한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 1, 97-115, March 2008

중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위한 직관적 모델의 역할에 관한 연구

김익표[1)]

고등학교 수학 수업에서는 실수 전체의 집합에서 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하고 나눗셈은 나누는 수의 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점으로 다룬다. 본 논문에서는 정수의 사칙계산 지도에 있어서 중학교 수학 수업에서 사용되는 직관적 모델(수직선 모델, 셈돌 모델)과 고등학교 수학 수업에서 제시되는 형식적 관점과의 연계에 대하여 논의하고자 한다. 직관적 모델을 이용하여 정수의 뺄셈을 덧셈을 이용하여 나타내는 방법의 의미를 재조명하고 이를 바탕으로 (음수)×(음수)가 양수임을 지도하는 새로운 방안을 제안하고자 한다. 직관적 모델의 일관성 있는 활용에 바탕을 두고 Treffers(1986)와 Freudenthal(1991)이 제안한 수평적 수학화(horizontal mathemati-zation)의 과정을 통하여 정수의 사칙계산을 지도하는 이 방법은 중학교와 고등학교에서 정수의 사칙계산 수업에 참여하는 교사와 학생들 모두에게 나타날 수 있는 단절(박임숙, 2001)을 제거할 수 있는 방안이 될 것이다. 또 이것은 중·고등학교에서 다루는 수 체계들이 대학과정 대수학에서 다루는 추상적인 수 체계(group, ring, field)와 계통성을 가진 하나의 개념구조를 형성한다는 사실을 학생들이 인지할 수 있는 밑바탕이 될 것이다.

주요용어 : 정수의 사칙계산, 수평적 수학화, 수직선 모델, 셈돌 모델

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

정수의 사칙계산 지도를 위하여 중학교 수학 수업에서 구체적 상황 모델, 셈돌 모델, 우체부 모델, 수직선 모델 등과 같은 직관적 모델과 귀납적 외삽법, 역연산 관계에 의한 형식적 접근 등 다양한 방법을 도입하고 있으며, 고등학교 1학년 수학에서는 실수 체계 내에서

$$(-a)b=-ab,\ (-a)(-b)=ab,\ -(-a)=a$$

와 같은 성질을 연역하도록 하는 형식적 취급이 이루어지고 있다(우정호·최병철, 2003).

중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위한 직관적 모델과 고등학교 1학년 수학 수업에서 제시되는 형식적 관점과의 연계에 대한 연구가 현재까지 거의 이루어지지 않고 있

---

1) 대구대학교 (kimikpyo@daegu.ac.kr)

다. 지금까지 국내외의 정수의 사칙계산 지도에 대한 연구는 직관적 모델의 한계를 지적하면서 형식적 관점으로의 도입 방법을 모색하는 것이 거의 대부분이었다(윤성재, 1992; 우정호, 1998; 최병철 · 우정호, 2002; 우정호 · 최병철, 2003; 김남희 외, 2006; Freudenthal, 1973).

이로 인하여 중학교 수학 수업에서 음수의 사칙계산 지도를 위하여 여러 가지 모델의 일관성 없는 사용이 불가피하게 되고, 그 결과 학생들의 모델에 따른 계산 원리의 이해도는 매우 낮고 부호 규칙의 기계적 암기와 계산의 숙달에 치중하는 결과가 초래되었다(우정호 · 최병철, 2003). 실제로 대구광역시와 경상북도에 소재한 중학교에 근무하고 있거나 근무한 경험이 있는 수학교사 24명의 설문조사 결과 중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위하여 사용되는 직관적 모델과 고등학교 수학 수업에서 실수 전체의 집합에서 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하고 나눗셈은 나누는 수의 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과의 관련성을 묻는 질문에 대하여 대부분이 관련성이 없다고 대답하면서도 교과서에서 도입하고 있고 학생들의 이해에 도움이 되므로 직관적 모델을 사용한다고 주장했다.

수학이란 서로 무관한 내용들이 한데 모여 이루어진 것이 아니고 오히려 계통성이란 연계의 고리에 얽히어 있는 내용들로 구성된 학문이다. 그러므로 적절한 연계는 개념의 명확한 이해의 가장 근본적인 바탕이 된다. 이러한 관점에서 볼 때 수학 수업에 있어서 개념과 개념 사이에나 교육과정 전반에 산재해 있는 내용들 사이의 연계를 부각시켜 가르칠 필요성이 더욱 선명해진다(김익표 · 황석근, 2004). NCTM(2000)에서도 학생들이 수학적 개념들을 서로 연결할 수 있을 때, 그들의 이해가 더 깊고 영속적이 되며 수학적인 개념들의 상호관련성을 강조하는 수업을 통하여 학생들은 수학을 배우는 것뿐만 아니라 수학의 유용성에 대하여 배운다고 언급하면서 규준으로서 연계를 강조하고 있다.

정수의 사칙계산 지도에 있어서 중학교 수학 수업에서 사용되는 여러 가지 직관적 모델들과 고등학교 수학 수업에서 제시되는 형식적 관점사이의 연계에 대한 논의는 낱낱으로가 아닌 수학적 개념의 관계망을 중시함으로써 중학생들로 하여금 고등학교 수학 수업에서 심화되고 확장된 학습이 가능하도록 준비시킬 수 있을 뿐만 아니라 수학적 힘과 아름다움을 음미하고 이해하게 하는데 중요한 역할을 할 것이다(NCTM, 1989).

2. 연구의 목적

제7차 교육과정과 개정교육과정(2007)에 명시된 정수의 사칙계산의 원리가 중학교 1학년 학생들의 수준에 맞게 제시되고 이것이 고등학교 1학년 수학 수업에서 다루는 실수체계에서의 덧셈과 곱셈 연산의 형식적인 관점과 일관성 있는 연계를 형성하도록 하는 것이 필요하다. 중학교 1학년 학생들에게 직관적 모델을 이용하여 정수의 뺄셈을 빼는 수의 부호를 바꾸어 더하는 것으로 나타내는 방법을 재조명하고 이를 바탕으로 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 지도하는 새로운 방안을 제안하는 것이 본 연구의 목적이다. 이 방법의 제시는 중학교와 고등학교에서 정수의 사칙계산 수업에 참여하는 교사와 학생들 모두에게 나타날 수 있는 단절을 제거할 수 있는 방안을 제공하고, 나아가 중 · 고등학교에서 다루는 수 체계들이 대학과정 대수학에서 다루는 추상적인 수 체계(group, ring, field)들과 계통성을 가진 하나의 개념구조를 형성한다는 사실을 학생들이 인지할 수 있는 밑바탕이 될 것이다.

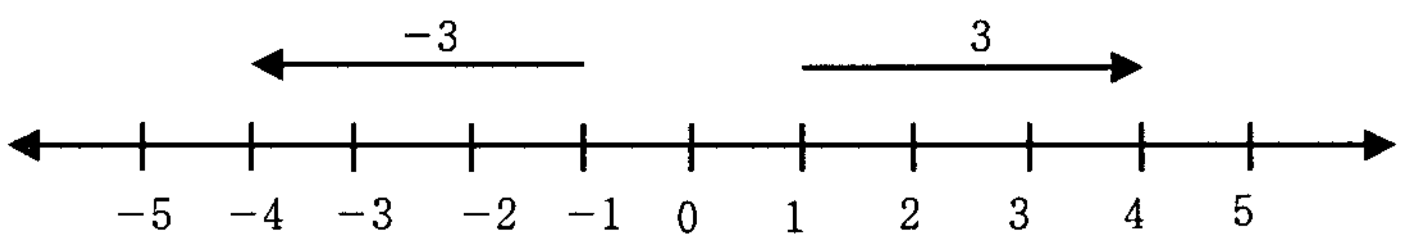
Ⅱ. 이론적 배경

중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위하여 여러 가지 모델들이 소개되고 있다(윤성재, 1992; 우정호, 1998; 김남희 외, 2006). 지금부터 우리나라 현행 16종 중학교 7-가 수학교과서(강옥기 외 2인, 2001; 강행고 외 9인, 2001; 고성은 외 5인, 2001; 금종해 외 3인, 2001; 박규홍 외 7인, 2001; 박두일 외 4인, 2001; 박윤범 외 3인, 2001; 배종수 외 7인, 2001; 신항균, 2001; 양승갑 외 6인, 2001; 이영하 외 3인, 2001; 이준열 외 4인, 2001; 전평국 외 4인, 2001; 조태근 외 4인, 2001; 최용준, 2001; 황석근·이재돈, 2001)와 미국의 50개 주에서 가장 많이 채택하고 있는 중학교 교과서인 McDougal Littell MATH Course1, Course2,Course3(Ron Larson; Laurie Boswell; Timothy D. Kanold & Lee Stiff, 2007), Glencoe Mathematics(Applications and concepts) Course1, Course2, Course3(Rhonda Bailey et al, 2006)에 도입된 직관적 모델(수직선 모델, 셈돌 모델), 형식적 접근법(귀납적 외삽법, 역연산 모델)에 대하여 간단히 소개한다.

1. 정수의 사칙계산 지도를 위한 직관적 모델

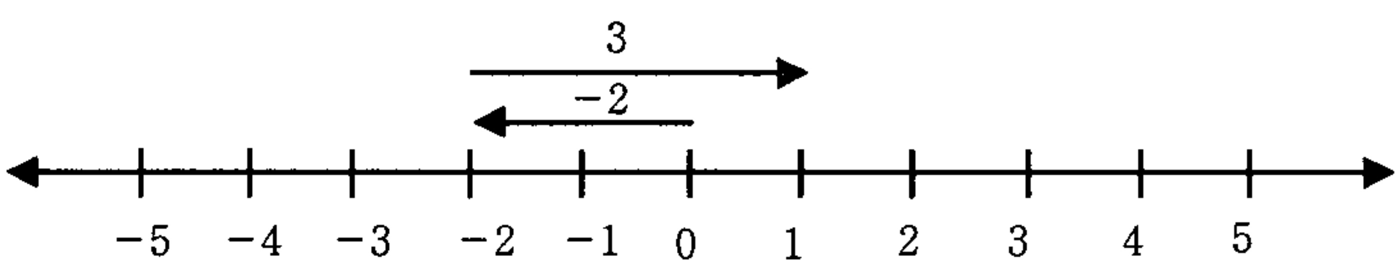
1) 수직선 모델

우리나라에서는 모든 중학교 1학년 수학교과서에서 수직선 모델을 이용하여 정수의 덧셈을 도입했고 정수의 뺄셈의 경우는 6종 교과서(강옥기 외 2인, 2001; 배종수 외 7인, 2001; 이영하 외 3인, 2001; 이준열 외 4인, 2001; 조태근 외 4인, 2001; 최용준, 2001)에서 수직선 모델을 도입했다. 미국에서는 위에서 언급한 2종류의 교과서 중 McDougal Littell MATH Course3(뺄셈에서 귀납적 외삽법을 도입)를 제외한 모든 교과서에서 셈돌 모델과 수직선 모델을 이용하여 정수의 덧셈과 뺄셈을 도입했다. 이 모델에서 수는 방향과 크기를 갖는 화살표로, 3은 오른쪽으로 향하는 길이 3의 화살표이고 -3은 왼쪽으로 향하는 길이 3의 화살표이다.

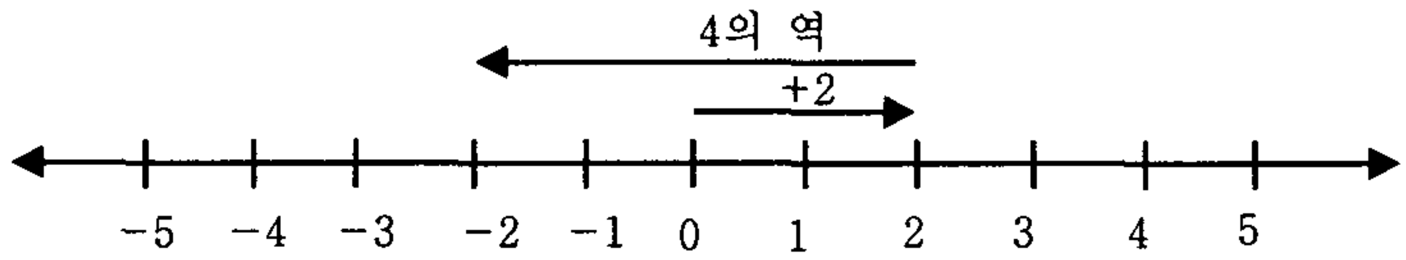


덧셈과 뺄셈은 화살표의 머리에 더하거나 뺄 수를 나타내는 화살표의 꼬리를 두되, 뺄셈의 경우에는 화살표를 반대방향으로 놓는다.

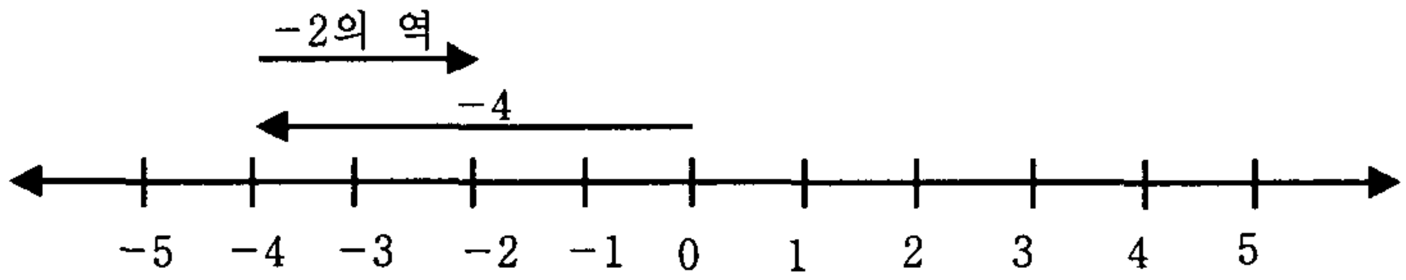
수직선 모델은 주로 정수의 덧셈과 뺄셈을 설명하기 위하여 도입하는 모델이다. 이를테면 $(-2)+(+3)=+1$에서 $+1$은 수직선 위의 -2에서 오른쪽으로 3만큼 간 곳에 있는 수이다.



$(+2)-(+4)=-2$에서 -2는 수직선 위의 2에서 왼쪽으로 4만큼 간 곳에 있는 수이다.



$(-4)-(-2)=-2$에서 -2는 수직선 위의 -4에서 오른쪽으로 2만큼 간 곳에 있는 수이다.



우리나라 교과서에서는 구체적 상황(속력, 시간, 거리 관계)을 수직선 모델을 이용하여 도입하면서 귀납적 외삽법과 연결시켜 곱셈을 설명(강옥기 외 2인, 2001; 고성은 외 5인, 2001; 박두일 외 4인, 2001; 배종수 외 7인, 2001; 이영하 외 3인, 2001; 조태근 외 4인, 2001; 최용준, 2001)하는 방법을 채택했고 미국교과서에서는 Glencoe Mathematics(Applications and concepts) Course2 한 종류만 수직선 모델을 이용하여 곱셈을 도입했다. 나눗셈을 도입하기 위하여 수직선 모델을 이용한 교과서는 없었다.

2) 셈돌 모델

Gattegno에 의하여 제안된 셈돌 모델(counting model, number chip)은 양수를 나타내는 검은 돌과 음수를 나타내는 흰 돌을 이용하는 것이다(윤성재, 1992). 이때, 검은 돌 하나와 흰 돌 하나는 서로 상쇄할 수 있으며 역으로 검은 돌 하나와 흰 돌 하나로 된 쌍은 부활시킬 수 있다고 본다(우정호, 1998). 셈돌 모델도 수직선 모델과 마찬가지로 주로 정수의 덧셈과 뺄셈을 설명하기 위하여 도입하는 모델이다. 이를테면 부호가 같은 정수의 덧셈은 셈돌을 합치면 된다.

$$(-2)+(-3)=-5$$

○ ○ + ○ ○ ○ = ○ ○ ○ ○ ○

양수와 음수의 덧셈은 검은 돌 한 개와 흰 돌 한 개를 짝지어 상쇄시키면 된다.

$$(-2)+(+3)=+1$$

○ ○ + ● ● ● = ●

부호가 같은 정수의 뺄셈은 빼는 수만큼 셈돌을 제거하면 된다.

$$(-4)-(-2)=-2$$

○ ○ ○ ○ − ○ ○ = ○ ○

부호가 다른 두 정수의 뺄셈에서는 '없는 쌍을 만들어 내기'가 필요하다.

$$(+4)-(-2)=+6$$

●●●● - ○○ = ●●●●(●●○○) - ○○
= ●●●●●●

셈돌 모델에서는 덧셈과 뺄셈이 자연스럽게 설명되는 반면, 흰 바둑돌과 흰 바둑돌을 곱하는 경우에 검은 바둑돌이 된다는 규칙을 받아들여야 하는 단점이 있다(김남희 외, 2006).

고성은 외 5인(2001)은 덧셈을 설명하기 위한 탐구활동에서, 이준열 외 4인(2001)과 조태근 외 4인(2001)은 덧셈과 뺄셈을 설명하기 위한 탐구활동에서 셈돌 모델을 채택했고 양승갑 외 6인(2001)과 이영하 외 3인(2001)은 셈돌 모델을 채택하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 도입을 시도했다. 미국교과서는 덧셈과 뺄셈을 설명하기 위하여 수직선 모델과 셈돌 모델을 병행하여 사용하는 경향이 두드러졌고 곱셈을 설명하기 위하여 셈돌 모델을 채택하고 이를 바탕으로 귀납적 외삽법(Glencoe Mathematics Course 1)과 수직선 모델(Glencoe Mathematics Course 2)을 이용했다.

2. 정수의 사칙계산 지도를 위한 형식적 모델

여기에서는 우리나라 교과서와 미국 교과서에서 사용된 귀납적 외삽법과 역연산 모델에 대하여 간단히 설명한다.

1) 귀납적 외삽법

Freudenthal(1973)은 음수의 지도에 있어서 직관적 지도가 갖고 있는 한계를 지적하면서 형식 대수적인 형식불역의 원리에 따라 지도할 것을 주장했다.

다음은 연산의 구조가 유지되도록 수 체계를 확장해야 한다는 형식불역의 원리가 귀납적으로 도입된 귀납적 외삽법(inductive-extrapolation method)이다(김남희 외, 2006).

덧셈	뺄셈	곱셈
$(+3)+(+2)=+5$	$(+3)-(+2)=+1$	$(+3)\times(+2)=+6$
$(+3)+(+1)=+4$	$(+3)-(+1)=+2$	$(+3)\times(+1)=+3$
$(+3)+0=+3$	$(+3)-0=+3$	$(+3)\times 0=0$
$(+3)+(-1)=?$	$(+3)-(-1)=?$	$(+3)\times(-1)=?$
$(+3)+(-2)=?$	$(+3)-(-2)=?$	$(+3)\times(-2)=?$

즉, 자연수에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈이 진행되는 규칙으로부터,

덧셈	뺄셈	곱셈
$(+3)+(-1)=+2$	$(+3)-(-1)=+4$	$(+3)\times(-1)=-3$
$(+3)+(-2)=+1$	$(+3)-(-2)=+5$	$(+3)\times(-2)=-6$

이 되어야 한다는 것을 귀납적으로 추측할 수 있는 것이다.

귀납적 외삽법은 주로 정수의 곱셈을 도입하기 위하여 이용하는 모델이다. 이 방법을 이용하여 (양수)×(음수) 또는(음수)×(양수)가 음수가 된다는 사실로부터 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 유도할 수 있다<그림 1>.

정수의 덧셈의 도입을 위하여 귀납적 외삽법을 사용한 교과서는 앞에서 소개한 우리나라와 미국교과서를 통틀어 1종도 없었고 뺄셈인 경우에는 McDougal Littell MATH Course3 한 교과서 밖에 없었다. 이 교과서에서는 정수의 뺄셈을 덧셈으로 나타내기 위하여 귀납적 외삽법을 사용하였다.

$(+3)\times(-2)=-6$
$(+2)\times(-2)=-4$
$(+1)\times(-2)=-2$
$0\times(-1)=0$
$(-1)\times(-2)=+2$
$(-2)\times(-2)=+4$
$(-3)\times(-2)=+6$

<그림 1>귀납적 외삽법 (음수×음수)

우리나라와 앞에서 소개한 미국 교과서에서는 각각 1종의 교과서(양승갑 외 6인, 2001; McDougal Littell Course3, 2006)을 제외하고 모두 곱셈의 도입을 위하여 귀납적 외삽법을 채택하였다.

뺄셈	차	덧셈
$3-3$	0	$3+(-3)$
$3-2$	?	$3+?$
$3-1$	?	$3+?$
$3-0$	?	$3+?$
$3-(-1)$	?	$3+?$
$3-(-2)$	?	$3+?$
$3-(-3)$	?	$3+?$

2) 역연산 모델

이 모델은 주로 정수의 뺄셈과 나눗셈의 설명을 위하여 도입하는 방법이다. 일반적으로 자연수에서 뺄셈은 덧셈의 역과정으로, 나눗셈은 곱셈의 역과정으로 설명된다. 다음은 강행고 외 9인(2001)을 포함한 우리나라 8종 교과서가 역연산에 의하여 정수의 뺄셈을 설명한 예이다.

$(+5)+(+3)=+8$에서 $(+8)-(+3)=+5$임을 알 수 있다. 그런데 $(+8)+(-3)=+5$이므로 $(+8)-(+3)=(+8)+(-3)$이 성립한다.

$(+5)+(-3)=+2$에서 $(+2)-(-3)=+5$임을 알 수 있다. 그런데 $(+2)+(+3)=+5$이므로 $(+2)-(-3)=(+2)+(+3)$이 성립한다.

정수의 나눗셈에서는 우리나라와 미국 교과서 모두 곱셈에 대한 역연산 모델을 도입하였다.

3. 선행연구의 고찰

Fischbein(1994)은 음수는 처음부터 형식적으로 다루어져야한다는 Freudenthal(1973)의 견해에 동의하면서 형식 연역적인 관점에서 수학적인 개념을 제공할 첫 번째 기회라고 주장하

였다. Fischbein(1994)은 Intuition in Science and Mathematics라는 그의 책에서 음수와 관련된 Freudental의 견해를 다음과 같이 소개하고 있다.

> 그는 직관을 넘어서는 합리화에 대한 필요성이 음수의 지도에서 처음으로 느낄 수 있다고 생각했다. 또 음수의 지도를 위하여 수직선 모델은 없어져야 하고 귀납적 외삽법을 사용해야한다고 제안했다. 일관성 있는 부호규칙을 받아들일 수 있는 다양한 연습문제들을 소개하면서 이 주제에 대한 형식적인 취급은 보다 더 높은 수준에서 엄밀한 증명의 예시가 된다고 기술하고 있다.

윤성재(1992)는 Fischbein과 Freudenthal의 의견을 언급하면서 음수와 음수의 사칙계산 지도를 위해 새로운 직관적 모델을 모색하고 현 모델의 효율적인 지도방안을 모색하는 한편 형식적 지도 방법이 언제 어떻게 도입되어야 할지, 그 구체적 접근방안이 아울러 연구되어야 한다고 주장했다.

최병철 · 우정호(2002)는 중학교 1학년에서 다루고 있는 음수의 구체적 상황 모델과 수직선 모델은 불완전하여 여러 가지 모델이 편의적으로 사용되고 있고, 음수 개념의 본질에 대한 이해를 할 수 있는 설명이 부재하고, 음수개념의 본질을 바탕으로 한 연산지도가 이루어지고 있지 않다는 문제점을 제기하면서 형식적 접근과 현실적 문맥에 의한 접근을 반영한 교재를 통한 음수지도에 관한 연구를 제안하였다.

우정호 · 최병철(2003)은 현행 교육과정과 교과서에서 다루어지고 있는 정수지도 모델의 한계점을 극복하고 음수의 형식적 본질을 드러내어 지도하는 가능성을 탐색하기 위하여 음수를 방정식의 해로서 도입하고 그에 따른 정수의 사칙계산의 접근방법을 고안하고 그 지도 가능성을 살펴보았다. 그러나 그들은 중학교 1학년 학생들은 그러한 형식적 접근 방법에 내포된 논리적 사고과정을 이해할 수 있는 인지적 발달이 이루어지지 못했기 때문에 형식적 접근 방법에 따른 정수의 지도 또한 많은 문제점을 포함하고 있는 것으로 결론을 내렸다.

박임숙(2001)은 수의 연산이 자연수, 정수의 사칙계산을 거쳐 실수의 연산으로 형식화되는 과정에서 학생들은 많은 단절을 갖게 된다고 주장하면서 이러한 형식화 과정의 단절에서 학생들의 인지과정을 도울 수 있는 방법으로 새로운 개념의 이해를 위한 반영적 사고 과정이나 증명 등에 더 많은 시간을 할애하는 것을 제안하였다.

앞에서 소개한 선행연구들은 음수의 사칙계산 지도에 있어서 직관적 모델의 한계를 지적하면서 그 대안으로서 현실적 문맥에 의한 접근을 포함한 형식적 접근 방법의 도입을 검토하는 것이 주된 내용이었다. 그러나 이와 같은 형식적 접근 방법 역시 학생들의 인지적 발달이 이루어지지 못한 이유로 문제점이 있음이 드러났으며 학생들이 단절을 갖게 되는 결과로 이어지게 되었다. 중학교 1학년에서 음수의 뺄셈을 배우는 과정과 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 배우는 과정에서 생성된 단절이 고등학교에서 반영적 사고 과정이나 증명 등에 많은 시간을 할애하는 방법을 통하여 단절이 매워질 수 있을지 의문스럽다. 따라서 새로운 방향으로의 모색이 필요한 것으로 분석된다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 대구광역시와 경상북도에 소재한 중학교 1학년 수학교과를 담당하고 있거나 담당한 경험이 있는 교사 24명의 설문조사를 바탕으로 연구를 진행하였다. 이들 교사들에 대한 설문 결과를 바탕으로 정수의 사칙계산 지도에 대한 현장의 상황을 파악함으로써 중학생들에게 가장 적합한 방법을 찾고, 이 방법이 고등학교와 대학교에서 다루는 사칙계산의 도입과 어떻게 연계를 이루는지에 대하여 알아보았다.

2. 연구 내용 및 방법

연구자가 접해본 중학교 1학년 수학을 담당하는 교사들 중의 일부가 음수의 사칙계산을 지도하는데 있어서 음수 개념의 본질을 바탕으로 지도하기보다는 기계적인 계산에 치중하는 것 같은 인상을 받은 것이 이 연구를 시작하게 된 결정적인 계기가 되었다. 우리나라 교과서에서도 음수의 사칙계산 지도에 있어서 뺄셈이나 곱셈의 도입을 위하여 2개 이상의 모델을 이용한 교과서도 있었다. 하나의 개념을 도입하기 위하여 여러 가지 모델을 사용함으로써 오히려 학생들의 이해를 방해하는 결과를 초래할 수 있을 것이다. 따라서 중학생들의 지도에 가장 적합하다고 생각되는 직관적 모델이 고등학교와 대학교에서 다루는 사칙계산의 형식적인 관점과 어떻게 연계를 이루는지 알아보고 이를 바탕으로 중학교 1학년 학생들을 대상으로 하는 정수의 사칙계산의 새로운 지도 방안을 제안하고자 한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 설문결과

설문조사 대상 교사들(24명) 중 중학교 1학년 수학수업에서 정수의 사칙계산 지도를 할 때, 선택한 모델을 정리하면 다음과 같다.

모델	덧셈	뺄셈	곱셈	나눗셈
수직선 모델	19명	14명	4명	4명
셈돌 모델	3명	4명	1명	1명
귀납적 외삽법	2명	2명	14명	8명
역연산 모델	·	4명	·	6명
구체적 상황 모델	·	·	5명	5명

설문조사 결과 덧셈과 뺄셈에서는 수직선 모델, 곱셈과 나눗셈에서는 귀납적 외삽법을 가장 많이 사용하는 것으로 나타났다. 모델의 선택기준으로는 학생들의 이해도(15명), 교과서(5명), 교사 자신의 선호도(4명)순이었다. <부록>의 설문지 3번과 4번 문항에 대한 응답은 '관계가 없다'가 15명, '역연산 모델과 관계가 있다'가 7명, '귀납적 외삽법과 관계가 있다'가

2명으로 조사되었다. 설문조사에서 알 수 있는 것처럼 고등학교에서 빼셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 곱셈의 역원으로 더하고 곱하는 형식적 관점과 중학교에서 다루는 직관적 모델과의 관련성을 언급한 교사는 없었다. 중학교 1학년을 대상으로 하는 수학 수업에서 고등학교 수학 수업과의 연계성을 고려하는 것은 현실적으로 어렵다는 것이 설문조사 대상 교사들의 공통된 인식이었다.

2. 직관적 모델과 형식적 관점 사이의 연계

두 연산 $+$, $\times$을 가진 실수 전체의 집합 R를 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하고, $+$, $\times$에 대한 항등원과 R의 각 원소에 대하여 $+$, $\times$에 대한 역원이 존재하는 수 체계로서 정의한 다음 빼셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 곱셈의 역원으로 더하고 곱하는 것으로 정의하는 것이 고등학교에서 사칙계산을 형식적 관점으로 다루는 것이다. 그러나 중학생들에게 이와 같은 형식적 관점으로 지도하는 것은 현행 교육과정에 따르면 적합하지 않을 뿐만 아니라 중학교 1학년 학생들의 이해 범위를 넘어서는 접근 방법이다.

정수의 사칙계산의 형식적 관점의 지도 모델로 Freudenthal(1973)에 의하여 제안된 귀납적 외삽법은 중학생들의 이해를 도울 수 있지만 고등학교에서 다루는 수 체계의 사칙계산 지도에 대한 형식적 관점과의 연계가 없다는 단점을 가지고 있다. 따라서 직관적 모델들과 형식적 관점과의 연계의 고리를 발견할 수 있다면 선행연구에서 언급했던 것처럼 중학교 1학년 학생들에게 형식적 관점으로 사칙계산을 도입하려는 의도를 줄일 수 있을 것이다.

여기에서는 대표적인 직관적 모델인 수직선 모델과 셈돌 모델을 이용하여 설명하기로 한다.

1) 정수의 덧셈

우리나라의 교과서는 탐구활동에서 셈돌 모델 또는 구체적 상황 모델을 이용하고 본문에서 수직선 모델을 이용하거나 수직선 모델만을 이용하여 정수의 덧셈을 소개하고 있다. 덧셈을 설명하는 방식에 있어서 미국 교과서는 셈돌 모델과 수직선 모델을 병행하여 사용하는 것을 제외하고는 우리나라 교과서와 차이가 없었다.

지금부터 탐구 활동과 학습활동의 두 단계로 분리하여 정수의 사칙계산의 지도 방법을 제안하고자 한다.

(1) 탐구활동

수직선 모델을 도입하여 오른쪽으로 1만큼 이동한 것을 $+1$, 왼쪽으로 1만큼 이동한 것을 -1로 놓고 학생 활동을 통하여 수직선 모델에서 이동하는 것을 정수의 덧셈으로 표현하도록 유도한다. 그 다음 수직선 모델에서 오른쪽으로 1만큼 이동한 것을 검은 바둑돌 1개($+1$)로, 왼쪽으로 1만큼 이동한 것 흰 바둑돌 1개(-1)로 놓고 수직선 모델에서 정수의 덧셈을 셈돌 모델에서 정수의 덧셈으로 바꾸는 활동을 하도록 한다. 여기에서 수직선 모델은 같은 개수의 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 합하면 0이 되는 실제 모델을 제공하는 역할을 한다. 수직선 모델과 셈돌 모델을 병행함으로써 다른 부호의 덧셈을 효과적으로 설명할 수 있는 준비가 가능하다.

(2) 학습활동

수직선 위의 원점에서 오른쪽으로 3만큼 이동한 점에서 왼쪽으로 3만큼 이동한 점이 원점

이므로 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 3개를 더하면 0이고 수직선 위의 원점에서 왼쪽으로 3만큼 이동한 점에서 오른쪽으로 3만큼 이동한 점이 원점이므로 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 3개를 더하면 0이다. 이것을 수학적 기호로 표현하면

$$(+3)+(-3)=0,\ (-3)+(+3)=0$$

이다. 따라서

$$(+3)+(-3)=(-3)+(+3)=0$$

이 성립한다. 이것은 정수 전체의 집합에서 덧셈에 대한 항등원과 각 원소의 역원이 존재하는 것과 연계가 됨을 알 수 있다.

2) 정수의 뺄셈

우리나라 중학교 1학년 교과서에서는 수직선 모델, 셈돌 모델, 구체적 상황 모델, 역연산 모델 등 다양한 방법을 통하여 정수의 뺄셈을 소개하는 반면 미국 교과서에서는 McDougal Littell Course 3에서 귀납적 외삽법을 이용하여 뺄셈을 덧셈으로 나타내도록 한 것을 제외하고는 셈돌 모델과 수직선 모델을 이용하여 정수의 뺄셈을 설명하고 있다. 미국 교과서가 우리나라 교과서와 다른 점은 수직선 모델에서 역원 개념(opposite)을 도입하고 셈돌 모델을 이용한 활동을 통하여 뺄셈을 빼는 수의 역원을 더하는 것으로 정의한다(Glencoe Mathematics Course 2, 3, 2006). 이 교과서의 설명을 소개하면 다음과 같다.

$(+3)-(+5)$를 계산하기 위해 검은 바둑돌 2개와 흰 바둑돌 2개를 더한다.

●●● - ●●●●● = ●●●(●●○○) - ●●●●● = ○○

따라서 $(+3)-(+5)=-2$이고 $(+3)+(-5)=-2$이므로 $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$이다. 여기에서의 설명은 셈돌 모델을 이용한 활동과 덧셈을 이용하여 뺄셈을 설명하고 있다.

황석근 외 6인(2008)은 제 7차 교육과정에 대한 개정교육과정 검정교과서에서 정수의 뺄셈을 도입하기 위하여 다음 가정을 제시하면서 정수의 뺄셈을 빼는 수의 부호를 바꾸어 더하는 방법을 소개하였다.

어떤 정수에서 자기 자신을 뺀 것은 0이다. 이를테면

$$(+5)-(+5)=0,\ (-5)-(-5)=0$$

$$\begin{aligned}(-3)-(+5)&=(-3)+0-(+5)\\&=(-3)+(-5)+(+5)-(+5)\\&=(-3)+(-5)+0\\&=(-3)+(-5)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}(-3)-(-5)&=(-3)+0-(-5)\\&=(-3)+(+5)+(-5)-(-5)\\&=(-3)+(+5)+0\\&=(-3)+(+5)\end{aligned}$$

위의 가정은 정수의 덧셈과 뺄셈 지도에 대한 직관적 모델과 형식적 관점 사이의 연계의 고리를 제공하는 결정적인 단서이다. 여기에서는 황석근 외 6인이 제시한 정수의 뺄셈의 원리를 재조명하고 탐구활동과 학습활동에 대하여 제안하고자 한다.

(1) 탐구활동

몇 개의 검은(흰) 바둑돌에서 같은 수의 검은(흰) 바둑돌을 빼는 활동을 하도록 한다. 이를테면 검은(흰) 바둑돌 3개에서 검은(흰) 바둑돌 3개를 빼는 활동을 하도록 한다. 검은 바

둑돌을 +1, 흰 바둑돌을 −1로 나타내기로 한 것을 상기시키면서 앞의 활동을 수학적 기호로 표현하도록 한다. 그 결과 학생들은 다음과 같이 표현 할 수 있을 것이다.

$$(+3)-(+3)=0,\ (-3)-(-3)=0$$

이것은 Treffers(1986)와 Freudenthal(1991)이 제안한 것으로서 현실 상황을 수학적인 용어로 바꾸는 수평적 수학화(horizontal mathematizing)의 예로 볼 수 있다.

(2) 학습활동

$$(-3)-(+5) \text{와 } (-3)-(-5)$$

의 계산을 위하여 셈돌 모델을 이용한 활동을 하도록 유도한다.

(−3)−(+5) ⇒ ○ ○ ○ - ● ● ● ● ●

셈돌 모델에서 뺄셈은 같은 색과 같은 수의 바둑돌끼리 빼는 것으로 가정했기 때문에

○ ○ ○ - ● ● ● ● ●

를 계산하기 위해서는 다음과 같은 조작을 필요로 한다.

○ ○ ○ (○ ○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ●) - ● ● ● ● ●

이것을 수학적 용어로 바꾸도록 한다.

$$(-3)-(+5)=(-3)+(-5)+(+5)-(+5)$$

따라서 다음이 성립한다.

○ ○ ○ - ● ● ● ● ● = ○ ○ ○ (○ ○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ●) - ● ● ● ● ●
= ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
= ○ ○ ○ + ○ ○ ○ ○ ○

이 사실을 수학적 용어로 바꾸도록 하면 학생들은 다음과 같이 표현할 것이다.

$$(-3)-(+5)=(-3)+(-5)$$

(−3)−(−5) ⇒ ○ ○ ○ - ○ ○ ○ ○ ○ ○이고 같은 방법으로 다음 사실이 성립한다.

○ ○ ○ - ○ ○ ○ ○ ○ = ○ ○ ○ (● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○) - ● ● ● ● ●
= ○ ○ ○ ● ● ● ● ●

= ○ ○ ○ + ● ● ● ● ●

이 사실을 수학적 용어로 바꾸도록 하면 학생들은 다음과 같이 표현할 것이다.

$$(-3)-(-5)=(-3)+(+5)$$

따라서

$$(-3)-(+5)=(-3)+(-5)$$

이고

$$(-3)-(-5)=(-3)+(+5)$$

가 성립한다.

이상에서 우리는 수직선 모델과 셈돌 모델이라는 직관적 모델을 이용한 활동과 수평적 수학화의 도입을 통하여 $(+3)-(+3)=0$과 $(-3)-(-3)=0$의 가정을 유도하도록 하고

$$(-3)-(+5)=(-3)+(-5),\ (-3)-(-5)=(-3)+(+5)$$

를 이끌어 냄으로써 직관적 모델을 이용하여 뺄셈을 빼는 수의 부호를 바꾸어 더하는 것으로 정의하는 이 방법은 고등학교 1학년에서 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하는 것으로 정의할 때 생길 수 있는 단절을 제거하는 역할을 할 것이다.

3) 정수의 곱셈

고성은 외 5인(2001)의 교과서를 포함한 7종의 우리나라 교과서에서는 구체적 상황(시간, 거리, 속력 관계)과 수직선 모델을 이용하여 귀납적 외삽법으로 곱셈을 설명하고 있고 황석근・이재돈(2001)을 포함한 8종 교과서에서는 귀납적 외삽법으로만 곱셈을 설명하고 있다.

McDougal Littell Course1, 2에서는 귀납적 외삽법만으로 곱셈을 설명했고 Course3에서는 구체적 상황을 이용하여 곱셈을 설명했다. Glencoe Mathematics Course1, 2, 3에서는 수직선 모델과 셈돌 모델을 이용하여 귀납적 외삽법으로 곱셈을 설명하는 형식을 도입하여 우리나라 교과서와 귀납적 외삽법의 도입에 있어서 약간의 차이를 보이고 있었다.

이들 교과서에서 도입하고 있는 공통적인 사항은 (양수)×(음수)가 음수가 된다는 사실로부터 귀납적 외삽법을 이용하여 오른쪽과 같이 (음수)×(음수)는 양수가 됨을 설명하다는 사실이다.

중학교 1학년 학생들과 이들을 지도하는 수학교사들에게 가장 어려운 부분들 중의 하나가 (음수)×(음수)가 양수임을 이해시키는 것이다. 여기에서는 앞에서 소개한 정수의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이용하여 중학교 1학년 학생들에게 두 음수의 곱이 양수가 됨을 설명할 수 있는 새로운 방안을 제시하고자 한다. 단, 자연수에서의 사칙계산과 마찬가지로 정수의 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 가정한다.

(1) 탐구활동

정수의 뺄셈에서

$$0-(+3)=0+(-3)=-3$$

이라는 사실을 이용하여 $-(-3)$을 다음과 같이 두 정수의 뺄셈으로 나타내도록 유도한다.

$$-(-3)=0+[-(-3)]=0-(-3)$$

한편, 정수의 뺄셈으로부터

$$0-(-3)=0+(+3)=+3$$

이므로 $-(-3)=+3$이 성립함을 학생들은 쉽게 이해할 수 있다.

(2) 학습활동

탐구활동을 이용하여 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 설명하는 방법에 대하여 생각해보자. 흰 바둑돌을 1개씩 2번 더하면 흰 바둑돌 2개가 되는 활동으로부터 $(-1)\times(+2)=-2$을 유도하고 $(-1)\times$(정수)에서 1과 곱셈기호를 생략하여 $-$(정수)로 나타낼 수 있음을 지도한 후

$$(-1)\times(-2)=-(-2)$$

로 나타낼 수 있음을 학생들에게 이해시킬 수 있을 것이다. 따라서 다음과 같은 결론을 유도할 수 있다.

$$(-3)\times(-2)=(-1)\times(+3)\times(-2)=(-1)\times(-6)=-(-6)=+6$$

지금까지 Freudenthal(1973)에 의하여 제안된 귀납적 외삽법을 사용하지 않고 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 중학생들에게 지도하는 방안을 제시하였다. 귀납적 외삽법이 중학생들의 이해를 도울 수 있는 장점은 있지만 고등학교 이상의 학생들에게는 (음수)×(음수)의 지도를 위하여 이 방법을 사용하지 않고 있다. 따라서 본 연구자가 제시한 이 방법은 고등학교 이상의 학생들에게는 (음수)×(음수)를 지도하는 가장 근접한 방법으로 중학생들에게 지도할 수 있는 방법의 제안이라는 사실에 의의를 두고자 한다.

정수의 나눗셈에 대해서는 역연산 모델이 효과적이라는 사실에 동의하면서 우리나라와 미국교과서에서 이 모델을 채택하고 있어 정수의 나눗셈에 대한 언급은 생략한다.

Ⅳ. 결 론

NCTM(1989)은 교육과정의 규준들 중의 하나인 수학적 연계를 언급하면서 학생들이 수학을 통합된 전체로 볼 수 있어야 한다고 주장했다. 정수의 사칙계산 지도에 있어서 초등, 중등, 대학과정을 단계적으로 연결하는 하나의 개념구조를 형성하는 지도 방법의 제시는 박임숙(2001)이 언급한 단절을 제거하여 학생들의 이해를 돕는 것은 물론이고 정수의 사칙계산을 통합된 전체로서 조망함을 통하여 보다 더 심화된 내용의 학습에 대한 준비를 가능하게

하는 역할을 할 것이다. 이와 같은 의미에서 사칙계산 지도에 있어서 중학교 수학에서 취급하는 직관적 모델과 고등학교에서 다루는 형식적 관점과의 연계를 바탕으로 하는 지도 방법의 고찰은 중요하다고 볼 수 있다.

우리는 수직선 모델과 셈돌 모델이라는 직관적 모델을 이용하여 정수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더하는 이유를 바탕으로 학생들에게 (음수)×(음수)가 양수가 됨을 지도할 수 있는 새로운 방안을 제시할 수 있었다. 이것은 고등학교 1학년 수학 수업에서 정수 전체의 집합에서 뺄셈과 나눗셈을 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하고 나누는 수의 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점에 대한 직관적 모델을 제공함으로써 중학교와 고등학교에서 정수의 사칙계산 수업에 참여하는 교사와 학생들 모두에게 나타날 수 있는 단절을 제거하는 효과뿐만 아니라 중학교 1학년 학생들에게 정수의 사칙계산 지도에 있어서 형식적인 관점의 도입이라는 논의를 줄일 수 있을 것이다. 또한 앞에서의 결과들은 정수의 사칙계산이라는 수학적 개념이 학년 단위로 분리되지 않은 관계망을 형성하는 예를 학생들에게 제공으로써 학생들로 하여금 수학적 힘과 아름다움을 음미하고 이해하게 하는데 중요한 역할을 할 것이다.

참고문헌

강옥기 외 2인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 두산.

강행고 외 9인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 중앙교육진흥연구원.

고성은 외 5인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 블랙박스.

교육인적자원부 (2002)(http://www.moe.go.kr/). 제7차교육과정.

교육인적자원부 (2007)(http://www.moe.go.kr/). 개정 교육과정.

금종해 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 고려출판.

김남희 외 5인 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김익표, 황석근 (2004). 파스칼의 삼각형, 계차수열 및 행렬의 연계와 표현, 한국수학교육학회 시리즈 A(수학교육), 제 43권, 제 4호, 391-398.

박규홍 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 두레교육.

박두일 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 교학사.

박윤범 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 대한교과서.

박임숙 (2001). 실수 연산의 성질에 대한 고등학생의 인지 경향, 한국수학교육학회 시리즈 A(수학교육), 제 40권, 제 2호, 335-343.

배종수 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 한성교육연구소.

신항균 (2001). 중학교 수학 7-가. 대구: 형설출판사.

양승갑 외 6인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 금성출판사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

우정호, 최병철 (2003). 음수의 교수현상학적 연구, 대한수학교육학회지 수학교육연구, 제 13권, 제 1호, 29-55.

윤성재 (1992). 직관적인 음수지도방법에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집, 제 2권, 제 1호, 65-72.

이영하 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 교문사.

이준열 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 도서출판 디딤돌.

전평국 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 교학연구사.
조태근 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 금성출판사.
최병철, 우정호 (2003). 음수의 본질과 형식적 접근에 의한 음수지도에 관한 고찰, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 제 4권, 제 2호, 205-221.
최용준 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 천재교육.
황석근, 이재돈 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: 한서출판사.
황석근 외 6인 (2008). 중학교 1학년 수학 검정 신청 교과서, 서울: 성안당.
Fischbein, E. (1994). Intuition in Science and Mathematics, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Educational Task, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards For School Mathematics, Reston, VA: Author.
NCTM (2000). Principles and Standards For School Mathematics, Reston, VA: Author.
Rhonda Bailey et al. (2006). Glencoe Mathematics(Applications and concepts) Course1, Course2, Course3. Glencoe: McGraw-Hill.
Ron Larson, Laurie Boswell, Timothy D. Kanold, & Lee Stiff (2007). Mcdougal Littell MATH Course1, Course2,Course3. Evanston: Houghton Mifflin Company.
Treffers, A. (1986). Three Dimensions-A Model of Theory and Goal Description in Mathematics Instruction, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위한 직관적 모델의 역할에 관한 연구

On the Role of Intuitive Model for Teaching Operations of Integers in the Middle School Mathematics Class

Kim, Ik-Pyo[2)]

ABSTRACT

In high school mathematics class, to subtract a number b from a, we add the additive inverse of b to a and to divide a number a by a non-zero number b, we multiply a by the multiplicative inverse of b, which is the formal approach for operations of real numbers. This article aims to give a connection between the intuitive models in middle school mathematics class and the formal approach in high school for teaching operations of negative integers.

First, we highlight the teaching methods(Hwang et al, 2008), by which subtraction of integers is denoted by addition of integers. From this methods and activities applying the counting model, we give new teaching methods for the rule that the product of negative integers is positive. The teaching methods with horizontal mathematization (Treffers, 1986; Freudenthal, 1991) of operations of integers, which is based on consistently applying the intuitive model(number line model, counting model), will remove the gap, which is exist in both teachers and students of middle and high school mathematics class. The above discussion is based on students' cognition that the number system in middle and high school and abstracted number system in abstract algebra course is formed by a conceptual structure.

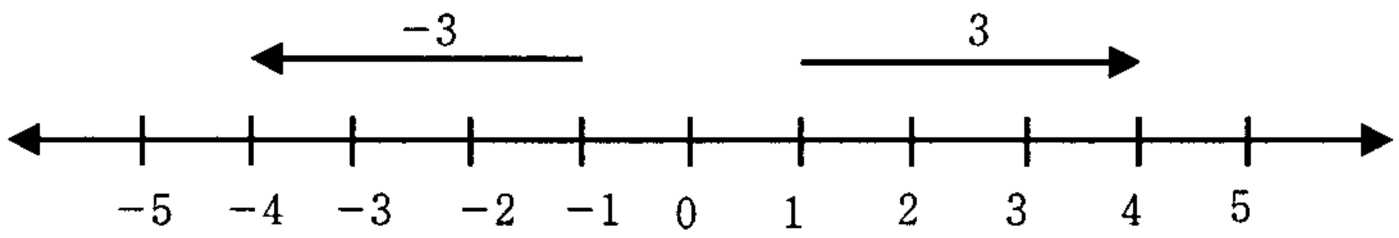
Key Words : *Operations of integers, Horizontal mathematization,* Number line model, Counting Model.

2) Daegu University (kimikpyo@daegu.ac.kr)

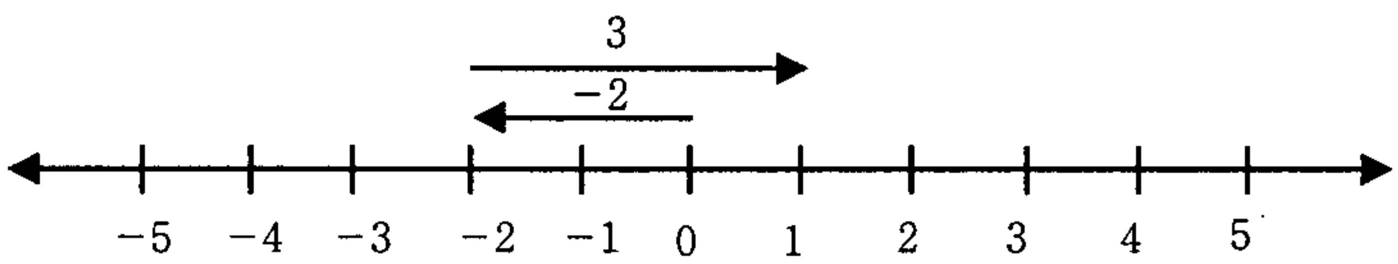
<부록> 설문지 양식

음수의 사칙계산 지도 모델

● 수직선 모델: 수는 방향과 크기를 갖는 화살표로, 3은 오른쪽으로 향하는 길이 3의 화살표이고 -3은 왼쪽으로 향하는 길이 3의 화살표이다.



덧셈과 뺄셈은 화살표의 머리에 더하거나 뺄 수를 나타내는 화살표의 꼬리를 두되, 뺄셈의 경우에는 화살표를 반대방향으로 놓는다. 이를테면
$(-2)+(+3)=+1$에서 $+1$은 수직선 위의 -2에서 오른쪽으로 3만큼 간 곳에 있는 수이다.



● 셈돌 모델: 검은 돌 하나와 흰 돌 하나는 서로 상쇄할 수 있으며 역으로 검은 돌 하나와 흰 돌 하나로 된 쌍은 부활시킬 수 있다고 본다. 이를테면
부호가 같은 정수의 덧셈은 셈돌을 합치면 된다.

$$(-2)+(-3)=-5$$

○ ○ + ○ ○ ○ = ○ ○ ○ ○ ○

양수와 음수의 덧셈은 검은 돌 한 개와 흰 돌 한 개를 짝지어 상쇄시키면 된다.

$$(-2)+(+3)=+1$$

○ ○ + ● ● ● = ●

● 역연산 모델: 일반적으로 자연수에서 뺄셈은 덧셈의 역과정으로 설명된다. $5-3=\square$는 $\square+3=5$가 되는 $\square$를 찾는 것이다. 그런데 $5-3=2$이고 $5+(-3)=2$이므로

$$5-3=5+(-3)$$

이다. 또한 $6-(-5)=11$이고 $6+5=11$이므로

$$6-(-5)=6+5$$

이다.

● 귀납적 외삽법: 다음은 연산의 구조가 유지되도록 수 체계를 확장해야 한다는 형식불역의 원리가 귀납적으로 도입된 귀납적 외삽법이다.
$(+3)+(+2)=+5,\ (+3)-(+2)=+1$
$(+3)+(+1)=+4,\ (+3)-(+1)=+2$
$(+3)+0=+3, (+3)-0=+3$
$(+3)+(-1)=?, (+3)-(-1)=?$
$(+3)+(-2)=?, (+3)-(-2)=?$
즉, 자연수에서 덧셈이 진행되는 규칙으로부터,
$(+3)+(-1)=+2, (+3)-(-1)=+4$

$(+3)+(-2)=1, (+3)-(-2)=+5$
가 되어야 한다는 것을 귀납적으로 추측할 수 있는 것이다.
● 구체적 상황 모델: 온도계 모델, 이익·손해 모델 등 실제 상황을 활용한 모델

본 설문지는 익명으로 처리되며 귀하의 의견은 학문적 목적 이외에는 절대로 사용하지 않을 것을 약속드리며 설문 내용은 소중히 다루겠습니다. 제시된 요령에 따라 솔직하게 응답하여 주신다면 통계를 내는 데에 귀중한 자료가 될 것입니다. 감사합니다.

1. 선생님께서 정수의 사칙계산 지도 때 사용하는 모델에 ∨ 표 해주시고 이유를 적어 주십시오.
덧셈 ① 수직선 모델 ② 셈돌 모델 ③ 역연산 모델 ④ 귀납적 외삽법 ⑤ 구체적 상황 모델
이유:

뺄셈 ① 수직선 모델 ② 셈돌 모델 ③ 역연산 모델 ④ 귀납적 외삽법 ⑤ 구체적 상황 모델
이유:

곱셈 ① 수직선 모델 ② 셈돌 모델 ③ 역연산 모델 ④ 귀납적 외삽법 ⑤ 구체적 상황 모델
이유:

나눗셈① 수직선 모델 ② 셈돌 모델 ③ 역연산 모델 ④ 귀납적 외삽법 ⑤ 구체적 상황 모델
이유:

2. 선생님께서 정수의 사칙계산 지도 때 모델의 채택 기준은 무엇입니까?
① 교과서에 제시된 모델
② 학생들이 이해하기 쉬운 모델
③ 나 자신이 좋아하는 모델

3. 고등학교 1학년에서 두 연산 +, ×을 가진 실수 전체의 집합 R를 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하고, +, ×에 대한 항등원과 R의 각 원소에 대하여 +, ×에 대한 역원이 존재하는 수 체계로서 정의한 다음, 뺄셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 곱셈의 역원으로 더하고 곱하는 것으로 정의함으로써 사칙계산을 형식적 관점으로 다룹니다. 위에서 제시된 모델 중에서 고등학교 1학년에서 다루어지는 형식적인 관점과 관계가 있는 모델이 있습니까?
① 있다.② 없다.
있다고 답한 경우는 3-1번, 없다고 답한 경우는 3-2번을 답해주세요.
3-1. 관계가 있다면 그 모델의 이름을 적어 주십시오.

3-2. 관계가 없다면 위에서 제시된 모델을 사용하여 정수의 사칙계산을 지도하는 것에 대하여 선생님의 생각을 적어 주십시오.

4. 1번에 제시된 모델 이외에 다른 방법을 사용하신다면 그 방법과 이유를 적어 주십시오.

방법:
이유:
4번을 답한 경우 5번을 답해 주세요.
5. 1번에 제시된 모델이 고등학교 1학년에서의 형식적 관점과 연관성이 있다면 위의 모델을 사용하시겠습니까?

6. 선생님의 연령대는 어디에 해당 하십니까?
① 20대 ② 30대③ 40대④ 50대⑤ 60대

7. 선생님께서 현재 근무하시는 학교를 적어 주십시오.
(　　　　　　　) 중학교　(　　　　　　　) 고등학교

8. 현재 근무하시는 학교의 소재지를 적어 주십시오.
(　　　　　　　　　　　　　　　　　)

9. 중학교 1학년 수학교과를 몇 년 동안 지도하셨습니까?
① 1년 미만② 1년③ 2년 ④ 3년 ⑤ 4년⑥ 5년⑦ 6년⑧ 7년⑨ 10년 이상

10. 선생님께서 중학교 1학년을 지도하실 때 사용한 교과서의 출판사는 어느 출판사입니까?
① 대한교과서 ② (주)두산 ③ 한성교육연구소 ④ 한서출판사 ⑤ 중앙교육진흥연구원
⑥ 고려출판 ⑦ (주)도서출판 디딤돌 ⑧ (주)블랙박스 ⑨ 교문사 ⑩-1 (주)금성출판사(양승갑외 6인 ⑩-2 (주) 금성출판사(조태근 외 4인) ⑪ 교학연구사 ⑫ 천재교육 ⑬ (주)교학사 ⑭ 두레교육(주) ⑮ 형설출판사