한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 1, 19-30, March 2008

카발리에리의 원리를 이용한 피라미드의 부피의 지도 방안

박달원[1]

카발리에리는 아르키메데스의 구의 부피에 대한 연구결과를 재구성하는 과정에서 면적은 무한히 많은 평행한 선분으로, 부피는 무한히 많은 평행한 면적으로 구성된다고 하였다. 이것을 면적과 부피에 대한 불가분량이라 하고 이 원리를 발전시켜 카발리에리의 원리를 발견하였다. 본 연구에서는 영재학생들이 피라미드의 부피를 찾는 과정에서 카발리에리의 원리를 발견하고 이를 적용하고 일반화하는 교수・학습모형을 제시하였다.

주요용어 : 카발리에리의 원리, 불가분량법, 피라미드의 부피

Ⅰ. 서론

여러 나라에서는 고급 인력 자원의 개발만이 자국 발전에 매우 중요하다는 인식 하에 영재교육에 심혈을 기울여 왔다. 유럽의 여러 나라는 현재의 일반 학교 체제만으로 고급 인력 양성이 어렵다는 인식을 바탕으로 정부의 적극적인 지원으로 영재학교, 영재교육원, 영재학급 등을 설립하는 등 다양한 방법으로 영재교육의 내실을 기하고 있다.

우리나라에서는 교육기본법 제12조와 제19조에 의거 재능이 뛰어난 사람을 조기에 발굴하여 타고난 잠재력을 계발할 수 있도록 능력과 소질에 맞는 교육을 실시함으로써 개인의 자아실현을 도모하고 국가·사회의 발전에 기여하게 함을 목적으로 영재교육진흥법을 2000년 1월 28일에 제정・공포하였으며 2005년 12월 7일에 개정하는 등 영재교육에 심혈을 기울여왔다.

영재학생들을 위한 교육과정과 교수학습모형은 일반 정규 교육과정과 일반 교수학습모형과는 보통 다르게 구성되고 있으며, 수학 영재를 위한 교육과정은 대체적으로 속진과정과 심화과정으로 분류할 수 있다. 심화과정은 학생들의 해당 학년의 수학 수준을 기초로 깊고 폭넓게 다양한 탐구활동을 할 수 있는 내용으로 편성되며 속진과정은 수학과 교육과정에서 제시된 내용이나 대학의 수학 내용을 빨리 학습하여 상급학교에 조기 진학할 수 있도록 편성된 교육과정이다.

19세기 중반부터 영재를 위한 특별 프로그램을 실시했던 미국의 예를 들면, 영재교육의 초기에는 속진 중심의 교육이 이루어졌으며, 이를 이끌어간 인물은 존스 홉킨스 대학의 줄리안 스탠리 교수이다. 또한 심화학습 중심 교육을 주도한 학자는 미국 영재교육의 대부 렌

1) 공주대학교 과학영재교육원, 과학교육연구소 (dwpark@kongju.ac.kr)

줄리 교수이다. 1970년대에 스탠리 교수가 시작한 수학 속진 프로그램에서는 10~11살 학생들 중 수학적 재능이 뛰어난 학생들을 발굴하여 대학에서 공부하게 하였다. 그러나 스탠리 교수는 렌쥴리 교수에게 "지난 20여 년간 속진교육을 통해서 창의적인 수학자가 나오지 못했다"라고 말하였다고 한다. 이는 올바른 영재교육의 방향 정립과 기초 확립에 있어서 시사하는 바가 크다고 할 수 있다(이현미, 2003).

심화교육과정의 학습내용에 수학사의 많은 내용이 유용하게 활용될 수 있다. 수학자들이 경험한 어려움이나 오류는 학생들이 당면한 어려움이 되고 그 문제를 해결했을 때의 성취감은 영재학생들에게 자신감과 새로운 동기를 부여할 수 있고 시간을 초월하여 위대한 수학자들과의 교감도 형성할 수 있다.

퇴플리츠(Toeplitz)는 수학의 역사보다도 사실 및 그 증명의 발생과정이 매우 중요하다고 하였으며 역사적 발생의 순서에 따라 아르키메데스(Archimedes)의 구적법, 카발리에리(Cavalieri)의 원리와 무한소(불가분량)를 이용한 구적법 등을 미분과 부정적분보다 먼저 지도할 것을 강조하였다.

학생들이 알고 있는 피라미드, 원뿔, 구의 부피에 대한 원리를 학생들 스스로 발견하도록 하고 그 원리를 적용하여 일반화된 문제를 해결할 수 있도록 한다면 학생들의 창의력과 문제해결력을 신장시키는데 크게 기여할 것이다.

Ⅱ. 카발리에리(Cavalieri)의 원리와 불가분량

아르키메데스(Archimedes, B.C. 287~212)는 구의 부피는 구를 포함하는 원기둥 중 가장 작은 원기둥 부피의 2/3가 되고 구의 겉넓이는 원기둥의 겉넓이의 2/3가 됨을 보여 수학사에서 경이로운 연구업적을 세웠다. 아르키메데스의 묘비에 원기둥과 구가 새겨졌다는 것을 볼 때, 아르키메데스 자신이나 제자들이 아르키메데스의 어떤 연구업적보다도 구의 부피와 겉넓이에 대한 연구업적을 자랑스럽고 명예롭게 생각하였다고 볼 수 있다. 그는 지레의 원리와 무게중심을 이용하는 사고실험을 통하여 구의 부피를 계산하는 공식을 발견하였는데 원뿔의 부피 공식도 이미 이용하고 있었다.

피라미드와 원뿔의 부피 공식을 처음 언급한 사람은 데모크리토수(Democritus, B.C. 460~370)이고 이 정리를 최초로 증명한 사람은 에우독소스(Eudoxus of Cnidus, B.C. 408-355)라고 알려져 있다.

이탈리아의 카발리에리(Cavalieri, 1598 - 1647)는 아르키메데스의 연구결과를 재구성하는 과정에서 둘레가 곡선 모양으로 된 물체의 부피와 면적을 계산할 수 있는 방법을 연구하게 되었다. 그는 두 입체를 한 평면과 평행한 어떤 평면으로 절단하여도, 그 단면의 넓이가 항상 같으면 두 입체의 부피가 같다는 원리를 발견하였는데 이를 카발리에리의 원리라고 한다. 또한 카발리에리는 면은 무수히 많은 평행한 선분들로 구성되어 있고 입체는 무수히 많은 평행한 면들로 구성된 것으로 간주하였는데 이를 각각 면과 부피에 대한 불가분량이라 하고 이 방법을 불가분량법(method of the indivisibles)이라 한다. 불가분량법은 카발리에리의 원리에 대한 기본 개념이라 할 수 있다. 카발리에리는 불가분량법에 대하여 제기된 오류를 제거할 수 있는 이론을 정립하지는 못했지만 새로운 이론의 창출에 상당히 기여하였다(Toeplitz, 1963).

263년에 위나라의 유휘(劉徽)가 저술한 구장산술의 주석에 피라미드의 부피를 계산하는

방법이 제시되었는데 놀랍게도 카발리에리의 원리를 적용하고 있었다(Philip, 1998).

2004년 탐(Tom)과 마미콘(Mamikon)은 카발리에리의 원리를 이용하여 구의 부피와 원기둥의 부피와의 관계를 발견할 수 있는 방법을 제시하여 카발리에리의 원리가 다양하게 적용될 수 있음을 보였고 이 원리는 마미콘의 정리로 일반화 되었다.

Ⅲ. 역사 발생적 원리에 의한 발견학습 모형

일반적인 영재교육에서는 영재교육과정 개발 모형에 근거하여 보다 구체적이면서 소규모의 단위 학습에 적용할 수 있는 영재 교수·학습 모형을 제안하고 그 모형에 맞추어 지도하는 경우가 많다. 그러나 수학과의 학습은 수학적인 내용이 학습의 중심이 되므로 지도하고자 하는 내용의 성격에 맞추어 그에 적합한 교수·학습의 모형을 설정해야 한다(최종헌 외 1인, 2005).

라카토스(Lakatos)에 따르면 수학적 발견에서는 처음 소박한 추측으로부터 시작하여 사고실험으로 이어진다고 하였으며, 푸앙카레(Poincaré)와 클라인(Klein)은 역사 발생적 원리는 수학의 역사적 발달의 과정을 따라 직관적인 상태에서 점진적인 형식화 단계를 거쳐 마지막에 연역적인 형식적 체계에 이르도록 지도하는 것이 자연스러운 지도방법이라고 하였다(우정호, 2005).

사각뿔, 원뿔, 구의 부피 공식도 미분적분이 발견되기 2000년 전에 사고실험을 통하여 발견되었지만 2000년이나 지나서 미분적분의 발견으로 연역적 증명이 완성되었다.

본 연구에서는 피라미드의 부피에 대한 탐구내용을 중심으로 역사 발생적 원리를 적용한 수업모형을 원리의 탐구 단계, 원리의 적용 단계, 원리의 일반화 단계, 원리의 연역적 증명 단계, 원리의 형식적 추상화 단계로 제시하였다.

영재학생들 대부분이 속진학습을 하고 있지만 각 개념에 대한 원리나 역사적 발생과정을 잘 알지 못하는 경우가 있다. 따라서 학생들이 알고 있는 공식이나 법칙을 사고의 대상으로 하여 수학의 원리를 발견하고 발전시켜나가는 수업모형을 설정하였다.

1 단계 : 원리의 탐구

학생들이 단순하게 알고 있는 공식이나 법칙이 사고의 대상된다. "피라미드의 공식을 어떻게 발견할 수 있는가?", "구의 부피 공식을 어떻게 발견할 수 있는가?" 또는 "삼각형의 중선의 교점이 왜 무게중심이 되는가?" (음수)×(음수)는 왜 양수가 되는가? 등의 질문을 통하여 기존에 알고 있는 수학적 지식이 사고의 대상이 되도록 한다. 이러한 공식이나 법칙을 실험이나 예를 통하여 귀납적으로 확인하는 단계가 아니라 원리를 발견하여 그 원리로 공식이나 법칙을 설명하는 단계이며, 발견된 원리를 연역적으로 증명할 수는 없지만 사고실험을 통하여 확신하는 단계이다.

예를 들면, 밑면과 높이가 같은 두 삼각뿔의 부피가 일정함을 설명하는 과정에서 카발리에리의 원리를 발견하고 이를 이용하여 피라미드의 부피를 계산하는 공식을 발견할 수 있다.

2 단계 : 원리의 적용

발견된 원리를 적용하여 문제를 해결하는 단계이다. 학생들은 카발리에리의 원리를 이용

하여 다양한 각뿔의 부피와 원뿔의 부피 공식을 발견할 수 있으며, 더 나아가 구의 부피를 계산하는 공식을 발견할 수 있다.

3 단계 : 원리의 일반화

발견된 원리를 일반화하는 단계이다. 발견된 원리의 다양한 적용을 통하여 개념의 일반화가 일어나는 단계이다. 부피가 다른 입체도형에 대하여 적용할 수 있는 일반화된 카발리에리의 원리를 발견할 수 있으며 카발리에리의 원리를 마미콘의 정리로 일반화 할 수 있다.

4 단계 : 원리의 연역적 증명

이 단계는 1단계에서 발견한 원리가 사고의 대상이 된다. 수학의 역사에 따라 옛 수학자들이 발견한 개념을 학생들이 발견하도록 하고 그 원리를 연역적인 방법으로 증명하는 단계이다. 원리에 대한 반례의 출현으로 원리의 일반화와 적용의 한계가 불분명하게 되어 원리의 연역적 증명의 필요성이 강하게 요구되어 지는 단계이다.

미분적분학도 발생은 직관적인 방법으로 시작되었다. 미분적분학이 여러 분야에 적용이 되었지만 연역적인 증명이 이루어지기 전에는 많은 어려움에 직면하게 되었다. $\epsilon-N$에 의한 수열의 극한에 대한 정의와 $\epsilon-\delta$방법에 의한 함수의 극한에 대한 정의는 직관적인 미분적분학의 이론을 연역적으로 증명할 수 있도록 하였으며 이는 미분적분학이 혁신적으로 발전하는 기초를 마련하는 계기가 되었다.

5 단계 : 원리의 형식적 추상화

이 단계에서는 발견된 원리의 법칙을 추상화하여 형식적인 체계에 이르는 단계이며, 공리와 정리의 연역적인 형식체계로 개념이 완성되는 단계이다. 이 단계는 대학교 이상의 과정에 해당되기 때문에 중학생이나 고등학생들에게 도입하기에는 어려움이 있다고 할 수 있다.

Ⅳ. 수업의 실제

과학영재교육원 2006년도 여름집중교육에서 수학반 심화과정 14명을 대상으로 역사 발생적 원리를 적용하여 학생들이 사각뿔의 부피의 공식을 발견하는 수업을 진행하였다. 발견방법으로는 구장산술의 주석에서 양휘가 제시한 방법과 카발리에리의 원리를 발견하여 적용하도록 하였다. 라카토스(Lakatos)의 발견적 접근법인 추측과 반박을 통하여 추측을 개선하고 새로운 개념을 발견할 수 있도록 수학적 발견의 논리를 대화식 수업으로 진행하였다.

[피라미드와 구의 부피 탐구]

중학교 영재학생들을 대상으로 3단계까지 수업을 진행하였다.

1 단계 : 원리의 탐구

[질문 1] 사각뿔(피라미드)의 부피는 사각뿔의 밑면과 높이가 동일한 사각기둥 부피의 1/3이 됨을 보이시오.

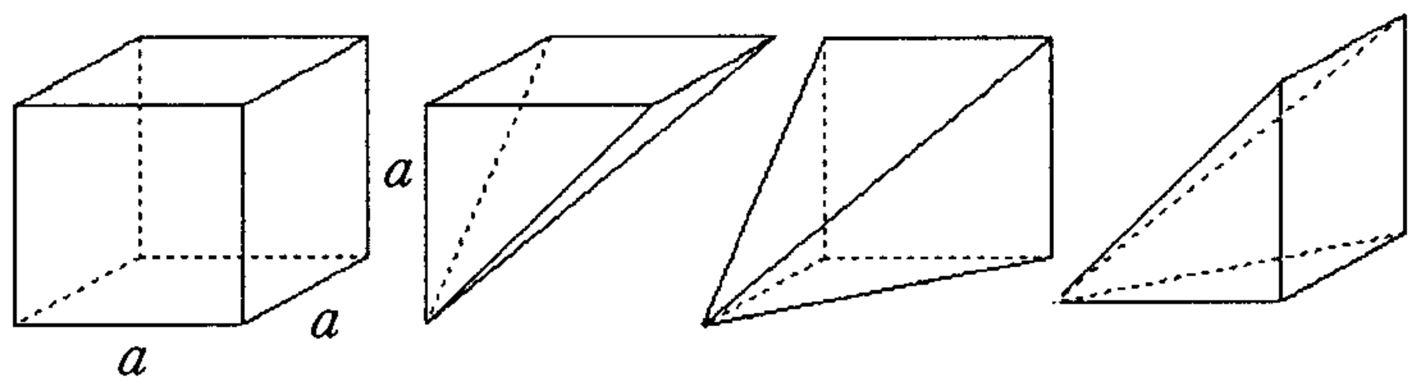
학생(가) : 예! 사각뿔에 물을 가득 넣은 다음 이 사각뿔의 밑면과 높이가 같은 직육면체에 물을 부어 넣으면 높이의 1/3이 됨을 보일 수 있습니다.

[질문 2] 좋은 답변입니다. 수학적인 사실을 실험을 통하여 확인해 볼 수 있는 것은 매우 중요합니다. 에우독소스는 피라미드와 원뿔의 부피 계산 공식을 증명했다고 합니다. 어떻게 이 공식을 증명할 수 있을까요?

질문에 대하여 학생들의 반응이 거의 없었으며 어떻게 문제를 해결해야할지 방향을 잡지 못하고 있었다. 특히 쉽게 생각하고 있던 원뿔이나 사각뿔(피라미드)의 부피 공식이 약 2500년 전에 발견되었다는 사실에 놀랐으며 그 방법에 큰 관심을 보였다.

[질문 3] 중국 유희가 저술한 구장산술의 주석에 피라미드의 부피 공식에 대한 설명이 있습니다. 한 변의 길이가 a인 정육면체를 합동인 세 개의 사각뿔로 분할하여 보십시오.

대부분의 학생들은 아래의 그림과 같이 합동인 세 개의 사각뿔로 분할할 수 있음을 설명하였다. 한 변의 길이가 a인 정육면체를 그림과 같이 세 개의 사각뿔로 나누면 각각의 사각뿔은 합동이므로 각각의 부피는 같게 된다. 학생들은 밑면의 가로와 세로가 길이가 각각 a이고 높이가 a인 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}a^3$임을 발견하였다.

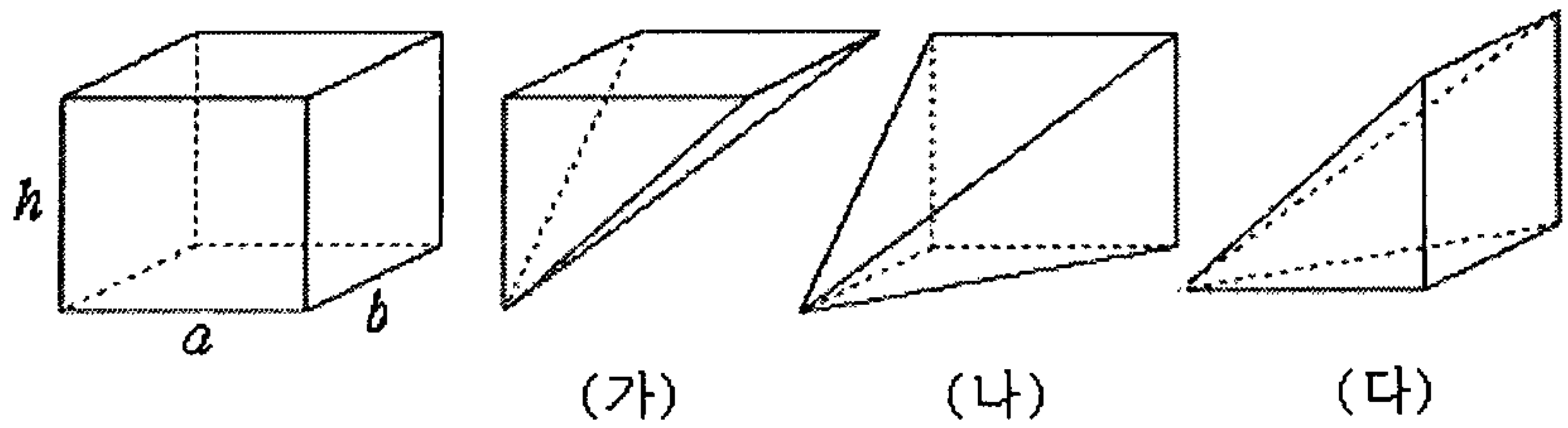


[그림 1] 정육면체의 분할

[질문 4] 여러분은 에우독소스와 양휘와 같이 훌륭한 공식을 발견하였습니다. 그러면 밑면의 가로가 a, 세로가 b이고 높이가 h인 사각뿔의 부피가 직육면체의 부피의 1/3임을 보이십시오.

학생(나) : 정육면체의 경우처럼 밑면의 가로가 a, 세로가 b이고 높이가 h인 직육면체를 세 개의 사각뿔로 분할하면 세 개의 사각뿔이 합동이기 때문에 사각뿔의 부피는 직육면체의 1/3입니다.

[질문 5] 자! 그러면 학생의 답변을 확인하여 봅시다. 가로가 a, 세로가 b이고 높이가 h인 직육면체를 세 개의 사각뿔로 분할하면 사각뿔 (가), (나), (다)가 됩니다. 이 도형이 합동이 되는 이유를 설명하십시오.



[그림 2] 직육면체의 분할

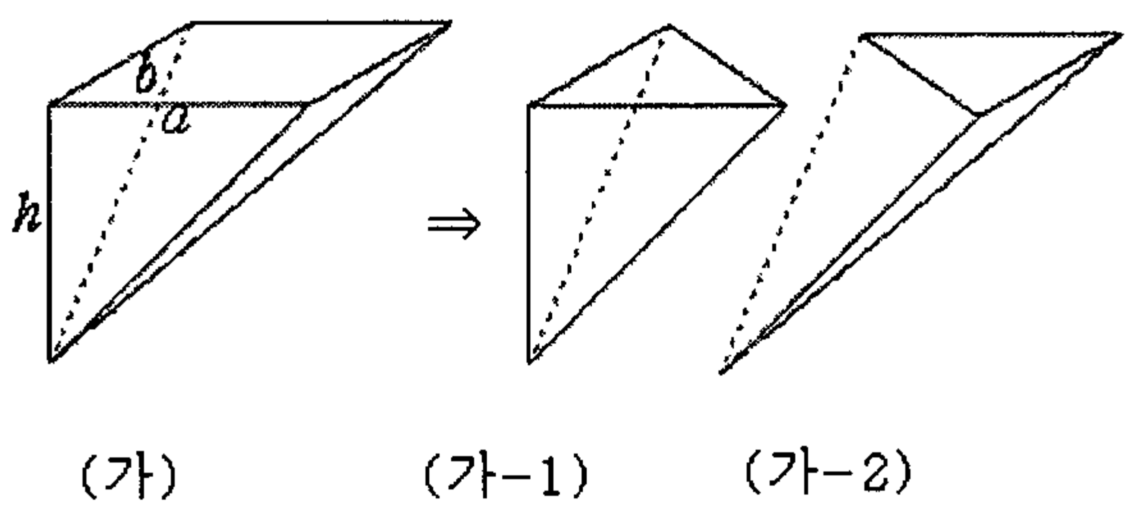
학생(나) : 자세하게 사각뿔을 관찰하여 본 결과 (가), (나), (다)는 서로 합동이 아닙니다.

[질문 6] 어떻게 분할된 사각뿔의 부피가 동일함을 설명할 수 있을까요?

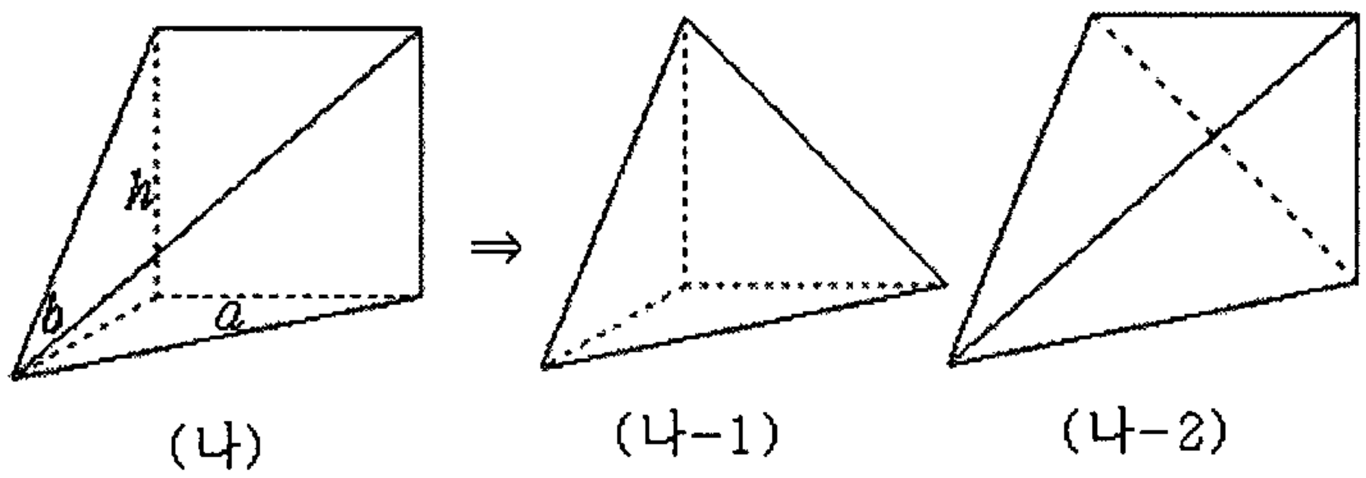
학생들은 문제해결의 방법을 찾지 못하고 있었기 때문에 구장산술의 주석에 있는 유희의 방법을 학생들에게 단계적으로 제시하여 학생들이 그 원리를 발견할 수 있도록 유도하였다.

[질문 7] 세 개의 사각뿔을 각각 두 개의 사면체로 분할하고 분할된 6개의 사면체의 부피가 동일함을 설명하시오.

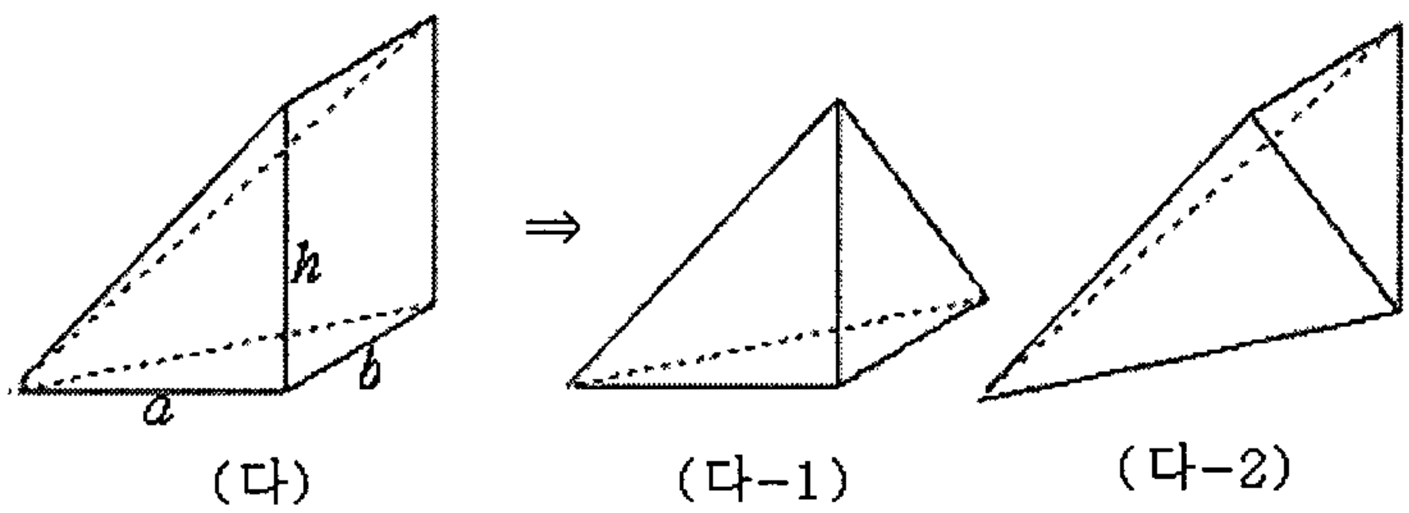
학생들은 사각뿔 (가), (나), (다)를 면과 높이가 같은 두 개의 사면체로 나누면 (가)는 사면체 (가-1)과 (가-2)로 분할되고 사각뿔 (나)는 사면체 (나-1)과 (나-2)로 분할되고 사각뿔 (다)는 사면체 (다-1)과 (다-2)로 분할됨을 설명하였다. 각각의 사면체의 부피가 동일함을 공식을 이용하여 설명할 수는 있었지만 그 이외의 방법으로는 설명하지 못하였다. 학생들이 생각할 수 있는 시간이 제한되었기 때문에 만족할 만한 답을 얻는 데에는 실패하였다. 따라서 질문을 통하여 카발리에리의 원리를 학생들이 발견할 수 있도록 질문을 세분화하였다.



[그림 3] 사각뿔 (가)의 분할

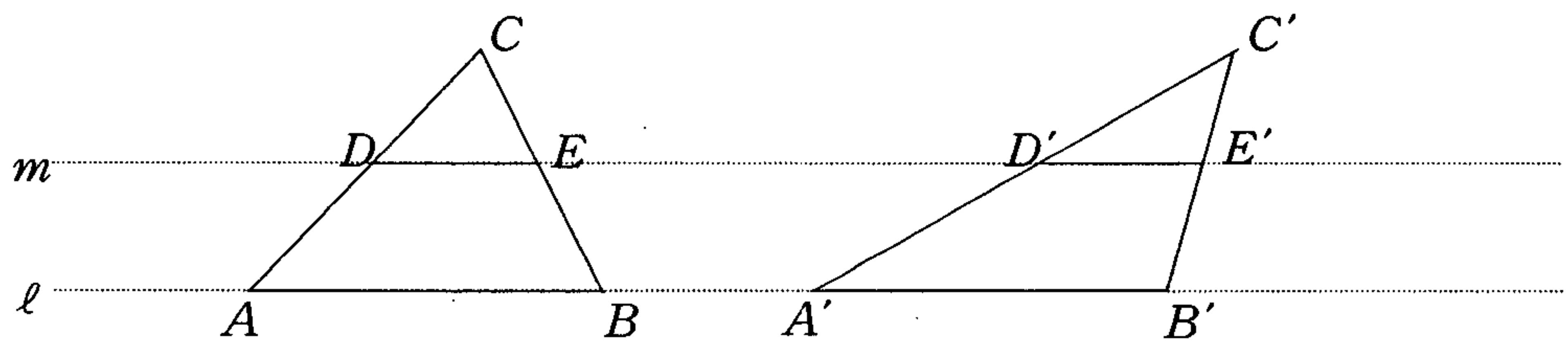


[그림 4] 사각뿔 (나)의 분할



[그림 5] 사각뿔 (다)의 분할

[질문 8] 다음은 밑변이 a이고 높이가 h인 두 삼각형이 있습니다. 이때 밑변에 평행한 직선 m이 두 도형을 지날 때, $\overline{DE}=\overline{D'E'}$임을 보이시오.



[그림 6] 면적에 대한 카발리에리의 원리

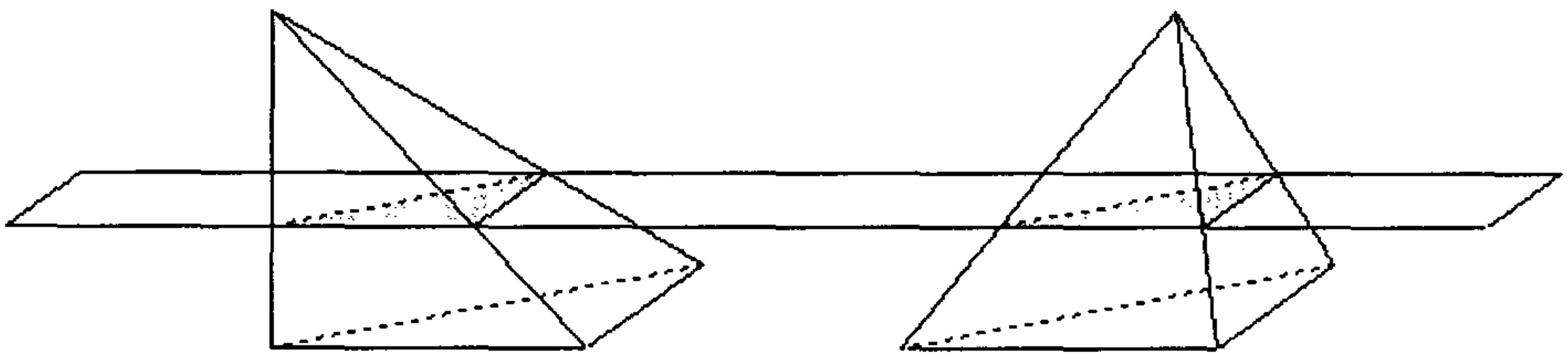
[질문 9] 두 도형이 있습니다. 한 직선과 평행한 어떤 직선으로 두 도형을 절단하여도 이때 생기는 선분의 길이가 같으면 두 도형의 면적이 같다고 할 수 있습니까?

학생들은 다각형의 경우에도 동일한 원리가 성립함을 설명할 수 있었고 다양한 도형에 대하여 이 원리를 적용할 수 있다고 하여 면적에 대한 카발리에리의 원리를 발견하는 단계에 이르게 되었다.

[질문 10] 위에서 발견한 원리를 적용하여 사면체의 부피가 동일함을 설명하시오.

절반의 학생들은 면적에 대한 카발리에리의 원리를 부피에 대하여 적용할 수 있는 방법을 발견하고 아래와 같이 설명하였다.

학생(마) : 각 삼각뿔의 밑면의 넓이와 높이는 같습니다. 따라서 밑면과 평행한 평면으로 두 삼각뿔을 자르면 각각의 단면적은 서로 같습니다. 따라서 두 삼각뿔의 부피는 같습니다.



[그림 7] 부피에 대한 카발리에리의 원리

학생(마)의 답변으로 모든 학생들은 사면체 (가-1), (나-1), (다-1)은 밑면과 높이가 같은 삼각뿔이기 때문에 카발리에의 원리에 의하여 동일한 부피이고 (가-1)과 (가-2), (나-1)과 (나-2), (다-1)과 (다-2)도 동일한 부피가 됨을 보일 수 있었다. 따라서 사면체의 부피는 직육면체의 부피의 1/6이 되고 사각뿔의 부피는 직육면체의 부피의 1/3이 됨을 발견하게 되었다.

2 단계 : 원리의 적용

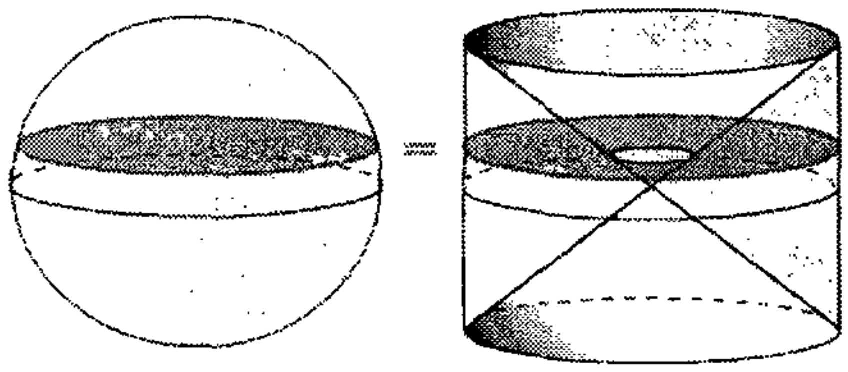
[질문 9] 각뿔의 부피를 계산할 수 있는 방법을 제시하고, 원뿔의 부피는 밑면과 높이가 동일한 원기둥의 부피의 1/3이 됨을 보이시오.

학생(라) : 사면체의 부피공식은 모든 각뿔에 대하여 확장하여 사용할 수 있습니다. 따라서 각뿔의 경우에도 밑면과 높이가 같은 각기둥의 부피의 1/3이 되고 원뿔은 무수히 많은 삼각뿔로 근접시킬 수 있기 때문에 이 때 생기는 각뿔의 부피의 합은 원뿔의 부피로 접근할 수 있습니다. 따라서 원뿔의 부피도 원기둥 부피의 1/3이 됩니다.

아르키메데스는 지레의 원리와 무게중심을 이용하여 구의 부피에 대한 공식을 발견하였다. 탐과 마미콘(2004)은 카발에리의 원리를 적용하여 비교적 간단하게 구의 부피에 대한 공식을 발견하는 방법을 제시하였다. 학생들에게 아르키메데스의 방법을 소개하고 이를 이용하여 탐과 마미콘의 방법을 발견할 수 있도록 지도하였다.

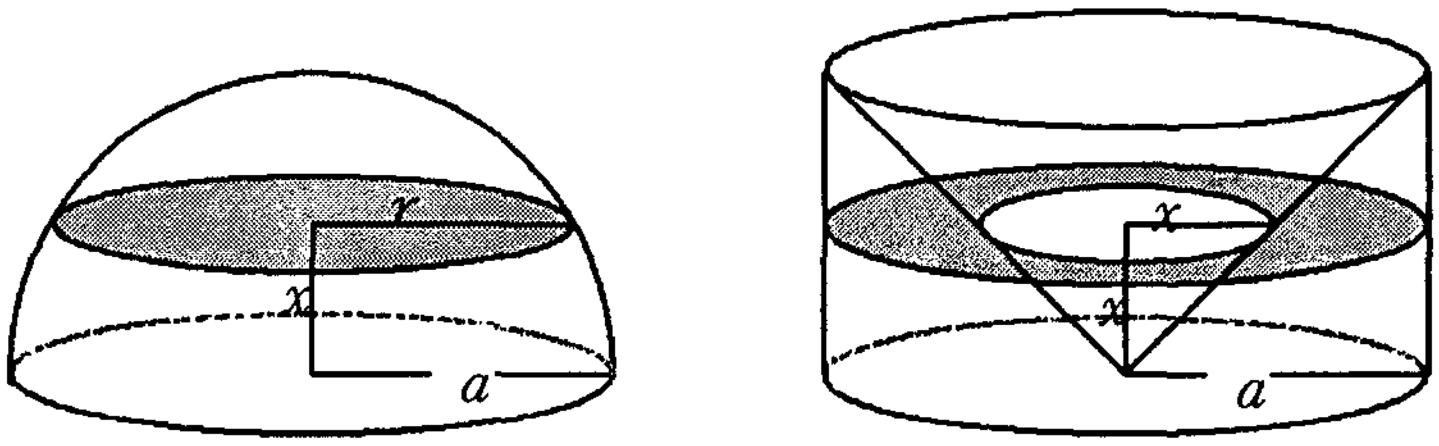
[질문 10] 반지름이 r인 구의 부피가 반지름이 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 부피의 2/3가 됨을 보이시오.

마미콘은 홈페이지((http://www.its.caltech.edu/~mamikon/calculus.html)에서 카발리에리의 원리를 이용할 수 있는 다양한 문제에 대한 프로그램을 제시하고 있어 영재수업에 도움이 될 수 있다.



[그림 8] 구의 부피(1)

위의 그림을 제시하자. 대부분의 학생들은 다음의 방법을 통하여 원기둥의 부피에서 원뿔의 부피를 빼면 구의 부피가 됨을 발견하였고 카발리에리의 원리를 이용하여 구의 부피를 구할 수 있었다.



[그림 9] 구의 부피(2)

학생(나) : 반지름이 a인 반구와 반지름이 a이고 높이가 a인 원기둥에서 원뿔을 제거한 입체도형을 밑면과 평행한 평면으로 절단하여 만들어진 면적은 같습니다. 밑면으로부터 x인 평면으로 두 입체도형을 절단하면 두 단면적은 $r^2\pi=(a^2-x^2)\pi$임을 알 수 있습니다. 카발리에의 원리에 의하여 두 입체도형의 부피가 같기 때문에 반구의 부피를 V이라 하면

$$V=a^3\pi-\frac{1}{3}a^3\pi=\frac{2}{3}a^3\pi$$

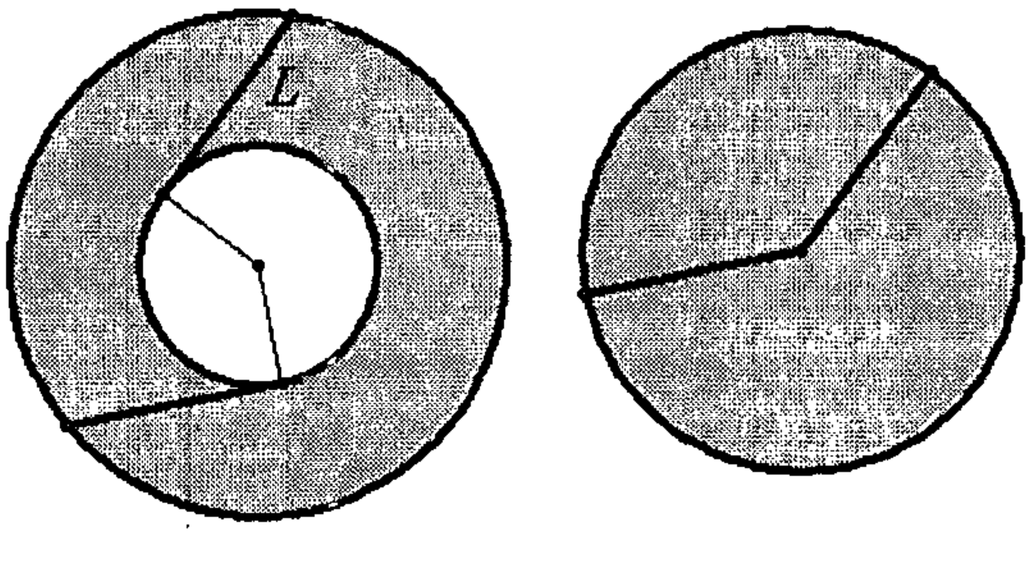
이므로 반지름이 a인 구의 부피는 $\frac{4}{3}a^3\pi$가 됩니다.

3 단계 : 원리의 일반화

카발리에리의 원리를 마미콘의 정리로 일반화한다.

아래의 그림과 같이 두 개의 동심원에 대하여 작은 원의 한 점을 잡고 그 점에 접선을 그

려서 큰 원과 만나는 점까지의 길이를 L이라 하면, 큰 원의 면적에서 작은 원의 면적을 빼면 L을 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다. 이러한 원리가 작은 원이 타원이나 다각형일 때에도 성립하는지를 사고실험을 통하여 발견하도록 한다.

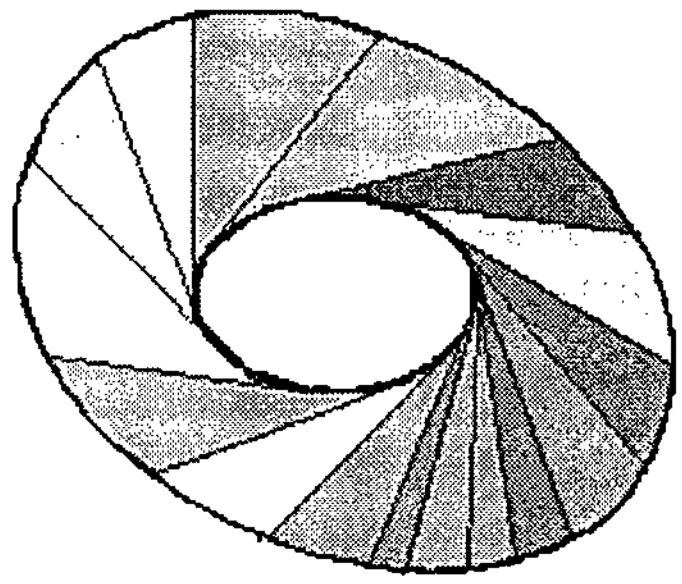


[그림 10] 마미콘의 정리(1)

[질문 11] 주어진 한 타원의 한 점에 그림과 같이 길이가 L인 접선을 작도한 다음 그 점을 타원을 따라 점을 회전할 때 접선의 자취로 생기는 면적은 얼마인가?

학생(다) : 반지름이 L이 되는 원의 넓이와 같습니다.

학생(다)는 원에 대한 정리가 타원에 대하여 성립함을 설명했지만 구체적인 원리를 설명하지는 못하였지만 마미콘이 제공하고 있는 프로그램을 통한 사고실험이 마미콘의 정리를 이해하는데 큰 도움이 되었다.



[그림 11] 마미콘의 정리(2)

4 단계 : 원리의 연역적 증명

카발리에리의 원리는 사고실험을 통하여 발견된 원리이기 때문에 연역적인 증명은 미적분학을 공부한 다음에 이루어져야 한다. 따라서 중학생들을 대상으로 하는 수업에서는 3단계에서 종료할 수밖에 없었지만 학생들이 미적분학을 공부해야할 동기를 부여했다고 볼 수 있다.

원리의 형식적 추상화는 대학교 이상에서 이루어지기 때문에 중학생들에게 적용하기에는 어려움이 있는 단계이고 이에 대한 과제를 제시함으로서 수학의 이론이 다양한 방향으로 발전할 수 있도록 영재학생들에게 문제의 목표를 제시할 필요가 있다.

V. 결 론

수학 영재들은 수학분야에서 높은 학업성취도를 보이며, 비범한 강한 자아개념과 수학적 과제에 강한 집착력이 있다. 그들은 새로운 문제에 대한 강한 도전을 갈망하며 높은 수학적 창의성을 바탕으로 평범하고 창의적이고 혁신적인 것을 좋아한다. 수학 영재 교수・학습 자료를 개발하기 위해서는 수학 영재들의 특성에 적합한 교수・학습 모형을 구안하는 것이 필요하다. 수학의 많은 이론들은 초기에 경험적이고 직관적인 방법으로 발생되었다. 수학을 완

성된 산물로서가 아니라 완성되어 가는 과정으로 파악하고 학습과정에서 재발견하도록 하는 것은 학생들의 문제해결력을 신장시키고 창의성을 길러주는 좋은 방안이 될 것이다.

위대한 수학자들의 직관력은 예리한 통찰력을 가지고 있었다. 아르키메데스는 지레의 원리와 무게중심을 이용하여 구의 부피에 대한 공식을 발견했는데 이는 연역적인 증명이 아니라 고도의 사고실험이었으며 이에 대한 확신은 분명했다. 갈릴레오는 고도의 사고실험을 통하여 물체의 무게와 관계없이 물체는 동일한 속도로 낙하한다는 이론을 발견하였다. 이러한 직관력은 수학자에게서 매우 중요한 요소이다. 뉴톤과 라이프니치가 발견한 미분적분도 초기에는 직관적인 바탕에서 출발하였기 때문에 논리의 결함에 대한 많은 공격을 받았다.

영재 수학교육에서 역사 발생적 원리의 적용은 역사속의 많은 수학자들이 직면했던 문제에 학생들이 직면할 수 있도록 할 수 있으며, 새로운 완성된 이론이 만들어지는 과정에 동참하여 학생들 스스로 수학의 재발견과 재창조의 기쁨과 성취감을 느낄 수 있도록 할 수 있다.

영재학생들의 대부분은 속진학습을 하고 있다. 속진의 진도도 학생들마다 다르게 나타나고 있기 때문에 영재교육원에서의 속진학습은 오히려 수학에 대한 흥미를 떨어뜨릴 수 있다. 삼각형의 무게중심, 사각뿔의 부피, 원뿔의 부피, 원주율 등은 영재교육에서 좋은 교수·학습 자료의 소재가 될 수 있다. 학생들은 그 공식을 알고 있지만 공식이 만들어진 원리를 잘 알고 있지 못한 경우가 많기 때문이다.

학생들이 단순하게 알고 있는 수학적 개념을 사고의 대상으로 하여 그 원리를 스스로 발견하고 원리를 적용하고 일반화 하는 과정을 통하여 학생들의 문제해결능력과 창의성을 신장시킬 수 있으며 원리를 연역적으로 증명하는 단계를 통하여 연역적 사고 능력을 배양시킬 수 있을 것이다.

참고문헌

박달원 (2006), 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법, 한국학교수학회논문집, 9권 1호.

우정호 (2005), 수학 학습 -지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.

이현미 (2003), 심화학습 영재교육의 최고의 권위자 죠셉 렌쥴리, 한국교육과정평가원 이달의 교육자.

최종현·송상헌 (2005), 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료의 개발에 관한 연구, 대한수학교육학회지<학교수학> 7권 2호.

Otto Toeplitz (1963), Calculus: A Genetic Approach, University of Chicago Publishers.

Philip D. Straffin, Jr. (1998), Liu Hui and the first Golden Age of Chinese Mathematics, Mathematics Magazin 71. 163-181.

Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian (2004), A Fresh look at the method of Archimedes, American Mathematical Monthly 23. 496-508.

Teaching Method of Volume of a Pyramid Using Cavalieri's Principle

Dal-Won Park[2]

Abstract

Cavalieri is chiefly remembered for his work on the problem "indivisibles." Building on the work of Archimedes, he investigated the method of construction by which areas and volumes of curved figures could be found. Cavalieri regarded an area as made up of an indefinite number of parallel line segments and a volume of an indefinite number of parallel plane areas. He called these elements the indivisibles of area and volume. Cavalieri developed a method of the indivisibles which he used to determine areas and volumes. We call this Cavalieri's principle which states that there exists a plane such that any plane parallel to it intersects equal areas in both objects, then the volumes of the two objects are equal. Cavalieri's principle and method of the indivisibles are very important to understand of volume of a pyramid for gifted students.

Key Words : Cavalieri's principle, Method of the indivisibles, Volume of pyramid.

2) Science Education Institute for the Gifted, Kongju National University (dwpark@kongju.ac.kr)