). 그런데 이러한 아이디어는 완비순서체에 관한 것으로 본질적으로 순서 및 대수구조뿐만 아니라 고등 수학적 개념인 위상구조와 관련되기 때문에, 그는 중등학교 학생들에게 처음부터 그런 아이디어를 가르칠 수 없다고 주장하였다. 실제로 Euclid 《원론》을 교재로 사용했던 중세와 근대에, 대부분의 수학교사들은 비례론을 가르치지 않거나 소수의 뛰어난 학생들에게 가르쳤다고 전해진다(Cajori, 1917). 이런 이유로 인해, 그는 Euclid의 비수치적인 방법에 대해 10학년 교수-학습의 목적에 적합하지 않다고 판단하였다.

Moise(1963)에 의하면, 논리적으로 이해하기 어렵다는 이유 이외의 두 가지 점에서 SMSG에서 Eudoxus의 비례론을 배제하기로 결정했다(Moise, 1963: 461). 하나는 학생 활동을 위한 연습문제를 제시하기 힘들다는 점이다. 다른 하나는 해석기하학과 미적분에서 앞으로 응용할 수 있는 중요한 개념이 아니라는 점이다. SMSG는 이러한 어려움을 극복하기 위해 넓이를 실함수로 다루기로 한 것이다. 다시 말해, 학생들에게 관련된 수학 지식을 신속하고 쉽게 전달하기 위해 실함수에 기초한 넓이 개념의 지도를 시도했다. Moise(1963: 465)에 의하면, 정의를 제공하되 그 정의는 단순해야 하고, 그것의 적합성은 명확해야 한다. 형식적 정의를 도입하는 아이디어는 정의가 그 개념을 사용해서 더 쉽게 학습할 수 있게 한다는 아이디어로 동기화되어야 한다. 이런 점에서, 그는 계산을 하기 위해 정의가 필요하다고 판단하였다.

한편, 직사각형의 넓이공식을 공리로 제시하

고 원의 넓이 공식을 정의로 제시하는 SMSG의 교수-학습 계열은 연역적 체계를 가르치려는 의도에 맞지 않는다는 Wittenberg(1963)의 비판에 대해서, Moise(1963)는 교수의 수월성 측면에서 반박하였다. 정사각형의 넓이를 정의하면 직사각형의 넓이를 증명하기 어렵지만, 직사각형의 넓이공식을 먼저 제시하면 정사각형의 넓이뿐만 아니라 삼각형을 포함한 다각형의 넓이를 구하는 것이 쉽다는 것이다. 이러한 이유에서 SMSG는 직사각형의 넓이공식을 공리로 제시했다. 또한, 이러한 정신에 입각해 원의 넓이도 (정의로) 다루었다(Moise, 1963: 465). 요컨대, SMSG는 학생들이 쉽게 계산할 수 있게 하는 단순성을 학생들의 이해가능성으로 간주했던 것이다.

2. 새수학에서 같은-넓이가 중요하지 않은 근거

Moise에 의하면, 같은-넓이(equal-area)는 다가올 시대에 중요한 개념이 아니다. 해석기하학, 미적분, 과학, 그리고 그 밖의 다른 곳에서, 길이, 넓이, 부피는 실수로 측정된다. 현대수학과 과학의 맥락에서 (Eudoxus의 비례 아이디어를 언급하지 않는) 같은-길이 및 같은-넓이의 아이디어를 핵심 개념으로서 간주할 가치가 없다. 학생이 넓이 문제에서 수치적 답변을 해야 한다면, 특정 시점에서 실함수로서 넓이를 도입해야 한다. 즉, 넓이 지도에서 '같은 넓이'라는 기하적 아이디어를 대신해 넓이를 실함수로 도입해야 한다. 그렇게 해야 한다는 것을 당연하게 받아들이고, 그 이론의 전체 힘을 유용한 것에 사용할 수 있게 해야 한다. 한편 이러한 접근방식에 의해 피타고라스 정리를 쉽게 증명하고, 닮음이론이 의존하는 비례관계 이론을 쉽게 증명할 수 있다. 그는 이런 종류의 경제성이 교과서를 꽤 정확하게 만든다고 보았다(Moise, 1963: 461-463).

넓이를 실함수로 가정하면, '피타고라스 정리를 쉽게 증명할 수 있다.'는 것에 대한 구체적인 방법을 SMSG 기하 교과서에서 찾을 수 있다.[3] [그림 V-1-(B)]에서 큰 정사각형의 넓이는 작은 정사각형의 넓이와 합동인 네 개의 삼각형의 넓이의 합이다. 따라서

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

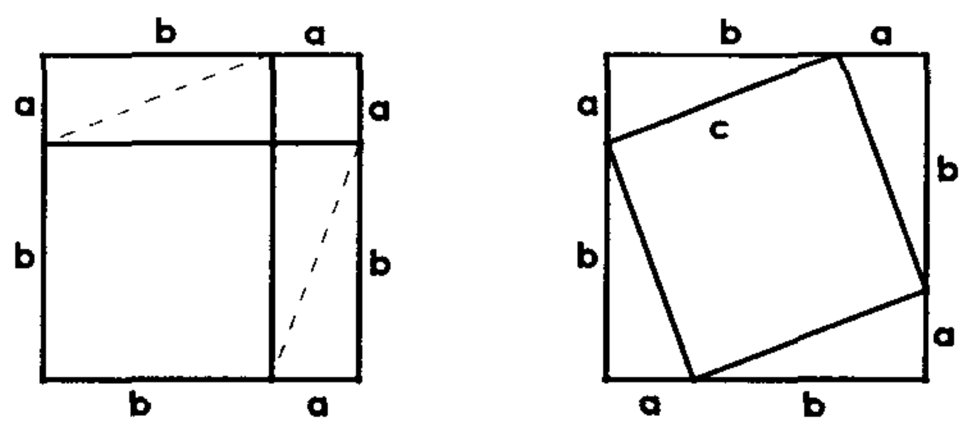
가 성립하고, 좌변을 전개하고 우변을 간단히 하면,

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4ab$$

이다. 결국

$$c^2 = a^2 + b^2$$

이 성립한다(SMSG, 1960: 340).



(A) (B)

[그림 V-1]

넓이를 실함수로 가정할 때 '닮음이론이 의존하는 비례관계를 쉽게 증명한다.'는 것에 대한 SMSG 기하 교과서에서의 구체적 모습은 다음과 같다.

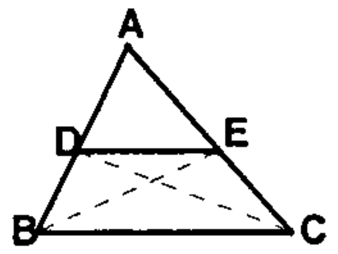
정리. (비례의 기본정리.) 만약 삼각형의 한 변에 평행한 선분이 다른 두 변을 서로 다

3) Moise(1963)는 [그림 V-1-(A)]만 제시하였고, SMSG(1960)는 [그림 V-1-(B)]만 제시했다.

른 점에서 만나면, 잘린 선분들이 비례하도록 교차한다.

재진술: $\triangle ABC$에서 점 D와 E는 $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ 가 되는 각각 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 위의 점이다. 그러면 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ 이다.

증명: (1) $\triangle ADE$와 $\triangle BDE$에서 $\overline{AD}$ 와 $\overline{BD}$ 를 밑변으로 그리고 점 E에서 $\overleftrightarrow{AB}$ 에 내린 높이를 공통높이로 생각하자. 그러면 정리 11-5에 의해서,[4]



$$\frac{\text{area}\triangle BDE}{\text{area}\triangle ADE} = \frac{BD}{AD}.$$

(2) $\triangle AED$와 $\triangle CED$에서 $\overline{AE}$ 와 $\overline{CE}$ 를 밑변으로 그리고 점 D에서 $\overleftrightarrow{AC}$ 에 내린 높이를 공통높이로 생각하자. 그러면 정리 11-5에 의해서,

$$\frac{\text{area}\triangle CDE}{\text{area}\triangle ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

(3) $\overleftrightarrow{DE}$ 와 $\overleftrightarrow{BC}$ 가 평행이기 때문에, $\triangle BDE$와 $\triangle CDE$는 밑변이 같고, $\overline{DE}$ 가 합동인 높이이다. 정리 11-6에 의해서,[5]

$$\text{area}\triangle BDE = \text{area}\triangle CDE.$$

(4) (1),(2), 그리고 (3)에 의해서, 다음이 따라나온다.

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

12-1절에 있는 대수적 성질[6]을 (3)에 적용하면

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

(SMSG, 1960: 368-369).

이러한 모습은 20세기 이전의 교재들의 접근방식과 근본적인 차이를 보여준다. 다시 말해서, 과거의 교재들은 비례와 닮음의 아이디어를 이용하여 넓이를 다루었던 반면, SMSG에서는 넓이공식을 이용해 비례와 닮음에 대한 정리들을 증명하였던 것이다.

VI. Moise의 변론에 대한 비판적 고찰

1. '이해가능성'과 '초등성'의 차이에 대한 고찰

새수학 운동의 기획자들은 "학생들이 관련 주제를 직관적으로 이해할 수 있도록 하는 (intuitively intelligible) 결정적 맥락을 찾고자 했다(Moise, 1963: 465)." 특히, 그들은 넓이개념의 교수-학습에서 실함수를 도입하는 것이 학생들의 학습을 수월하게 하는 데에 있어 중추적 역할을 담당할 것이라 기대했다. 이것은 새수학에서 추구했던 이해가능성이 경제적인 접근용이성임을 보여준다. Wittenberg(1963)에 의하면, SMSG에서 넓이 교수-학습 계열의 전개는 엄밀성과 일관성 측면에서 큰 단점을 보인다. 이에 대해 Moise는 "우리는 논리적 엄밀함의 수준을 각각의 구체적 상황에서의 논리에 의해 정해야 한다고 결정했다. 각 경우에서, 우리가 생각하기에 (학생들이) 가능한 한 이해할 수 있는 방식으로(intelligibly) 설명하는 것에 근접하도록 (관련된 교재 내용을) 설명하려고 했다(1963: 466)."고 변호했다.

Wittenberg는 경제성에 기초한 접근용이성이 아니라 "학생을 위한 수학내용의 접근용이성" 즉, 초등성을 강조해야 한다고 주장했다. Moise

---

4) 정리 11-5. 두 삼각형의 높이가 같으면, 그 넓이의 비는 그 밑변의 비와 같다(SMSG, 1960: 332).

5) 정리 11-6. 두 삼각형의 높이가 같고 밑변의 길이가 같으면, 그들은 같은 넓이를 갖는다(SMSG, 1960: 332).

6) 비례관계의 대수적 성질 만약, 0이 아닌 a, b, c, d 에 대해서, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이면, 다음이 성립한다.

(1) $ad = bc$ (2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (3) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (4) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(1963: 463)에 의하면, 넓이를 실수로 도입했을 때 피타고라스의 정리와 닮음정리를 경제적으로 취급할 수 있다. 하지만 "수학에서 초등성이 항상 간소함(simple)을 의미하는 것이 아니다 (Vollrath, 2007: 46)." 학생을 위한 내용이라는 관점에서 보면 그러한 접근방식은 허점을 드러낸다. 전자는 닮음과의 유기적 관련성을, 후자는 척도의 재생산(reproduction in scale)이라는 아이디어를 가르칠 수 없다. 이것은 새수학의 이상이라 할 수 있는 수학적 지식의 구조를 가르치는 것과 거리가 멀다. 전자는 닮음을 중심으로 기하 지식을 조직화하는 경험을, 후자는 공형등거리 사상(conformal mapping), 공형기하(conformal geometry)로 발전할 수 있는 변환의 아이디어를 간과하는 것이다(최지선, 2008).

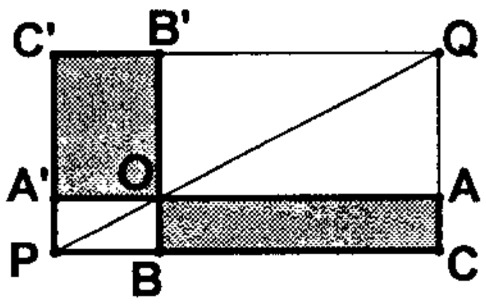
한편, 넓이 개념의 교수-학습에 관한 경험적 연구 결과들은 넓이공식의 조기도입이 낳을 수 있는 교육적 폐해의 일면을 보여준다. Woodward & Byrd(1983) 그리고 Tirosh & Stavy(1999)는 직사각형의 넓이공식에 익숙한 학생들이 둘레의 길이가 같은 직사각형의 넓이가 같다고 판단하는 실험 결과 즉, 그들이 길이와 넓이조차 구분하지 못하는 결과를 제시하였다. Baturo & Nason(1996)은 예비교사들이 주어진 직사각형의 넓이를 구하는 것에 집중하여 단위를 비교하지 못하거나 cm와 같이 잘못된 단위를 사용하는 오류를 범한다는 점을 보여주었다. Simon & Blume(1994) 그리고 Battista et al(1998)은 직사각형의 넓이공식을 배우는 것보다 넓이를 주어진 단위넓이의 행-렬 구조로 파악하는 것이 더욱 중요함에도 불구하고 많은 초·중등 학생뿐만 아니라 초등학교 교사들도 개념적 이해를 하지 못한 채 눈금 있는 자를 사용해서 길이를 측정한 후 넓이공식에 기계적으로 적용하는 단계에 머물러 있는 현상을 보고하였다. 이러한 일련의 결과는 넓이공식을 일찍 도입함으로써 가로변과 세로변의 길이가 주어진 넓이를 정확하게 계산하는 것이 용이해진 반면, 길이와 넓이에 대한 구분, 단위넓이의 개념 그리고 직사각형 넓이의 행-렬 구조와 같은 기본적인 수학적인 아이디어들을 놓치게 되었음을 보여주는 것이다. 경제적인 접근가능성을 위해 직사각형의 넓이공식을 조기 도입한 결과가 초등적인 기하 내용의 교수-학습을 막은 것이다.

2. 심상으로서의 같은-넓이의 중요성

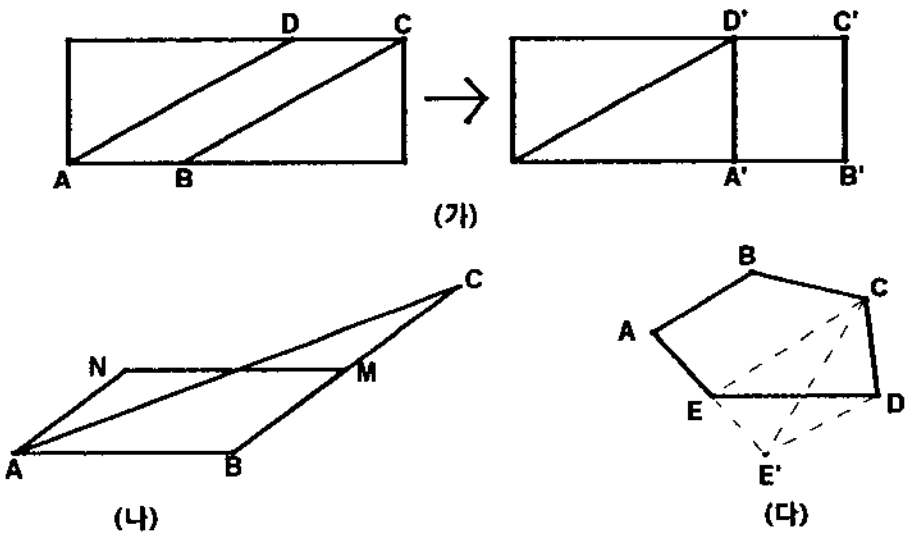
직사각형의 넓이를 실함수로 다루게 된 것은 20세기 초이다. 이러한 접근방식을 사용하면 Euclid 《원론》 처럼 장황한 비례론을 학습하지 않아도 된다. 그 뿐만 아니라, De Morgan이 직사각형의 넓이를 설명하듯, 혹은 Legendre 《기하학원론》 처럼 어떤 명제에 대한 증명과 그 따름정리로 유도하듯 학습하지 않아도 된다. 학생들은 통약불가능성, 실수의 완비성, 선분과 영역 사이의 관계와 정리들을 파악하지 않아도 도형의 넓이를 계산할 수 있다. 실제로 SMSG 이후, 학생들에게 직사각형의 넓이를 가르치는 일은 교사들에게 쉬운 일이 되었지만 기하 교과서에서의 넓이는 학생들에게 더 이상 기하학적 대상이 아니라 계산해서 구하는 수에 불과했다. SMSG 방식은 학생들에게 기하학적 내용을 가르치는 것이 아니라 공허한 형식만을 연습시켰다.

이러한 폐단을 극복하기 위해 필요한 것은 먼저 넓이에 대한 심상을 형성시키는 것이다. 역사발생적 관점에서 보면, 넓이 개념의 이면에 존재하는 통약불가능성과 극한의 아이디어에 이르는 일련의 과정을 경험하게 하는 것이 필요하다. 직사각형의 넓이공식의 조기 도입은 그러한 아이디어를 피해가는 것일 뿐만 아니라 그러한 아이디어에 이르는 길을 막는다. 이에

비해, 같은-넓이를 다루는 활동은 넓이에 대한 심상 형성에 도움이 될 뿐만 아니라 Wittenberg (1963)의 지적처럼 통약불가능성과 극한 개념에 이르는 길을 제공할 수 있다. 다음 [그림 Ⅵ-1]에서와 같이 주어진 직사각형과 동일한 넓이를 갖는 직사각형을 작도[7]하는 방법은 같은-넓이와 관련된 조작활동의 출발점이라 할 수 있다.



[그림 Ⅵ-1]



[그림 Ⅵ-2]

임의의 다각형을 직사각형으로 변형시키는 활동은 다각형 사이의 넓이를 서로 비교하게 할 수 있을 뿐만 아니라 평면도형을 등분할하는 활동과 측정 활동 사이의 교량 역할을 담당할 수 있다(Freudenthal, 1983: 383-385). 정확히 말해, 근사방법(approximation)이나 대수 공식을 사용하지 않더라도 모든 다각형을 그 넓이에 해당하는 미리 정해진 밑변을 갖는 직사각형으로 변형시킴으로써 다각형의 넓이를 서로 비교할 수 있는 것이다. 예를 들어 [그림 Ⅵ-2-(가)]에서 평행사변형 ABCD를 직사각형 A'B'C'D'로, [그림 Ⅵ-2-(나)]에서 삼각형 ABC를 평행사변형 ABMN으로 변형할 수 있다. 따라서 다시 직사각형으로 변형할 수 있다. 이런 방법으로 [그림 Ⅵ-2-(다)]처럼, 모든 n각형을 $(n\text{-}1)$각형으로 변형할 수 있으므로 결국 모든 다각형은 직사각형으로 변형할 수 있다. 물론, 이러한 조작은 맹목적인 계산을 지양하고 기하 현상을 탐색하고 정리하는 도구로 기능할 수 있다. 다시 말해, 같은-넓이를 구성하는 활동은 넓이에 대한 심상을 형성하는 데에 기여할 수 있다. 하지만 이와 반대로 직사각형의 넓이에 대한 공식을 처음부터 가르친다면 학생들은 일상생활과 수학적 응용에서 이해되는 넓이 현상에 의한 심상으로부터 점점 멀어질 수밖에 없을 것이다(Freudenthal, 1983: 388-389).

Ⅶ. 결 론

새수학의 기획자들은 성공을 위해 "단지 부가적인 교사교육만이 필요하다(Moise, 1962: 86)."고 생각했다. 그들은 "(새수학의) 철학이 타당한 것이라 믿었다(Moise, 1963: 466)." 하지만 새수학의 실패가 전적으로 교사교육의 부재에 기인하는 것은 아니었다. 실제로는 새수학의 접근방식과 그 이면의 교육적 의도 자체에 기인했다. 지식의 구조를 가르치는 교수학적 근거는 '경제성'과 '전이효과'에 있다(이홍우, 2001: .382; Moise, 1963: 463). 이것은 수학 지식을 최대한 신속하게 효과적으로 가르치려는 의도를 포함한다. 이것을 가장 극명하게 보여주는 것이 다각형의 넓이에 실수값을 부여하고 직사각형

7) △PQC와 △PQC', △POA'와 △POB, △QOB'와 △QOA는 각각 합동이 되므로 $\text{area}OACB = \text{area}OA'C'B'$ 이 성립한다. 그런데 이것은 $OA : OA' = OB' : OB$ 와 같은 비례 관계에서 내항과 외항의 곱이 같음, 즉 $OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$ 이 성립함을 기하적으로 보여주는 것이다.

의 넓이공식을 공리로 도입하는 방식이다. 그러나 이러한 방식을 통해서는 학생들이 가장 단순한 형태의 직사각형의 넓이공식을 학습할 뿐이고, 학생들의 기하학적 사고는 빈약해질 수밖에 없다. 새수학에서의 넓이 교수-학습의 계열은 학생의 현실과 기하학적 맥락에서 출발하지 않는 반-교수학적 전도이다(Freudenthal, 1983: 389).

새수학 시대 이전의 넓이 도입방식의 변천사에서 면면히 흐르는 특징은 기하가 점차 산술화 되었음에도 불구하고 닮음을 기반으로 한 접근방식이 그대로 유지되었다는 점이다. 다시 말해, SMSG 교과서가 등장하기 이전까지 다각형의 넓이는 기본적으로 기하의 일부분으로 취급되면서 단위넓이에 대한 비로 도입되었다. 하지만 계량도식을 표방했던 SMSG는 넓이개념에 붙박혀 있는 기하적 닮음의 자취를 제거하고 넓이를 산술의 영역으로 옮겨버렸다. 그런데 이러한 도입방식은 닮음뿐만 아니라 (분할-합동 조작에 의한) 같은-넓이, 통약불가능성, 극한의 기하적 아이디어 등에 대한 접근을 근본적으로 막는 것이었다. 이런 점에서, 직사각형의 넓이공식을 공리로 도입해 다각형의 넓이를 계산하게 했던 당시의 활동이 학생들의 개념적 이해를 빈약하게 만든 현상은 불가피했다고 하겠다. 즉, 넓이 개념 안에는 깊고 풍부한 기하적 아이디어가 응축되어 있기 때문에, 그에 대한 기하적 심상을 형성시키면서 점진적 형식화를 지향하는 교수-학습을 시도했어야 했던 것이다.

요컨대, SMSG의 넓이 교수-학습 방식은 기하와 대수를 유기적으로 결합시키지 못함으로서 초등성의 확보에 실패하고 말았다. SMSG의 초등성은 수학적 구조의 핵심 원리와 학생을 위한 접근성이라는 두 가지를 포함한다. 이런 점에서, 초등성은 발전하게 하는 기능(developing function)이라는 속성으로 대표된다(Vollrath, 2007). 새수학의 기획자들은 수학의 구조적 지식을 학생에게 신속, 정확하게 지속적으로 접근시킴으로써 "수학 교수-학습은 현대의 공리적 관점에 이르러야 한다(Steiner, 1959: 14)."고 보았다. 하지만 현대수학과 학생과의 이러한 만남은 실제적인 수학 내용을 결여하고 있다는 점에서 교수학적으로 타당하지 않다. 그러한 만남이 타당하기 위해서는 실제적인 수학 내용이 풍부해야 한다. 학생들로 하여금 넓이에 대한 풍부한 심상을 형성할 수 있게 하는 실제적 기회를 박탈하는 접근방식은 진정으로 초등적일 수 없었던 것이다.

참고문헌

박교식(2006). 수학과 수업 운영의 숨겨진 규칙으로서의 교수학적 계약에 관한 연구. **수학교육학연구**, **16**(1), pp.43-58.

이홍우(2001). **교육의 목적과 난점**. 서울: 교육과학사.

최지선(2008). **닮음 개념에 대한 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위논문. 서울대학교.

數學教育硏究會(1989). 算數教育の理論と實際. 東京: 聖門社.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *The Annals of Mathematics, 33*(2), pp.329-345.

Battista, M. T., Clement, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), pp.503-532.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), pp.232-268.

Blank, A. A. (1966). The use and abuse of the axiomatic method in high school teaching. In The Conference Board of the Mathematical Sciences, *The role of axiomatics and problem solving in mathematics* (pp.57-62). Washington, D. C.: Ginn and Co.

Buck, R. C. (1966). The role of a naive axiomatics. In The Conference Board of the Mathematical Sciences (Ed.), *The role of axiomatics and problem solving in mathematics* (pp.20-26). Washington, D. C.: Ginn and Co.

Cajori, F. (1917). *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. London : Macmillan.

De Morgan, A. D. (1846). *Elements of arithmetic.* London: Taylor and Walton.

De Morgan, A. D. (1831/1910). *On the study and difficulties of mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry : Euclid and beyond.* Springer.

Heath, T. L. (1952). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Chicago: ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, INC.

Legendre, A. M. (1866). *Elements of geometry and trigonometry*. (adapted by Davis, C.). New York: A. S. Brands & Co.

Moise, E. (1962). The new mathematics program, *The School Review, 70*(1), pp.82-101.

Moise, E. (1963). Some reflections on the teaching of area and volume. *The American Mathematical Monthly, 70*(4), pp.459-466.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. The MIT Press.

Nelson, L. (1949). *Socratic method and critical philosophy*. New York : Dover Publications.

Roche. J. (1998). *The mathematics of measurement: A critical history*. London : The Athlone Press.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), pp.472-94.

SMSG (1960). *Geometry: Student's text, part I*. Tale University Press.

Steiner, H. G. (1959). Das moderne mathematische Denken und die *Schulmathematik. Der Mathematikunterricht, 5*(4), pp.5-79.

Tirosh, D., & Stavy, R.(1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning, *Educational Studies in Mathematics, 38*, pp.51-66.

Vollrath, H. (2007). Towards an authentic teaching of mathematics: Hans-Georg Steiner's contribution to the reform of mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education, 39*, pp.39-50.
Wittenberg, A. (1963). Sampling a mathematical sample text. *The American Mathematical Monthly, 70*(4), pp.452-459.
Woodward, E., & Byrd, F. (1983). Area: Included topic, neglected concept. *School Science and Mathematics, 83*(4), pp.343-347.

A Critical Study on the Teaching-Learning Approach of the SMSG Focusing on the Area Concept

Park, Sun Yong (Lecturer of Gyeongin National University of Education)
Choi, Ji Sun (Lecturer of Gyeongin National University of Education)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

The objective of this paper is to reveal the cause of failure of New Math in the field of the SMSG area education from the didactical point of view. At first, we analyzed Euclid's 〈Elements〉, De Morgan's 〈Elements of arithmetic〉, and Legendre's 〈Elements of geometry and trigonometry〉 in order to identify characteristics of the area conception in the SMSG. And by analyzing the controversy between Wittenberg(1963) and Moise(1963), we found that the elementariness and the mental object of the area concept are the key of the success of SMSG's approach. As a result, we conclude that SMSG's approach became separated from the mathematical contents of the similarity concept, the idea of same-area, incommensurability and so on. In this account, we disclosed that New Math gave rise to the lack of elementariness and geometrical mental object, which was the fundamental cause of failure of New Math.

* key words : the approach of SMSG (SMSG 접근방식), the area concept (넓이 개념), elementariness (초등성), 심상 (mental object).

논문접수 : 2008. 2. 15
심사완료 : 2008. 3. 21