

# 탄성 보 위를 고속 주행하는 바퀴의 동접촉 해석

## Dynamic Contact Analysis of a Wheel Moving on an Elastic Beam with a High Speed

이 기 수†

Kisu Lee

(2008년 2월 21일 접수 ; 2008년 4월 7일 심사완료)

**Key Words** : Contact(접촉), Elastic Beam(탄성 보), High-speed Vehicle(고속 차량), Numerical Analysis(수치해석), Multibody Dynamics(다물체 동역학)

### ABSTRACT

The dynamic contact between a high-speed wheel and an elastic beam is numerically analyzed by solving the whole equations of motion of the wheel and the beam subjected to the contact condition. For the stability of the numerical solution, the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint are imposed on the contact point. Through the numerical examples, it is shown that the acceleration contact constraint including the Coriolis and centripetal accelerations are crucial for the numerical stability.

### 1. 서 론

일반적으로 정밀 기계 및 철도 차량 등은 경제성 및 성능 향상을 위하여 점점 고속화 되어가는 추세에 있다. 예로써 고속전철의 경우 500 km/h 이상의 고속 시험 주행이 성공한바 있으며 이러한 경향은 앞으로 더욱 커질 것이다. 그런데 복잡한 고속의 기계 또는 철도 차량의 경우 한 물체가 다른 물체와 접촉하며 고속 이동하는 경우가 많으며 따라서 이 경우에 대한 정확한 해석이 필요하게 된다. 특히 철도차량은 바퀴가 레일과 고속으로 접촉하며, 차량이 고속화 할수록 레일 제작 및 설치비용은 크게 증가하게 된다. 이 논문에서는 이러한 경우의 문제를 정확히 풀기위한 해석 방법의 예로써 강체 바퀴가 탄성 보와 접촉하며 고속 주행하는 경우의 문제를 수치해석적 방법을 제시하고자 한다.

강체 바퀴의 운동방정식은 아주 단순하며, 탄성 보 운동방정식 역시 일반적인 유한요소법에 의하여 쉽게 얻어진다. 그런데 이러한 바퀴 운동방정식 및 탄성 보의 운동방정식은 그 사이에 접촉조건이 없다면 각각의 독립된 운동방정식은 수치적분에 의하여 쉽게 풀리지만, 접촉조건에 의하여 연결되는 경우 두 개의 연립 운동방정식을 동시에 해석하는 것은 대단히 어렵다. 만약 바퀴와 보 사이에 별도의 접촉조건을 부과하지 않고 바퀴와 보의 운동방정식을 직접 연립시켜 푸는 경우에는(즉 접촉조건이 소거되어 운동방정식에 포함된 경우에는) 그 연립 운동방정식은 대단히 복잡해지며 현실적인 공학 모델에 적용하기는 불가능하다. 예로써 Vu Quoc과 Olsson<sup>(1)</sup>은 바퀴가 탄성 보 위에서 주행하는 문제를 풀기 위하여, 바퀴와 보의 독립된 운동방정식들에 추가로 구속조건을 부과하지 않고, 보의 운동방정식과 바퀴의 운동방정식을 직접 연립시킨 복잡한 미분 대수 방정식의 수치해를 구하였다. 이 경우 특수한 모델의 경우에는 정확한 해석이 가능할 것이나, 보의 절점 자유도가 2차원에서도 7개로 늘어나

† 교신저자 : 정희원, 전북대학교 기계공학과,  
자동차신기술연구소  
E-mail : kisulee@chonbuk.ac.kr  
Tel : (063)270-2326, Fax : (063)270-2315

는 등 운동방정식이 대단히 복잡한 미분대수 방정식이 되는 까닭에 현실적인 일반적 공학문제에 적용하기는 불가능하다.

따라서 바퀴의 운동방정식과 보의 운동방정식을 독립적으로 간단히 유도한 후, 바퀴와 보 사이에 접촉조건을 부과하여 정확한 수치 적분에 의하여 그 해를 구하는 방법을 연구할 필요가 있다. 이러한 방법에 의한 동적인 접촉 문제 해석은 유한요소법 및 다물체 동역학에서 중요한 분야의 하나로서 전통적인 penalty method, Lagrange multiplier method 등을 사용한 많은 논문이 오래 전부터 발표되었다. 특히 바퀴와 탄성 보 사이의 동접촉 현상은 고속 운행하는 철도 차량 바퀴와 레일 사이의 동접촉에서 많이 응용되고 있으며, 예로써 Shabana와 Sani<sup>(2)</sup>의 논문에서 여러 가지 해석 방법에 대한 고찰이 소개되어 있다. 그런데 Lagrange multiplier method를 채용하여 레일과 바퀴 사이의 접촉조건을 부과하고 미분 대수 방정식(DAE) 해법을 사용하는 경우 일반적으로 수치해의 안정성은 얻을 수 있지만 계산 방법이 복잡해지며<sup>(3,4)</sup>, penalty method를 사용하여 레일과 바퀴 사이의 접촉조건을 부과하는 경우 특수한 기법을 추가하지 않는 한 일반적으로 수치해의 불안정성으로 인한 비현실적 고주파 진동이 나타난다<sup>(5,6)</sup>. 이러한 현상은 구속조건이 수반된 다물체 동역학 전체에서 일반적으로 나타나는 현상이다.

바퀴 및 탄성 보의 각각 독립된 운동방정식은 간단한 미분 방정식인데 그 사이의 접촉조건은 대수 부등식이다. 이 경우 일반적인 상미분 방정식 적분 방법을 사용하여 운동방정식을 수치해석적으로 적분하면 그 해에 커다란 오차가 발생하거나 발산해 버린다는 것은 기존 다물체 동역학에서 널리 알려진 사실이다. 따라서 구속조건이 수반된 다물체 동역학 해법의 경우 이러한 수치 불안정성을 해결하기 위하여 구속조건에 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 수치 적분 계산의 안정성도도모하고 있다. 그런데 만약 접촉점이 탄성변형이 발생하는 물체 위에서 고속으로 움직이는 경우에는 이러한 방법만으로는 정확한 해석이 불가능하다. 예로써 저자는 고속전철 급전기처럼 접촉점이 케이블 위에서 고속 이동하는 경우, 접촉점의 가속도 계산 시 코리올리스(Coriolis) 가속도 및 구심 가속도를 정확히 포함시키지 않으면 수치해가 불가능함을 설

명하였다<sup>(7)</sup>.

이 논문에서 저자는 고속 주행하는 바퀴와 보 사이의 접촉점이 탄성 변형된 보 위에서 고속 이동하는 경우에도, 만약 탄성변형이 미미한 경우가 아닌 경우에는, 접촉점의 가속도 계산 시 코리올리스(Coriolis) 가속도 및 구심 가속도를 정확히 포함시키지 않으면 수치해가 불가능함을 설명하고자 한다. 그런데 바퀴와 탄성보 사이의 동접촉 문제에 대한 저자의 기존 논문<sup>(8,9)</sup>에서는 비교적 단순한 보 모델을 사용하였으므로, 가속도 접촉조건을 고려하지 않고 변위 및 속도 접촉조건만 사용하거나<sup>(8)</sup>, 또는 가속도 접촉조건을 포함하는 경우에도 코리올리스 가속도 및 구심 가속도 영향을 제대로 고려하지 않는 경우에도<sup>(9)</sup> 정확한 해가 가능하였다. 그러나 모델이 좀더 복잡해지면 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를 접촉조건에 정확하게 포함시키지 않는 한 정확한 수치해가 불가능하게 된다. 이 논문에서는 이러한 현상을 이론 및 예제 계산을 통하여 설명하며, 특히 예제 계산 결과는 기존 Vu Quoc과 Olsson<sup>(1)</sup>의 결과와 비교하여 그 정확성을 입증한다.

## 2. 운동방정식, 구속조건 및 수치 해

이 논문에서 사용되는 바퀴와 보 모델 및 방정식은 저자의 기존 연구<sup>(8,9)</sup>와 유사하나, 해법이 복잡한 일반적인 모델에 적용될 수 있도록 변화된 것이다. 따라서 여기에서는 바퀴와 보의 모델 및 좌표계에 대해서는 추가되는 사항 및 독립적인 논문으로서 필수적인 사항만을 언급한다. 이 논문에서는 강체 바퀴와 탄성 보 사이의 해석을 위하여 Fig. 1과 같은

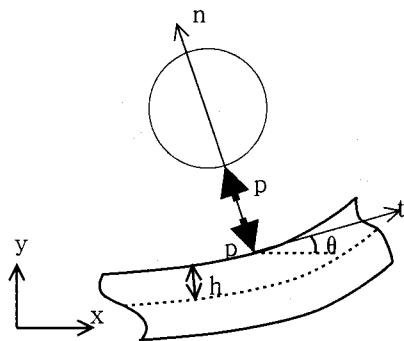


Fig. 1 Contact model for a rigid wheel and an elastic beam

2차원 접촉 모델을 생각한다. Fig. 1에서 접촉력  $p$ 는 보와 바퀴 표면에 수직 방향으로 작용하며 마찰력은 고려하지 않는다(따라서 바퀴의 회전은 고려하지 않음). Fig. 1에서  $t$ 와  $n$ 은 접촉면의 접선 방향과 법선 방향을 나타낸다. 이 논문에서 바퀴와 보의 모든 운동방정식은  $x, y$ 절대좌표계를 이용하여 만들어지고, 모든 접촉조건은 접촉면에 수직(법선)인  $n$ 방향에 대해서 계산한다.

강체 바퀴의 2차원 운동방정식은 뉴턴 제2법칙에 의하여 간단히 유도되며,  $x, y$ 좌표계에서 다음 형식을 취한다(여기에서  $x, y$ 방향은 각각 수평, 수직 방향을 나타낸다).

$$\overline{M}\dot{w} = \overline{p} + \overline{f} \quad (1)$$

위에서  $\overline{M}$ 은 바퀴의 질량 행렬,  $w$ 는 바퀴 중심의  $x, y$  방향 변위 벡터(이 논문에서 마찰은 무시하므로 바퀴의 회전운동은 무시되고 바퀴의 각속도는 0으로 생각함),  $\overline{p}$ 는 Fig. 1에서 표시된 접촉력이  $x, y$ 방향 성분으로 분해된 벡터(즉  $\overline{p} = [-p \sin \theta, p \cos \theta]^T$ ),  $\overline{f}$ 는 중력 등 외력을 나타낸다. 탄성 보의 운동방정식 역시 기본적인 유한요소법의 Hermitian interpolation을 이용한 Bernoulli-Euler보 요소를 이용하여 간단히 유도되며(예로써 참고문헌 (10) 등 유한요소법 기본 교과서 참조) 다음과 같은 형식을 취한다.

$$M\ddot{u} + ku = p + f \quad (2)$$

위에서  $M$ 은 보의 질량 행렬,  $k$ 는 보의 강성도 행렬,  $u$ 는 보의 변위 벡터,  $p$ 는 Fig. 1의 접촉력  $p$ 에 의하여 얻어지는  $x, y$ 방향 힘 벡터,  $f$ 는 중력 등 외력을 나타낸다. 위에서 접촉력  $p$ 이외의 모든 힘은 해 이전에 주어진 힘이다. 따라서 바퀴와 보 사이의 접촉력  $p$ 가 주어진다면 바퀴와 보의 운동방정식 (1)과 (2)는 간단한 상미분 방정식 적분법에 의하여 그 해가 구해진다. 이 논문에서는 다음에 설명하는 바와 같이 접촉조건을 적용하여 바퀴와 보 사이의 접촉력  $p$ 를 구한다.

운동방정식을 수치적분할 때에 시간을  $t$ , 시간 간격을  $\Delta t$ 라고 한다. 계산 시 바퀴의 중심에서 탄성 변형이 된 보에 수직선을 그어서 접촉점 위치를 결정한다. 바퀴와 보 사이에서의 접촉력을  $p$ (Fig. 1의 경우  $p$ 는 압축력으로 표시되었으므로 양의 값을 가지

지만, 아래 식들에서 접촉력  $p$ 는 압축력이므로 음수로 취급함), 그 사이의 침입된 수직 간격(Fig. 1의  $n$ 방향 간격)을  $s$ 라고 할 때에 접촉점에서 다음과 같은 형태의 접촉조건이 시간  $t + \Delta t$ 에서 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} p^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ s^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ p^{t+\Delta t} &= 0 \text{ if } s^{t+\Delta t} < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

위의 접촉조건은 접촉점에서 변형된 보에 수직방향(즉 변형된 보의 법선 방향)의 힘 및 거리를 이용하여 적용된 것이다. 위의 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 풀기 위하여 다음과 같은 접촉 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} e^{t+\Delta t} &= s^{t+\Delta t} \text{ if } p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} > 0 \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (4)$$

그런데 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉문제를 해석하려면 접촉조건에 위반되는 오차를 0으로 수렴시켜가는 과정이 필요하므로 위에서 정의된 것과 같은 접촉 오차  $e$ 에 대한 정의가 필요하다. 그러면 접촉 조건은 다음 식으로 변환된다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } e^{t+\Delta t} = 0 \quad (5)$$

그런데 운동방정식은 미분방정식이지만 접촉조건은 대수 부등식으로 이루어지므로 수치 안정성을 위하여 접촉점에서 접촉점의 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 부과하여야 한다. 보가 탄성 변형으로 인하여 접촉점에서 수평 방향과 이루는 기울기를  $q$ 라고 하고(즉 보의 수직 방향 변위로 인하여 접촉점에서 보가  $x$ 축과 각도  $q$ 를 이루고 있다고 하고), 바퀴의 접촉점 속도를  $v_w$ , 보 접촉점의 속도를  $v_b$ 라고 하면 접촉점에서 바퀴와 보 사이의 상대 속도(즉 변형된 보의 법선 방향 상대속도)는 다음과 같다.

$$\dot{s} = -(v_{wy} - v_{by}) \cos \theta + (v_{wx} - v_{bx}) \sin \theta \quad (6)$$

위에서 보의 접촉점에서의 속도는 보 요소의 형상 함수와 보 절점의 유한요소 변위 벡터를 활용하여 간단히 계산된다. 위의 속도 접촉 조건을 운동방정

식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 속도 접촉 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} \mu^{t+\Delta t} &= s^{t+\Delta t} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} > 0) \\ &\text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0) \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (7)$$

두 물체가 접촉하는 경우 접촉점에서 접촉면에 수직 방향의 상대속도는 0이어야 하므로 속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } \mu^{t+\Delta t} = 0 \quad (8)$$

이 논문에서는 바퀴와 보 사이의 마찰력은 무시하므로 바퀴의 회전속도는 0이라고 생각한다. 그런데 바퀴와 보 사이의 접촉점은 계속 이동한다. 접촉점에서 바퀴의 접선 방향 속도를  $v_{wt}$ , 보 접촉점의 접선 방향 속도를  $v_{bt}$ 라고 하며, 바퀴의 반경을  $r_w$ , 접촉점에서 보의 탄성변형으로 인한 보의 회전 각속도를  $\dot{\theta}$ , 보의 곡률 반경을  $r_b$ (아래로 볼록한 반경이 + 방향임)라고 하면, 보 표면에서 접촉점이 움직이는 상대속도  $\dot{\alpha}$ 와 바퀴 표면에서 접촉점이 움직이는 상대속도  $\dot{\beta}$ 는 회전체의 동접촉에 관한 저자의 참고문헌 (11) 부록의 방법을 활용하여 구할 수 있으며, 다음과 같은 식에 의하여 유도된다.

$$D = \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_b} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha} = \left[ \frac{(v_{wt} - v_{bt})}{r_w} + \dot{\theta} \right] / D \quad (10)$$

$$\dot{\beta} = \left[ \frac{(v_{wt} - v_{bt})}{r_b} + \dot{\theta} \right] / D \quad (11)$$

이상의 식을 이용하여, 접촉점에서 바퀴의 접촉점 가속도를  $a_w$ , 보 접촉점의 가속도를  $a_b$ , Fig. 1에 보인 것처럼 보의 중심선에서 보의 상단까지의 거리를  $h$ 라고 하면 접촉점에서 바퀴와 보 사이의 상대 가속도 (변형된 보의 법선 방향 상대 가속도)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= -(a_{wy} - a_{by}) \cos \theta + (a_{wx} - a_{bx}) \sin \theta - \dot{\beta}^2 / r_w \\ &\quad - h \dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2 / r_b + 2\dot{\alpha}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

이상의 식들에서 보의 접촉점에서의 속도, 가속도 및 회전속도는 보 요소의 형상 함수와 보 절점의 유한요소 변위 벡터를 활용하여 간단히 계산되며 탄성 변형으로 인한 곡률반경도 변위의 미분에 의하여 간단히 계산된다(보의 곡률반경은 보의 형상함수에 사용되는 Hermitian interpolation을 사용할 수 있고, 또는 보 전체 변위의 cubic spline interpolation에 의하여 계산할 수도 있으며, 어느 경우이건 실질적인 차이는 없음). 특히 식 (12)에서 오른쪽 3번째 항 이후는 접촉점의 코리올리스 가속도 및 구심 가속도이다. 가속도 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 가속도 접촉 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} v^{t+\Delta t} &= s^{t+\Delta t} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} > 0) \\ &\text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0) \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (13)$$

그러면 가속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } v^{t+\Delta t} = 0 \quad (14)$$

바퀴의 운동방정식과 탄성 보의 운동방정식의 해는 두 물체 사이의 접촉점에서 모든 접촉 조건을 만족시켜야 한다. 즉 바퀴와 보가 접촉하는 경우 위에서 정의한 상대 변위, 상대 속도, 상대 가속도는 모두 0이 되어야 한다. 이를 위하여 이 저자의 기존 논문(7,11)에서는 이상의 3가지 접촉 구속 조건이 부과된 운동방정식의 해를 구하기 위하여 변위 오차, 속도 오차, 가속도 오차를 사용하여 이들을 각각 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 0으로 수렴시키는 방법을 사용하였으며, 이 논문에서도 동일한 방법을 사용한다.

먼저 변위 접촉 조건 (5)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 참고문헌 (7, 11)에서 이 연구자가 제시한 반복계산법을 활용한다. 이 논문의 반복계산법은 augmented Lagrange multiplier method와 유사한 방법으로서, 각 반복 단계는 2단계로 구성된다. 첫 단계는 앞 반복 단계의 해에서 구해진 접촉 오차를 이용하여 접촉력을 계산하는 것이며, 두 번째 단계에서는 주어진 접촉력을 이용하여 전체 운동방정식의 해를 구하고 접촉 오차를 계산하는 것이다. 그러면 시간  $t + \Delta t$ 에서의 접촉 오차  $e^{t+\Delta t}$ 는 참고문헌 (7,

11)과 동일한 방법에 의하여 다음의 반복계산법에 의하여 0으로 감소함이 증명된다.

$$p^{t+\Delta t, m} = \min(p^{t+\Delta t, m-1} - \alpha e^{t+\Delta t, m-1}, 0) \quad (15)$$

위에서  $m$ 은 반복 횟수를 나타내고,  $\alpha$ 는 다음에서 설명되는 스칼라 양이며,  $e^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력  $p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용한 경우에 운동방정식의 해에 의하여 계산되는  $e^{t+\Delta t}$ 를 나타낸다. 속도 접촉조건 (8) 및 가속도 접촉조건 (14) 역시 동일한 반복 계산법을 사용하여 운동방정식과 연립시켜 해를 구한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 기본적인 계산 과정을 다음에 요약한다:

Step 1. 처음에  $m=0$ 으로 하고, 시간  $t$ 에서의 해를  $p^{t+\Delta t, 0}$ 으로 하여 step 4로 간다.

Step 2.  $m$ 을  $m+1$ 로 하고,  $\alpha=1/(\delta s/\delta p)^{t+\Delta t}$ 로 한다.

Step 3. 반복계산법 (15)에 의하여  $p^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다.

Step 4. 바퀴 중심에서 변형된 보에 수직선을 그어서 보 위의 접촉점 위치를 결정한다. 접촉력  $p^{t+\Delta t, m}$ 를 바퀴와 보의 양쪽 접촉점에 가하고, 바퀴의 운동방정식 (1)의 해 및 보의 운동방정식 (2)의 해를 상미분방정식 수치 적분에 의하여 구한다(예로써 Runge Kutta method 등 사용). 이렇게 구한 바퀴 및 보 운동방정식 해로부터 식 (4)에 의하여 접촉 오차  $e^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다. 만약  $|e^{t+\Delta t, m}|$ 이 허용 오차보다 작으면 시간  $t+\Delta t$ 에서의 변위는 여기에서 결정하고 step 5로 간다. 그 외의 경우 {만약  $|e^{t+\Delta t, m}| < |e^{t+\Delta t, m-1}|$  또는  $m=0$  이면 to step 2로 가고, 그 외의 경우  $\alpha=\alpha/2$ 로 하여 step 3로 다시 가서  $m$ 번째 반복 계산을 다시 수행한다.

Step 5. 속도 접촉 조건 (8)을 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉 오차 대신 속도 접촉 오차 (7)을 사용하여, 위의 steps 1~4에 의하여 반복 계산을 수행한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 속도는 여기에서 결정된다(만약 가속도 접촉조건을 부과하는 다음의 Step 6을 생략하는 경우라면, 시간  $t+\Delta t$ 에서의 가속도 및 접촉력  $p$ 도 여기에서 결정되어야 한다).

Step 6. 가속도 접촉 조건 (14)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉 오차 대신 가속도 접촉 오차 (13)을 사용하여, 위의 steps 1~3에 의하여 반복 계산을 수행한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 가속도 및 접

촉력  $p$ 는 여기에서 결정되며, 이  $p$ 값을 다음 time step에서 사용한다. 계속 다음 시간의 해석이 필요한 경우 시간을  $\Delta t$  만큼 증가시켜 step 1로 가서 다음 시간의 계산을 시작한다.

### 3. 예제 계산

여기에서는 기존 Vu Quoc과 Olsson의 참고문헌 (1)에서 소개된 예제를 이 논문의 방법에 의하여 풀고 그 결과를 비교해 보기로 한다. Vu Quoc과 Olsson은 바퀴가 탄성 보 위에서 주행하는 예제를 풀기 위하여 보의 운동방정식과 바퀴의 운동방정식을 직접 연립시킨(즉 접촉조건을 소거시킨) 복잡한 미분대수 방정식의 수치해를 구하였다. 이 논문에서는 기본적으로 간단한 유한요소 보 모델(즉 절점의 자유도가 2인 Hermitian interpolation을 사용한 보)을 사용하여 이 논문의 방법에 의하여 동일한 예제를 풀려고 한다. 예제 모델은 Fig. 2와 같이 7개의 점에서 단순지지된 보에서 바퀴가 고속 주행하는 경우로써 Vu Quoc과 Olsson의 참고문헌 (1)에서 사용된 것과 동일한 것이다. 보의 전체 길이는 144 m, 길이 24 m인 구간 마다 단순지지 되어 있으며(즉 7개의 점에서 등간격으로 단순지지되어 있음), 보의 중심선과 윗면 사이의 거리  $h$ 는 0.6 m, 단위 길이 당 질량은 1250 kg/m, 그리고 굽힘 강성도 EI는 109 Nm<sup>2</sup>이다. 바퀴의 질량은 3000 kg이고 반경은 0.3 m이다. 바퀴 중심에는 수직 하향 방향 하중 600 kN이 작용하고 있으며, 100 m/s의 초기 속도로 왼쪽에서 보의 오른쪽으로 움직이기 시작한다(물론 Vu Quoc과 Olsson의 참고문헌에서 설명된 것처럼 바퀴의 속도는 보의 탄성 변형에 의하여 주행 중 변한다).

이 논문에서 보는 Hermitian interpolation을 사용한 36개의 Bernoulli-Euler보 요소를 사용하며, 시간적분은  $\Delta t=1$  msec인 4차 Runge Kutta method를 사용한다. 이 논문의 목적이 본문에서 제시한 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건이

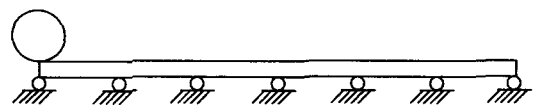


Fig. 2 The model for the computation

접촉점에서 모두 만족되어야 정확한 수치 해가 가능하다는 것을 설명하는 것이므로, 다음에서 구속조건 일부를 포함시키지 않거나 또는 모델의 탄성과 관성 자료 일부를 변형시켜가며 그 결과를 검토하기로 한다. 그리고 다음 계산 결과를 나타내는 그림에서 접촉력은 정역학 상태의 접촉력 (즉 바퀴에 작용하는 수직방향 힘 600 kN과 바퀴 중력)으로 나누 값(normalized contact force)으로 표준화시켜 표시한다.

먼저 case 1로써 앞에서 기술된 바퀴 및 보의 질량과 탄성 자료를 모두 그대로 사용하기로 한다. 이 논문에서 기술된 바와 같이 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 모두 반복계산법(15)에 의하여 접촉점에서 부과시킨 경우의 접촉력이 Fig. 3에 표시되어 있다. Fig. 3에서 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 각각 사용한 3가지의 접촉력은 모두 일치하며 특히 Vu Quoc과 Olsson<sup>(1)</sup>의 결과와 동일한 결과가 얻어진다. Fig. 3에서 3가지 접촉력이 표시된 이유는 위에서 설명된 것처럼 각 time step에서 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 별도로 부과하여, 각 time step의 운동방정식을 풀기 때문이며 따라서 3 구속조건을 적용하는 경우 각각에 대한 3가지 접촉력이 계산된다(물론 해가 정확하다면 Fig. 3처럼 그 3가지 접촉력은 일치해야 함). 바퀴의 수평 주행속도 및 6번째 스팬 중간 지점의 수직 변위는 각각 Figs. 4, 5와 같이 변하며 Vu Quoc과 Olsson의 결과와 일치한다. 또한 변위 구속조건과 속도 구속조건만을 사용한(즉 step 6의 가속도 구속조건을 사용하지 않은) 계산 방법의 경우에도 이 모델의 경우 Fig. 6과 같이 접촉력의 변화는 정확한 해와 거의 일치한다(Fig. 6에서 2가지 접촉력이 표시된 이유는 위에서 설명된 것처럼 각 time step에서 변위 구속조건, 속도 구속조건을 별도로 부과하여, 각 time step의 운동방정식을 풀기 때문이며 따라서 2 구속조건을 적용하는 경우 각각에 대한 2가지 접촉력이 계산된다). 그런데 변위 구속조건, 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 사용한 경우에도, Coriolis 가속도 및 원심 가속도를 사용하지 않는 경우, Fig. 7처럼 3가지 경우의 접촉력은 서로 일치하지 않으며 Vu Quoc과 Olsson<sup>(1)</sup>의 결과와 상이한 결과가 나온다.

다음 case 2로써, 앞에서 기술된 case 1의 경우에서 바퀴 질량을 1500 kg으로 50%로 줄이고, 보의

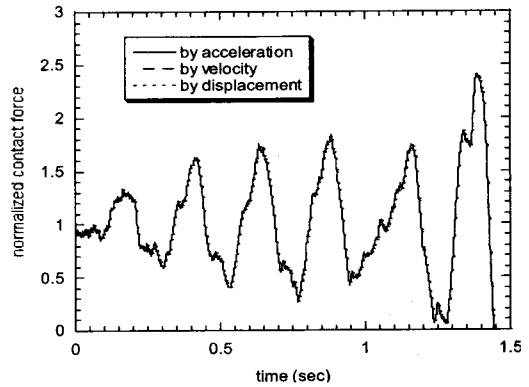


Fig. 3 Contact force variations by the present method using the displacement, velocity, and acceleration constraints(case 1)

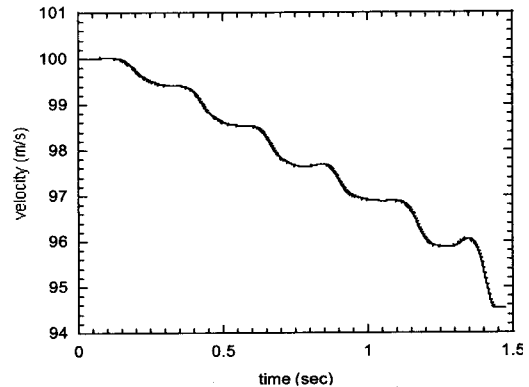


Fig. 4 The variation of the horizontal speed of the wheel center(case 1)

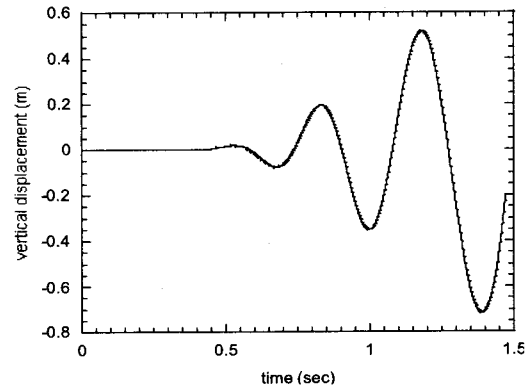


Fig. 5 The variation of the vertical deflection of the midpoint of the 6th span(case 1)

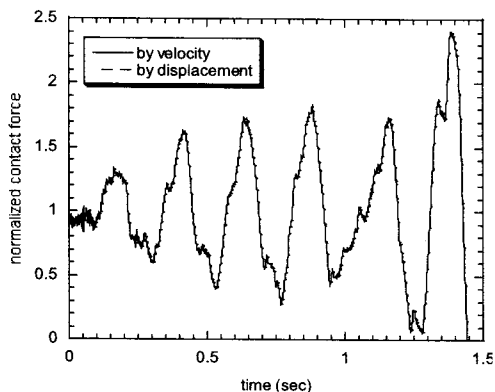


Fig. 6 Contact force variations without the acceleration constraint(case 1)

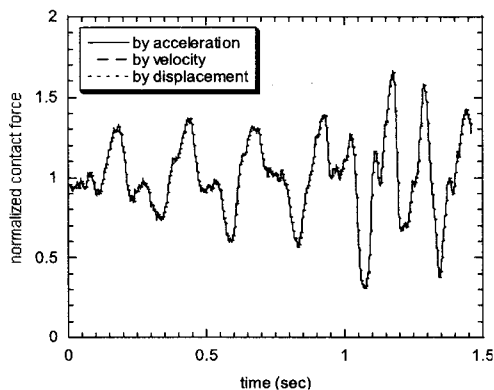


Fig. 8 Contact force variations by the present method using the displacement, velocity, and acceleration constraints(case 2)

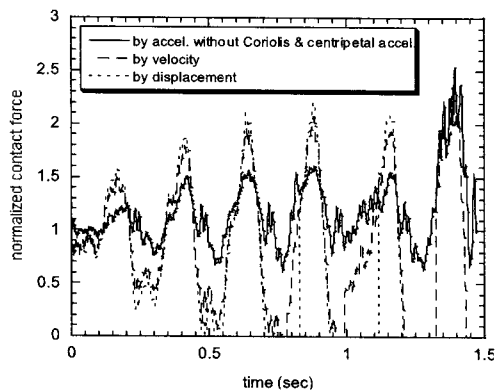


Fig. 7 Contact force variations without the Coriolis and centripetal accelerations(case 1)

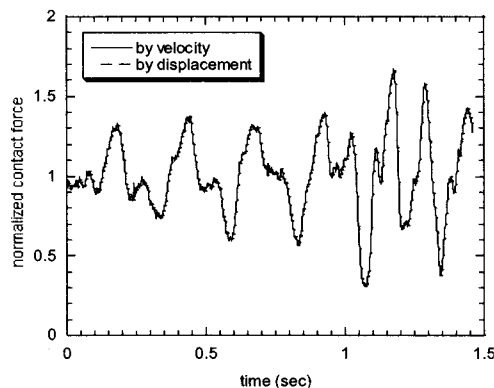


Fig. 9 Contact force variations without the acceleration constraint(case 2)

탄성계수도 50%로 줄이며, 바퀴에 작용하는 수직하중도 300 kN으로 50% 감소시킨 경우를 생각한다 (따라서 이 경우 바퀴에 작용하는 힘으로 인한 보의 정적인 변형은 case 1과 일치한다). 먼저 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 모두 반복계산법 (15)에 의하여 접촉점에서 부과시킨 경우의 접촉력이 Fig. 8에 표시되어 있다. 또한 Fig. 9와 같이 변위 구속조건과 속도 구속조건만을 사용한(즉 step 6의 가속도 구속조건을 사용하지 않은) 계산방법의 경우에도 이 모델의 경우 정확한 해와 거의 일치하는 해가 얻어짐을 알 수 있다. 그러나 변위 구속조건, 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 모두 사용한 경우에도, 만약 Coriolis 가속도 및 원심가속도를 사용하지 않는 경우, Fig. 10처럼 접촉력은 정확히 계산되지 못하며 세 경우의 접촉력 계산이 모두 상이한 결과를 가져온다.

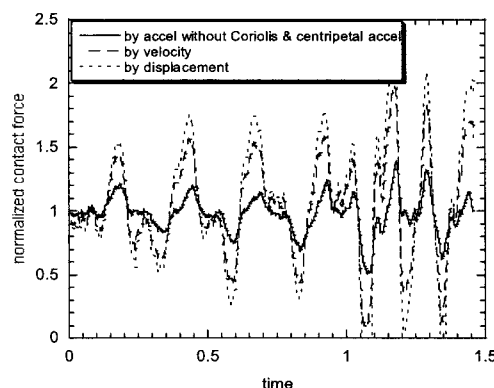


Fig. 10 Contact force variations without the Coriolis and centripetal accelerations(case 2)

마지막으로 case 3으로써, case 1에서 보의 탄성계수를 100배로 증가시키고, 나머지 바퀴와 보의 절

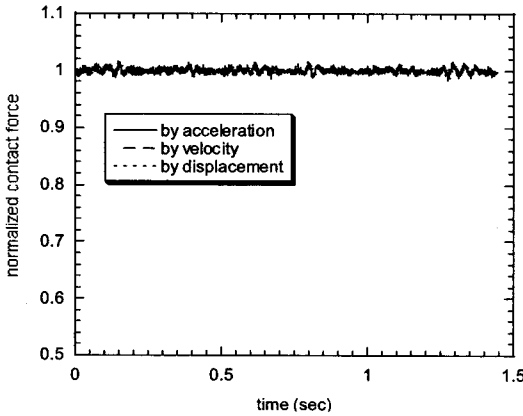


Fig. 11 Contact force variations by the present method using the displacement, velocity, and acceleration constraints(case 3)

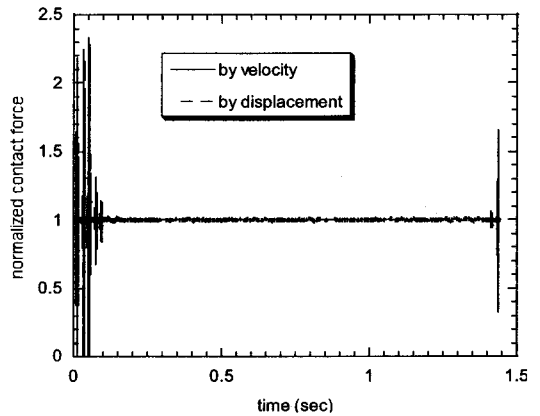


Fig. 12 Contact force variations without the acceleration constraint(case 3)

량에 관한 모든 입력 데이터는 case 1과 동일하게 한다(따라서 이 경우 보의 변형은 Fig. 5의 변위보다 1/100 수준으로 감소하며, 결국 보의 탄성 처짐이 아주 미미한 경우이다). 이 경우에는 보의 강성도가 크게 증가하였으므로 수치적분의 안정성을 위하여  $\Delta t$  를 0.1 msec로 하였다. 본문에서 기술된 바와 같이 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 접촉점에서 모두 부과하여 반복계산법 (15)에 의하여 계산된 접촉력이 Fig. 11에 표시되어 있다. Fig. 11에서 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 각각 사용한 3가지의 접촉력은 모두 일치하고 있다. 그런데 변위 구속조건과 속도 구속조건만을 사용한(즉 가속도 구속조건을 사용하지 않은) 계산 방법의 경우 Fig. 12와 같이 접촉력에 국부적으로 심한 수치적 진동이 포함됨을 알 수 있다. 그러나 변위 구속조건, 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 사용한 경우에, Coriolis 가속도 및 원심 가속도를 사용하지 않는 경우에도 Fig. 13처럼 접촉력은 Fig. 11의 경우와 거의 일치하는 양호한 결과가 얻어진다. 이것은 보의 탄성변형이 아주 미미한 수준이어서 보의 곡률로 인한 Coriolis 가속도 및 원심 가속도가 아주 작기 때문으로 보인다(그러나 Fig. 13의 경우에도 가속도 접촉조건으로 구한 해와 변위 접촉조건으로 구한 해에는 최대 1% 수준의 차이가 존재함). 이상 3가지 case를 검토해 본 바와 같이, 일부 환경에서는 정확한 가속도 접촉 조건 없이도 계산이 가능한 경우도 있으나, 모든 조건에서 정확하고 안정적인 해를 구하려면 Coriolis 및 구심

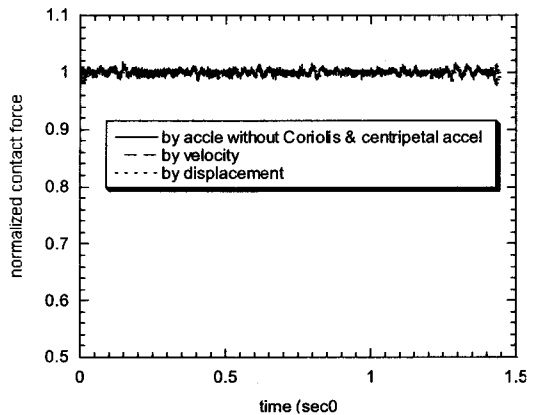


Fig. 13 Contact force variations without the Coriolis and centripetal accelerations(case 3)

가속도를 포함한 정확한 가속도 접촉조건이 필요함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는 접촉조건이 부과된 고속 주행하는 바퀴의 운동방정식 및 탄성 보의 운동방정식의 해를 구하기 위하여, 정확한 접촉력을 반복계산법에 의하여 구함과 동시에, 각각의 운동방정식 해는 일반적인 상미분 방정식 시간적분 방법을 사용하여 정확히 구할 수 있음을 설명하였다. 접촉조건에는 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 대수 부등식이 포함된 미분방정식 수치적분의 안정성을 도모하였으며, 특히 고속 이동하는 접촉점의 가속도 계산 시 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를



고려하였다. 이 논문에서는 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉조건을 부과하며, 전체 시스템의 독립된 운동방정식들을 Runge Kutta method 등 간단한 상미분 방정식 시간적분을 사용하여 정확히 안정적으로 풀 수 있다는 것을 설명한 것이며, 따라서 복잡한 차량 모델에 대한 계산도 동일한 방법에 의하여 가능하다.

이 논문 계산 결과의 정확성을 점검하기 위하여 Vu Quoc과 Olsson<sup>(1)</sup> 논문과 동일한 모델을 사용한 계산을 통하여 그 결과를 비교하였으며, 이 논문의 계산 결과가 정확함을 입증하였다. Vu Quoc과 Olsson은 바퀴가 탄성 보 위에서 주행하는 예제를 풀기 위하여 보의 운동방정식과 바퀴의 운동방정식을 직접 연결시킨 복잡한 미분 대수 방정식의 수치해를 구하였으나, 연결 운동방정식 유도 자체가 너무 복잡해진 까닭에 현실적인 일반적 공학문제에 적용하기는 불가능하다. 그러나 이 논문 방법의 경우 일반적인 다물체 동역학 및 유한요소 모델이 적용되는 한 어떠한 복잡한 경우에도 적용 가능하며, 따라서 복잡한 다물체 차량 및 철도 레일의 접합 부분 등 복잡한 부분을 정확히 모델링하여 계산하는 것이 가능할 것이다.

### 참 고 문 헌

(1) Vu-Quoc, L. and Olsson, M., 1989, "A Computational Procedure for Interaction of High-speed Vehicles on Flexible Structures Without Assuming Known Vehicle Nominal Motion", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 76, pp. 207~244.

(2) Shabana, A. and Sany, J. R., 2001, "A Survey of Rail Vehicle Track Simulations and Flexible Multibody Dynamics", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 26, pp. 179~210.

(3) Rathod, C. and Shabana, A., 2007, "Geometry and Differentiability Requirements in Multibody Rail Road Vehicle Dynamic Formulations", *Nonlinear*

*Dynamics*, Vol. 47, pp. 249~261.

(4) Sinokrot, T., Nakhaeinejad, M. and Shabana, A. A., 2008, "A Velocity Transformation Method for the Nonlinear Dynamic Simulation of Railroad Vehicle Systems", *Nonlinear Dynamics, Nonlinear Dynamics*, Vol. 51, pp. 289~307.

(5) Shabana, A., Zaazaa, K., Escalona, J. L. and Sany, J. R., 2004, "Development of Elastic Contact Model for Wheel/Rail Contact Problems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, pp. 295~325.

(6) Shabana, A., Tobaa, M., Sugiyama, H. and Zaazaa, K., 2005, "On the Computer Formulations of the Wheel/Rail Contact Problems", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 40, pp. 169~193.

(7) Lee, K., 2007, "Analysis of Contact and Separation between the Catenary and the Pantograph of a High-speed Electrical Train Considering the Dropper Positions", *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 427~436.

(8) Lee, K., 1995, "A Numerical Solution for Dynamic Interaction Between Rigid Wheel and Flexible Beam", *Comm. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 267~279.

(9) Lee, K., 1997, "A Numerical Method for Dynamic Analysis of Vehicles Moving on Flexible Structures Having Gaps", *Int. J. Numer. Method Engng.*, Vol. 40, pp. 511~531.

(10) Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J., 2001, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York.

(11) Lee, K., 2001, "Analysis of Dynamic Contact Between Rotating Spur Gears by Finite Element and Multi-body Dynamics Techniques", *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 215, pp. 423~435.