응용통계연구 제 **21**권 2호, *2008*년, *pp. 247–264*

미래손실에 기초한 통합공정관리계획*

박창순[1)] 이재헌[2)]

요 약

통합공정관리의 기본절차는 잡음이 내재하는 공정에 대하여 수정조치를 취하고, 수정활동 중 공정에 이상원인이 발생하면 관리도를 통하여 발생을 탐지하고 교정활동을 통하여 이를 제거하게 된다. 그러나 공정의 교정활동은 많은 시간과 비용을 수반하는 비생산적 요인을 유발할 수 있기 때문에 무조건적 교정활동은 생산성을 저하시키는 반대급부도 동시에 내포하고 있다. 이 논문에서는 공정모형으로 ARIMA(0,1,1) 모형을 가정하고 공정 평균과 분산에 이상원인이 발생하는 경우 이를 탐지하는 절차를 소개하고, 이상신호의 시점에서 공정잔여시간 동안 발생할 수 있는 미래손실에 기초하여 교정활동의 여부를 판단하는 통합공정관리 절차를 제안한다.

주요용어: 통합공정관리, 통계적 공정관리, 자동공정관리, 공정수정, 교정활동, 미래손실.

1. 서론

공정관리는 공정수준을 목표치에 가깝게 유지하는 것을 주 목적으로 하고 있다. 따라서 공정관리는 첫째, 공정수준이 목표치로부터 멀어지는 산포(deviation) 발생의 이유에 대처하는 방법, 둘째, 산포의 이유에 따라 공정수준을 목표치에 가깝게 하는 방법을 연구하게 된다. 공정관리는 공정산포의 원인을 판단하는 관점에서 통계적 공정관리(statistical process control: SPC)와 자동공정관리(automatic process control: APC, 또는 공학적 공정관리(engineering process control: EPC))로 구분된다. 통계적 공정관리는 공정산포의 원인이 이상원인(special cause)의 발생에 의한 것으로 보고 이를 탐색하고 제거함으로써 공정산포를 줄이는 활동이며, 자동공정관리는 공정산포의 원인이 공정에 내재하는 잡음에 의한 것으로 보고 공정수준을 수정(adjustment)하여 공정산포를 줄이게 된다. 통계적 공정관리에서는 관리도를 그 도구로 사용하고, 자동공정관리에서는 반복수정(repeated adjustment)이나 경계선수정(bounded adjustment)을 주로 사용하게 된다 (Box와 Kramer, 1992; Box와 Luceño, 1994, 1997). 이 두 종류의 관리절차는 주어진 공정 여건에 맞는 한가지를 선택하여 공정을 관리하는 것으로 알려져 왔으나, 현대의 생산공정은 공정 자체가 복잡하고 혼

---

* 이 논문은 2006년도 정부재원 (교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2006-312-C00490).
1) (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학통계학부, 교수.
E-mail: cspark@cau.ac.kr
2) (156-756) 교신저자. 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학통계학부, 교수.
E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

합된 양상을 나타내기 때문에 두 관리절차를 병행하여 사용함으로써 관리효과를 증대시킬 수 있게 된다. 즉, 현대의 생산공정은 공정과정에서 잡음과 이상원인이 같이 발생할 수 있기 때문에, 공정 진행 중에 주기적으로 공정수정을 하면서 이상원인의 발생을 동시에 탐지하는 것이 바람직하다. 이와 같이 수정과 탐지를 동시에 사용하여 공정을 좀 더 효율적으로 관리하고자 하는 절차를 통합공정관리(integrated process control: IPC)라고 한다.

통합공정관리의 기본절차는 잡음이 내재하는 공정에 대하여 수정조치를 취하여 공정의 편차를 백색잡음(white noise)으로 전환하도록 하여 공정의 편차제곱을 최소화하게 된다. 이러한 수정활동 중 공정에 이상원인이 발생하면 관리도를 통하여 발생을 탐지하고 이를 제거하게 된다. 수정활동 중 반복수정은 일정시간 간격으로 공정수준을 측정하고 그때마다 적절한 양의 공정수정을 하는 절차이다. 경계선수정은 수정활동에 비용이 수반될 때 공정편차가 일정수준 이상으로 커지는 경우에만 수정을 하는 절차이다. 공정수정에 대한 최근의 연구로는 del Castillo (2002)와 Jiang 등 (2002) 등이 있다. 반면에 관리도에서는 이상원인이 탐지되고 이상원인의 존재가 확인되면 매번 교정활동(rectifying action), 즉 보수나 제거를 통하여 공정을 관리하게 된다. 대표적인 관리도로는 Shewhart 관리도, CUSUM(cumulative sum) 관리도 그리고 EWMA(exponentially weighted moving average) 관리도 등이 있다. 공정수정과 이상원인을 탐지하는 절차를 병행하는 통합공정관리 절차에 대하여 발표된 주된 논문은 Vander Wiel 등 (1992), Montgomery 등 (1994), Janakiram과 Keats (1998), Nembhard와 Mastrangelo (1998), Capilla 등 (1999), Ruhhal 등 (2000), Mastrangelo와 Brown (2000), Park (2001), Jiang (2004), Reynolds와 Park (2008) 그리고 Park과 Reynolds (2008) 등을 들 수 있다.

일반적으로 수정된 공정은 이상원인 발생 전에는 백색잡음이 되지만, 이상원인 발생 후에는 다양한 형태의 시계열 모형으로 변환하게 된다. 이러한 현상은 공정모수의 변환을 야기시키는 이상원인의 효과의 다양성에 기인한다. 이상원인의 효과는 크게 세 종류, 즉 지속적 변화(sustained shift), 지속적 흐름(sustained drift) 그리고 일시적 변화(transient shift)로 분류한다. 이 세가지 변화 중에서, 지속적 변화는 그 효과가 오랫동안 지속되지만 효과의 크기는 일반적으로 지수적으로 감소하므로 (Vander Wiel, 1996) 미래의 손실을 계산하여 교정여부를 결정하는 것이 효율적이 된다. 지속적 흐름은 공정을 목표치로부터 점점 더 멀어지게 하는 특성이 있기 때문에 발견 시에는 항상 교정활동을 하는 것이 미래의 손실을 줄이게 된다. 반면에 일시적 변화는 일정 잔류기간 후에는 그 원인이 더 이상 존재하지 않으므로 교정활동을 하지 않는 것이 효율적이다. 통계적 공정관리에서 위 세 종류의 이상원인 효과에 대한 최근 연구는 Reynolds와 Stoumbos (2004a, 2004b, 2005)와 Reynolds와 Park (2008)이 있다. 이 논문에서는 이상원인의 효과가 지속적 변화와 지속적 흐름인 경우만 고려하였다.

이 논문의 주된 내용은 이상원인 탐지 시 교정활동의 무조건적인 사용보다는, 이러한 활동의 필요성을 앞으로 일정기간 (공정잔여시간) 동안 발생할 수 있는 추가적 비용, 즉 미래손실(future loss)을 고려하여 활동 여부를 결정하는 조건부 사용에 대한 것이다. 이 논문에서는 공정모형으로 ARIMA(0,1,1) 모형을 가정하고 공정 평균과 분산에 이상원인이 발생하는 경우 이상원인을 탐지하는 절차를 소개하고, 이상신호의 시점에서 미래손실에 기

초하여 교정활동의 여부를 판단하는 통합공정관리의 절차와 적용방법을 제시하였다.

2. 이상원인이 없는 경우 공정수정 절차

공정에 잡음이 내재하는 경우 아무런 수정조치를 취하지 않으면 공정특성치가 목표치로부터 벗어나게 된다. Z_t를 수정되지 않은 공정에서 이상원인이 발생하기 전까지 잡음에 의한 공정편차 (목표치로부터의 편차)라고 정의하고, Z_t는 다음과 같은 ARIMA(0,1,1) 모형 (Box 등, 1994)을 가정하자.

$$Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \cdots, \tag{2.1}$$

여기서 공정오차 $\epsilon_t \sim iid\, N(0, \sigma_\epsilon^2)$이고, θ는 평활모수 $(0 \leq \theta < 1)$이다. 이 모형은 공정수정을 수행하는 APC와 IPC에서 일반적으로 가정하는 비정상적(nonstationary) 모형 중 가장 간단한 형태이지만 공정수준의 유동적 현상을 잘 표현하여 공정잡음 모형으로 적합한 것으로 알려져 있다 (Box와 Kramer, 1992; Montgomery, 1999). 초기치로 $Z_0 = 0$과 $\epsilon_0 = 0$을 가정할 경우 식 (2.1)은

$$Z_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1}\epsilon_j + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \cdots$$

로 표현할 수 있다.

시점 $t-1$에서 t 시점에 대한 최소평균제곱오차(minimum mean square error: MMSE) 예측치를 $\hat{Z}_t$라 할 때, $\hat{Z}_t$는

$$\hat{Z}_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1}\epsilon_j \tag{2.2}$$

가 된다. 이 논문에서는 매 시점 마다 공정을 수정하는 반복수정을 수행하고, 공정수정량에는 제한이 없으며, MMSE 수정을 사용함을 가정한다. 따라서 MMSE 수정은 공정수정량으로 $-\hat{Z}_t$을 사용하는 것이 된다. 시점 $t-1$에서 수행된 수정의 효과는 시점 t에서 모두 발생한다고 가정하고 시점 t까지의 총 수정효과를 A_t라고 하면, 시점 t에서 수정 후에 관측되는 관측오차(the observed deviation from target) e_t는

$$e_t = Z_t + A_t \tag{2.3}$$

가 된다. 만일 이상원인이 존재하지 않는다면, MMSE 수정 절차는 $A_t = -\hat{Z}_t$가 되도록 수정량을 선택하는 것이 된다. 이때, 식 (2.2)와 (2.3)으로 부터

$$e_t = \epsilon_t \tag{2.4}$$

가 되며, 식 (2.2)의 예측치는 공정오차 ϵ_t 대신 관측오차 e_t로 표현하면

$$\hat{Z}_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1}e_j \tag{2.5}$$

가 된다.

3. 수정된 공정에서 이상원인의 영향

이상원인이 알려지지 않은 시점 τ와 $\tau+1$ 사이에서 발생하여, 관측오차 e_t의 평균과 분산을 변화시킨다고 가정하자. 평균에 대한 이상원인의 효과는 지속적 변화 또는 지속적 흐름을 가정하며, 분산에 대한 효과는 지속적 변화만을 가정하기로 한다.

먼저 이상원인의 효과로 관측오차의 수준에 지속적 변화가 발생하는 경우를 고려해 보자. 즉, 시점 $t=\tau+k$, $(k=1,2,\cdots)$에서 관측오차는 $\tilde{\mu}_k \neq 0$에 대하여

$$e_{t+k} = Z_{t+k} + A_{t+k} + \tilde{\mu}_k \, \sigma_\epsilon \tag{3.1}$$

가 되는 경우로서, 관측오차에 $\tilde{\mu}_k \sigma_\epsilon$ 만큼의 지속적 변화가 발생한다. 이러한 이상원인은 수정절차의 문제, 공정 Z_t의 문제 그리고 계측시스템의 문제 등의 이유로 발생할 수 있다. 추가되는 요소 $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots$의 값에 따라 이상원인 효과의 형태를 결정할 수 있다. 이 논문에서는 $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu} \neq 0$, $(k=1,2,\cdots)$인 경우, 즉 관측오차의 평균이 $\tilde{\mu}\sigma_\epsilon$ 만큼 변화하는 지속적 변화와 $\tilde{\mu}_k = k r$, $(k=1,2,\cdots)$인 경우, 즉 관측오차의 평균에 선형이동이 있는 지속적 흐름을 고려하였다.

다음으로 관측오차의 분산에 지속적 변화가 발생하는 경우를 고려해 보자. 이것은 시점 $t=\tau+k$, $(k=1,2,\cdots)$에서 공정오차 ϵ_{t+k}가 $\tilde{\sigma}_k \epsilon_{\tau+k}$가 된다고 할 수 있으며, 이때 공정오차 ϵ_{t+k}의 분산은 $\tilde{\sigma}_k^2 \sigma_\epsilon^2$이 된다. 이후에 설명하는 바와 같이 $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma} > 1$인 경우 이것은 관측오차 e_t의 분산에 지속적 변화를 유발하게 된다. 공정오차에 상수항이 곱해지는 변화를 반영한 공정모형 $Z_{\tau+k}$, $(k=1,2,\cdots)$는

$$Z_{\tau+k} = Z_{\tau+k-1} + \tilde{\sigma}_k \, \epsilon_{\tau+k} - \theta \, \tilde{\sigma}_{k-1} \, \epsilon_{\tau+k-1} \tag{3.2}$$

로 표현할 수 있으며, 여기서 $\tilde{\sigma}_0 = 1$로 정의한다.

관측오차의 평균과 분산에 변화가 있는 경우, 즉 이상상태에서의 관측오차 $e_{\tau+k}$, $(k=1,2,\cdots)$는 식 (3.1)과 (3.2)를 이용하여

$$e_{\tau+k} = \tilde{\sigma}_k \, \epsilon_{\tau+k} + \left[\tilde{\mu}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\mu}_i \, (1-\theta) \, \theta^{k-1-i} \right] \sigma_\epsilon \tag{3.3}$$

로 표현된다 (Reynolds와 Park, 2008). 단, $\tilde{\mu}_0 = 0$으로 정의한다.

이 논문에서 고려하는 첫번째 경우인 평균과 분산의 지속적 변화에서는, 즉 $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}$이고 $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}$인 경우 식 (3.3)은

$$e_{\tau+k} = \tilde{\sigma} \, \epsilon_{\tau+k} + \tilde{\mu} \, \theta^{k-1} \, \sigma_\epsilon, \quad k=1,2,\cdots \tag{3.4}$$

으로 축소되며, 식 (2.4)와 함께 표현하면 관측오차 e_t는

$$e_t = \begin{cases} \epsilon_t, & t \le \tau, \\ \tilde{\sigma} \, \epsilon_t + \tilde{\mu} \, \theta^{t-\tau-1} \, \sigma_\epsilon, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

가 된다. 따라서 관측오차 e_t의 평균은

$$E(e_t) = \begin{cases} 0, & t \le \tau, \\ \tilde{\mu}\,\theta^{t-\tau-1}\,\sigma_\epsilon, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이고, 분산은

$$\mathrm{Var}(e_t) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2, & t \le \tau, \\ \tilde{\sigma}^2\sigma_\epsilon^2, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이 된다. 이상원인이 발생한 후 반복수정에 의하여 관측오차의 평균은 스스로 교정하는(self-rectifying) 경향을 가지며, 분산은 계단이동(step shift) 형태임을 알 수 있다.

이 논문에서 고려하는 두번째 경우인 평균의 지속적 흐름과 분산의 지속적 변화는 $\tilde{\mu}_k = k\,r$이고 $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}$인 경우이다. 이 경우 식 (3.3)은

$$e_{\tau+k} = \tilde{\sigma}\,\epsilon_{\tau+k} + \frac{r\,(1-\theta^k)}{1-\theta}\,\sigma_\epsilon, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{3.5}$$

으로 축소되기 때문에, 관측오차 e_t는

$$e_t = \begin{cases} \epsilon_t, & t \le \tau, \\ \tilde{\sigma}\,\epsilon_t + \dfrac{r\,(1-\theta^{t-\tau})}{1-\theta}\,\sigma_\epsilon, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

로 표현할 수 있다. 따라서 관측오차 e_t의 평균은

$$E(e_t) = \begin{cases} 0, & t \le \tau, \\ \dfrac{r\,(1-\theta^{t-\tau})}{1-\theta}\,\sigma_\epsilon, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이고, 분산은

$$\mathrm{Var}(e_t) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2, & t \le \tau, \\ \tilde{\sigma}^2\sigma_\epsilon^2, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이 된다. 이 경우 이상원인이 발생한 후 관측오차의 평균은 반복수정에도 불구하고 시간에 흐름에 따라 목표치로부터 점점 더 멀어져 일정 값에 수렴하고, 분산은 첫번째 경우와 동일하게 계단이동의 형태임을 알 수 있다.

4. 이상원인의 탐지 절차

4.1. GLR 관리도의 절차

반복수정 활동 중 공정에 이상원인이 발생할 경우 관측오차의 변화를 앞의 장에서 살펴보았다. 이 장에서는 이러한 관측오차의 변화를 탐지라는 절차로서 GLR(generalized likelihood ratio) 관리도를 소개하고자 한다. 이 관리도는 관리통계량으로 GLR을 사용하는 것으로 SPC 절차에 적용된 것은 그리 오래되지 않는다 (Vander Wiel, 1996; Apley와 Shi, 1999).

이상원인이 발생한 경우 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^*$ 또는 $r = r^*$ 그리고 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$가 되며, τ, $\tilde{\mu}^*$, r^* 그리고 $\tilde{\sigma}^*$는 모른다고 가정하자. 관리상태와 이상상태를 각각 가설검정에서 귀무가설과 대립가설로 표현하면

$$H_0 : \tilde{\mu} = 0\,(r = 0), \quad \tilde{\sigma} = 1, \quad H_1 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^*\,(r = r^*), \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$$

가 된다. 여기서 $\tilde{\mu}$에 대한 가설은 평균의 지속적 변화에 대한 것이고, 괄호의 r에 대한 가설은 평균의 지속적 흐름인 경우를 나타낸다. 시점 $t(>\tau)$에서 위의 가설에 대한 로그우도비(log likelihood ratio)는

$$W_t = -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=\tau+1}^{t}\left(\frac{e_i - b_i^*}{\tilde{\sigma}^*}\right)^2 - \sum_{i=\tau+1}^{t} e_i^2\right] - (t-\tau)\ln\tilde{\sigma}^* \tag{4.1}$$

가 됨을 쉽게 알 수 있으며, 여기서

$$b_i^* = \begin{cases} \tilde{\mu}^*\,\theta^{i-\tau-1}\,\sigma_\epsilon, & \text{평균의 지속적 변화인 경우,} \\ r^*\,(1-\theta^{i-\tau})\,\sigma_\epsilon\,/\,(1-\theta), & \text{평균의 지속적 흐름인 경우} \end{cases}$$

이다. 이때 W_t 값이 클 경우 귀무가설을 기각하게 된다.

식 (4.1)의 통계량에서 θ와 σ_ϵ은 알려져 있는 경우도 있지만, 일반적으로 예비표본 등을 이용하여 추정하게 된다 (이를 Phase I 단계라고 부른다). 추정하는 방법은 일반적으로 많이 사용하는 조건부(conditional) 또는 비조건부 최소제곱추정법(unconditional least squares estimation method)을 이용할 수 있다. 이 논문에서 θ와 σ_ϵ은 알려져 있는 값이라고 가정해도 충분할 정도로 Phase I 단계가 잘 수행되어 참값과 차이가 없음을 가정한다. 따라서 식 (4.1)의 통계량에서 모르는 값은 τ, b_i^* ($\tilde{\mu}^*$ 또는 r^*) 그리고 $\tilde{\sigma}^*$이다. GLR 관리도에서 사용하는 시점 t에서의 관리통계량은 이들 모르는 모수에 대하여 가장 큰 값이 되는

$$\max_{\tau, b_i^*, \tilde{\sigma}^*} W_t$$

을 사용하며, 이 값이 관리한계(control limit) 보다 큰 경우 이상상태의 신호를 주는 것이다. 위의 관리통계량은 식 (4.1)의 W_t에 τ, b_i^* 그리고 $\tilde{\sigma}^*$의 MLE(maximum likelihood estimator)를 대입하는 것과 동일하게 된다. 따라서 GLR 관리도의 관리통계량은 $\hat{\tau}$, $\hat{b}_i^*$ 그리고 $\hat{\tilde{\sigma}}^*$를 각각 τ, b_i^* 그리고 $\tilde{\sigma}^*$의 MLE라고 할 때,

$$\begin{aligned} \max_{\tau, b_i^*, \tilde{\sigma}^*} W_t &= -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t}\left(\frac{e_i - \hat{b}_i^*}{\hat{\tilde{\sigma}}^*}\right)^2 - \sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} e_i^2\right] - (t-\hat{\tau})\ln\hat{\tilde{\sigma}}^* \\ &= -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[(t-\hat{\tau})\,\sigma_\epsilon^2 - \sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} e_i^2\right] - \frac{1}{2}(t-\hat{\tau})\ln\hat{\tilde{\sigma}}^{*2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} e_i^2}{\sigma_\epsilon^2} - (t-\hat{\tau})\left\{\ln\hat{\tilde{\sigma}}^{*2} + 1\right\}\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

이 된다. 여기서 두번째 등식은 이후에 설명하는 바와 같이

$$\hat{\hat{\sigma}}^{*2} = \frac{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} \left(e_i - \hat{b}_i^*\right)^2}{(t-\hat{\tau})\,\sigma_\epsilon^2}$$

라는 사실을 이용하여 유도된다.

위의 식에서 τ, $\tilde{\mu}^*$ (또는 r^*) 그리고 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE는 다음과 같다. 먼저 평균과 분산에 지속적 변화가 발생할 경우 시점 t에서 MLE는

$$\hat{\tau} = \arg\min_{0\le\tau<t}\left\{(t-\tau)\left[\ln\left\{\frac{\sum_{i=\tau+1}^{t}\left(e_i-\theta^{i-\tau-1}\,\bar{e}^S_{\tau+1,t}\right)^2}{(t-\tau)\,\sigma_\epsilon^2}\right\}+1\right]+\frac{\sum_{i=1}^{\tau}e_i^2}{\sigma_\epsilon^2}\right\},$$

$$\hat{\tilde{\mu}}^* = \frac{1}{\sigma_\epsilon}\,\bar{e}^S_{\hat{\tau}+1,t}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}^{*2} = \frac{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t}\left(e_i-\theta^{i-\hat{\tau}-1}\,\bar{e}^S_{\hat{\tau}+1,t}\right)^2}{(t-\hat{\tau})\,\sigma_\epsilon^2} \tag{4.3}$$

이 된다. 여기서

$$\bar{e}^S_{\hat{\tau}+1,t} = \frac{(1-\theta^2)\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t}\theta^{i-\hat{\tau}-1}\,e_i}{1-\theta^{2(t-\hat{\tau})}}$$

로 정의하며, t 보다 작은 시점에 대하여 τ의 MLE를 구한 후 $\tilde{\mu}^*$ (또는 r^*)와 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE를 계산하게 된다. MLE의 상세한 유도 과정은 부록 A에 수록하였다. 따라서 평균과 분산의 지속적 변화를 탐지하는 GLR 관리도의 절차는 시점 t에서 식 (4.2)에 식 (4.3)의 MLE를 대입한 값을 $\hat{W}_t^S$라 할 때, $\hat{W}_t^S \ge h_S$인 경우 이상신호를 주는 것이다. 이때 관리한계 h_S는 관리상태에서의 평균런길이(average run length: ARL), 즉 ARL_0가 주어진 값을 만족하도록 설정하고 있으며, 이 방법에 대해서는 다음 절에서 상세하게 설명하고자 한다.

다음으로 평균에 지속적 흐름과 분산에 지속적 변화가 발생할 경우 시점 t에서 MLE는

$$\hat{\tau} = \arg\min_{0\le\tau<t}\left\{(t-\tau)\left[\ln\left\{\frac{\sum_{i=\tau+1}^{t}\left(e_i-(1-\theta^{i-\tau})\,\bar{e}^D_{\tau+1,t}\right)^2}{(t-\tau)\,\sigma_\epsilon^2}\right\}+1\right]+\frac{\sum_{i=1}^{\tau}e_i^2}{\sigma_\epsilon^2}\right\},$$

$$\hat{r}^* = \frac{(1-\theta)}{\sigma_\epsilon}\,\bar{e}^D_{\hat{\tau}+1,t}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}^{*2} = \frac{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t}\left(e_i-(1-\theta^{i-\hat{\tau}})\,\bar{e}^D_{\hat{\tau}+1,t}\right)^2}{(t-\hat{\tau})\,\sigma_\epsilon^2} \tag{4.4}$$

이 된다. 여기서

$$\bar{e}^{D}_{\hat{\tau}+1,t} = \frac{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} (1-\theta^{i-\hat{\tau}})\, e_i}{\sum_{i=\hat{\tau}+1}^{t} (1-\theta^{i-\hat{\tau}})^2}$$

로 정의하며, 상세한 유도 과정은 부록 B에 수록하였다. 따라서 평균의 지속적 흐름과 분산의 지속적 변화를 탐지하는 GLR 관리도의 절차는 시점 t에서 식 (4.2)에 식 (4.4)의 MLE를 대입한 값을 $\hat{W}_t^D$라 할 때, $\hat{W}_t^D \geq h_D$인 경우 이상신호를 주는 것이다. 이때 h_D는 ARL_0가 주어진 값을 만족하도록 설정할 수 있다.

위에서 제시한 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하여 공정을 관리할 수도 있으며, 이것은 $\hat{W}_t^S \geq h_S$ 또는 $\hat{W}_t^D \geq h_D$인 경우 이상신호를 주는 것이다. 이때 h_S와 h_D는 개별적인 관리도의 ARL_0 값이 동일하면서 동시에 적용할 때의 ARL_0가 주어진 값을 만족하도록 설정할 수 있다. h_S와 h_D의 값은 큰 차이가 나지 않기 때문에 계산의 편의상 $h_S = h_D$로 하며, 이를 h_{SD}라고 표기하기로 한다.

4.2. 관리한계의 설정과 관리도의 효율

평균의 지속적 변화 또는 지속적 흐름 및 분산의 지속적 변화를 탐지하는 GLR 관리도의 절차는 관리통계량으로 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 사용하여 공정을 관리하는 것이다. 이때 관리한계 h_S, h_D 그리고 h_{SD}는 ARL_0가 주어진 값을 만족하도록 설정하고 있다. GLR 관리도의 경우 ARL을 이론적으로 계산하기가 어렵기 때문에 모의실험을 통하여 관리한계를 얻을 수 있다.

모의실험에서 일반성을 잃지 않고 $\sigma_\epsilon^2 = 1$을 가정하며, 여러가지 θ 값에 대하여 모의실험을 수행할 수 있다. 예를 들어, $\theta = 0.4$인 경우 주어진 관리한계에 대하여 $\hat{W}_t^S$, $\hat{W}_t^D$ 그리고 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 절차에 대한 ARL_0를 모의실험을 이용하여 계산하고 이를 표 4.1에 제시하였다. 반복은 소요되는 시간에 따라 3000회~10000회 실시하였다.

이때 얻어진 ARL_0를 종속변수, 관리한계를 독립변수로 하여 비선형회귀모형인 성장모형(growth model)에 적합시킨 결과 적합이 아주 잘 되는 것으로 나타났으며 (모든 경우 $R^2 = 0.99977$), 적합된 회귀식은 다음과 같다.

$\hat{W}_t^S$를 사용하는 절차: $\text{ARL}_0 = \exp\{-0.332908 + 0.51692\, h_S\}$,

$\hat{W}_t^D$를사용하는 절차: $\text{ARL}_0 = \exp\{-0.423088 + 0.522718\, h_D\}$,

$\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 절차: $\text{ARL}_0 = \exp\{-0.986064 + 0.51399\, h_{SD}\}$.

위의 회귀식을 이용하면 $\theta = 0.4$인 경우 $\text{ARL}_0 = A_0$를 만족하는 관리한계에 대한 근사식을

$$h_S = \frac{1}{0.51692}\{\ln A_0 + 0.332908\}, \quad h_D = \frac{1}{0.522718}\{\ln A_0 + 0.423088\},$$
$$h_{SD} = \frac{1}{0.51399}\{\ln A_0 + 0.986064\}$$

표 4.1: $\theta = 0.4$인 경우 관리한계와 ARL_0 값

관리한계	ARL_0		
	$\hat{W}_t^S$	$\hat{W}_t^D$	$\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$
9.0	75.45	72.46	38.41
9.5	97.60	94.70	49.56
10.0	126.87	121.23	63.25
10.5	160.38	159.36	81.64
11.0	211.90	202.82	105.38
11.5	275.04	267.09	138.23
12.0	350.75	344.97	176.88
12.5	468.23	446.68	230.17
12.7	498.36	505.55	254.70
12.9	562.72	565.62	284.25
13.1	625.25	615.20	314.92
13.3	697.31	670.82	344.10
13.5	762.12	783.36	397.89
13.7	844.45	843.19	425.64
13.9	940.66	936.55	461.10
14.0	1024.94	974.91	500.32

로 얻을 수 있다. $\theta \neq 0.4$인 경우에도 이와 유사한 방법으로 관리한계를 설정할 수 있다.

이제 GLR 관리도의 효율, 즉 이상상태에서의 ARL인 ARL_1을 모의실험을 통하여 계산하였다. $\theta = 0.4$인 경우 $\mathrm{ARL}_0 = 500$을 만족하도록 관리한계를 설정했으며, 설정한 관리한계 값과 여러가지 $\tilde{\mu}^*$ (또는 r^*)와 $\tilde{\sigma}^*$에 대한 ARL_1 값을 표 4.2에 수록하였다.

모의실험에서 반복은 소요되는 시간에 따라 3000회~10000회 실시하였으며, $\tilde{\mu}^* = r^* = 0.0$과 $\tilde{\sigma}^* = 1.0$인 경우는 관리상태에서의 ARL인 ARL_0 값을 나타낸다.

표 4.2의 결과를 보면 $\tilde{\mu}^*$ 또는 r^*의 변화가 작고 분산에 변화가 없는 경우 ($\tilde{\mu}^* \leq 2.0$ 또는 $r^* = 0.2$ 그리고 $\tilde{\sigma}^* = 1.0$인 경우) GLR 관리도의 효율은 아주 좋지 않은 것으로 나타났다. 그러나 분산의 변화가 수반될 경우에는 이상원인의 효과와 관리통계량에 상관없이 효율이 거의 유사하며 이상원인을 잘 탐지하는 것으로 나타났다.

분산에 변화가 없는 경우 ($\tilde{\sigma}^* = 1.0$), $\tilde{\mu}^* = 5.0$과 같이 $\tilde{\mu}^*$의 변화가 큰 경우에 $\hat{W}_t^S$, $\hat{W}_t^D$ 그리고 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 GLR 관리도의 ARL은 각각 89.36, 198.52 그리고 125.57로서 $\hat{W}_t^S$를 사용하는 GLR 관리도의 효율이 좋았다. 또한 분산에 변화가 없는 경우, $r^* = 0.2$인 경우에 $\hat{W}_t^S$, $\hat{W}_t^D$ 그리고 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 GLR 관리도의 ARL은 각각 422.57, 149.29 그리고 166.37, $r^* = 1.0$인 경우에 ARL은 각각 16.44, 9.38 그리고 10.29, $r^* = 3.0$인 경우에 ARL은 각각 2.62, 2.32 그리고 2.43으로 모든 경우에 $\hat{W}_t^D$를 사용하는 GLR 관리도의 효율이 좋은 것을 알 수 있다. 따라서 평균의 변화만 발생할 수 있는 공정에서는 평균의 지속적 변화를 탐지하고자 하는 경우 $\hat{W}_t^S$, 지속적 흐름을 탐지하고자 하는 경우 $\hat{W}_t^D$를 사용하는 GLR 관리도가 바람직하며, 만일 공정 평균에 지속적 변화와 지속적 흐름 중 어떤 것이 발생할지 확실하지 않는 경우에는 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 것이 좀 더 안정정으로 공정을 관리하는 절차라고 판단된다.

표 4.2: $\theta = 0.4$인 경우 ARL_1 값

평균에 대한 이상원인 효과	$\tilde{\mu}^*$	$\tilde{\sigma}^*$	r^*	ARL_1 $\hat{W}_t^S$	ARL_1 $\hat{W}_t^D$	ARL_1 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$
관리상태	0.0	1.0	0.0	500.72	499.62	498.29
	0.0	2.0	0.0	14.99	15.31	15.94
		5.0		2.67	2.66	2.75
	1.0	1.0	0.0	493.15	496.09	495.77
		2.0		14.41	14.81	15.49
		5.0		2.64	2.63	2.73
지속적 변화	2.0	1.0	0.0	491.43	493.98	492.92
		2.0		12.84	13.30	13.88
		5.0		2.57	2.55	2.64
	5.0	1.0	0.0	89.36	198.52	125.57
		2.0		4.83	5.33	5.37
		5.0		2.10	2.09	2.16
	0.0	1.0	0.2	422.57	149.29	166.37
		2.0		14.29	14.50	15.16
		5.0		2.66	2.65	2.74
지속적 흐름	0.0	1.0	1.0	16.44	9.38	10.29
		2.0		7.62	7.01	7.44
		5.0		2.57	2.56	2.64
	0.0	1.0	3.0	2.62	2.32	2.43
		2.0		2.48	2.36	2.44
		5.0		2.07	2.07	2.11
관리한계 (h_S, h_D, h_{SD})				12.67	12.70	14.01

5. 교정활동 수행 절차

이 논문에서는 공정을 설정하여 가동한 후 일정한 시간이 지나면 다시 재설정하여 가동하는 공정, 예를 들어 일정 수의 제품을 생산한 후에는 공정을 다시 조정하여 다른 제품을 생산하는 경우를 고려한다. 반도체 부품인 BGA(ball grid array)의 생산공정 내 구리 도금을 하는 공정을 예를 들면, 필요한 제품의 도금두께는 서로 상이하기 때문에 특정한 두께로 일정 개수를 도금한 후에 두께를 달리하도록 공정을 재설정한 후 다시 가동하고 있다. 이 논문에서 공정은 N개의 제품을 생산한 후에 다시 재설정하여 가동하는 것을 가정하기로 한다. 이러한 공정에서 통합공정관리를 수행하는 도중 이상원인이 탐지된 경우 공정잔여시간 동안 발생할 수 있는 미래손실을 고려하여 교정활동 여부를 판단하는 절차를 제안하려고 한다. 즉, 미래손실의 기대값이 교정활동 비용 보다 클 경우에는 교정활동을 하게 되고 그렇지 않은 경우에는 교정없이 공정을 계속 수행하는 것이다.

5.1. 교정활동 수행 조건

통합공정관리에서 평균비용을 계산하기 위해서는 먼저 공정주기(cycle length)를 정의할 필요가 있다. 공정주기는 N개의 제품을 생산할 때까지 시간이라 정의하고 이를 T_C라고

할 때,

$$T_C = \tau + T_1 + T_r$$

로 표현할 수 있다. 여기서 T_1은 이상원인의 발생 후 이상신호까지의 시간이고, T_r은 이상신호 이후 공정의 잔여시간을 나타낸다. 이상원인이 발생하면 한 공정주기에서 또다른 이상원인은 발생하지 않는다고 가정한다. 또한 제거된 이상원인은 공정잔여시간 동안 다시 발생하지 않는다고 가정한다.

공정주기 동안 발생하는 비용(cost per cycle: CPC)은 한 시점에서의 공정관측비용 C_M과 공정수정비용 C_A, 목표치로부터 일표준편차(one standard deviation) 이탈에 대한 비용 C_T, 오경보(false alarm)비용 C_F 그리고 교정비용 C_R 등에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{CPC} = T_C(C_M + C_A) + C_F N_F + C_T \Bigg[& \sum_{i=1}^{\tau} \epsilon_i^2 + \sum_{i=1}^{T_1} e_{\tau+i}^2 + I(R) \sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} \epsilon_{\tau+i}^2 \\ & + (1 - I(R)) \sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2 \Bigg] + I(R)\, C_R. \end{aligned} \tag{5.1}$$

여기서 N_F는 오경보의 횟수이고, $I(R)$은 시점 $\tau + T_1$에서 이상신호가 발생했을 때 교정활동을 수행하면 1이고 아닐 경우에는 0인 지시함수 (indicator function)를 나타낸다. 공정관리에서 경제적 모형에 대한 연구는 Lorenzen과 Vance (1986), Jiang과 Tsui (2000) 그리고 Park 등 (2004)을 참조할 수 있다.

식 (5.1)에서 교정활동을 수행하는 경우와 하지 않는 경우 비용에서 서로 차이가 나는 항은 각각

$$C_T \sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} \epsilon_{\tau+i}^2 + C_R \text{과} \quad C_T \sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2$$

이고, 이 항의 기대값은 각각

$$C_T\, T_r\, \sigma_\epsilon^2 + C_R \text{과} \quad C_T\, E\left[\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2 \right]$$

이 된다. 따라서

$$C_T\, T_r\, \sigma_\epsilon^2 + C_R \, < \, C_T\, E\left[\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2 \right] \tag{5.2}$$

인 경우 교정활동을 수행하는 것이다.

식 (5.2)의 오른쪽의 기대값은 이상원인이 탐지되어도 수정하지 않는 경우에 공정잔여시간 동안 발생하는 관측오차의 총제곱합을 나타내며, 이 기대값을 계산하기 위하여 다음의 세가지 경우를 고려한다. 이때 이상원인을 탐지하는 GLR 관리도는 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용함을 가정한다. 먼저 이상신호를 주는 시점 $\tau + T_1$에서 $\hat{W}_t^S \geq h_{SD}$이고 $\hat{W}_t^D < h_{SD}$인 경우 이상원인을 평균과 분산의 지속적 변화로 판단한다. 이 경우 식 (3.4)로부터

$$E\left(e_{\tau+k}^2\right) = \left\{ \tilde{\sigma}^{*2} + \tilde{\mu}^{*2}\, \theta^{2(k-1)} \right\} \sigma_\epsilon^2$$

이 되므로,

$$E\left[\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2\right] = \sigma_\epsilon^2 \left[T_r\,\tilde{\sigma}^{*2} + \frac{\tilde{\mu}^{*2}\,\theta^{2T_1}\,\left(1-\theta^{2T_r}\right)}{1-\theta^2}\right]$$

이 된다. 이 식에서 $\tilde{\mu}^*$와 $\tilde{\sigma}^{*2}$은 이상신호를 주는 시점 $\tau + T_1$에서 식 (4.3)을 이용하여 계산한 MLE를 사용한다. 따라서 식 (5.2)의 교정활동 수행조건은

$$C_R \,<\, C_T\,\sigma_\epsilon^2 \left[T_r(\hat{\tilde{\sigma}}^{*2}-1) + \frac{\hat{\tilde{\mu}}^{*2}\,\theta^{2T_1}\,\left(1-\theta^{2T_r}\right)}{1-\theta^2}\right] \tag{5.3}$$

인 경우 교정활동을 수행하는 것이 된다.

다음으로 시점 $\tau + T_1$에서 $\hat{W}_t^S < h_{SD}$이고 $\hat{W}_t^D \geq h_{SD}$인 경우 이상원인을 평균의 지속적 흐름과 분산의 지속적 변화로 판단한다. 이 경우 식 (3.5)로부터

$$E\left(e_{\tau+k}^2\right) = \tilde{\sigma}^{*2}\,\sigma_\epsilon^2 + \frac{r^{*2}\,(1-\theta^k)^2}{(1-\theta)^2}\,\sigma_\epsilon^2$$

이 되므로,

$$E\left[\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r} e_{\tau+i}^2\right] = \sigma_\epsilon^2 \left[T_r\,\tilde{\sigma}^{*2} + \frac{r^{*2}}{(1-\theta)^2}\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r}(1-\theta^i)^2\right]$$

이 된다. 이 식에서 r^*와 $\tilde{\sigma}^{*2}$은 시점 $\tau + T_1$에서 식 (4.4)를 이용하여 계산한 MLE를 사용한다. 따라서 식 (5.2)의 교정활동 수행조건은

$$C_R \,<\, C_T\,\sigma_\epsilon^2 \left[T_r(\hat{\tilde{\sigma}}^{*2}-1) + \frac{\hat{r}^{*2}}{(1-\theta)^2}\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r}(1-\theta^i)^2\right]$$

인 경우 교정활동을 수행하는 것이 된다.

마지막으로 시점 $\tau + T_1$에서 $\hat{W}_t^S \geq h_{SD}$이고 $\hat{W}_t^D \geq h_{SD}$인 경우 이상원인이 평균의 지속적 변화인지 지속적 흐름인지를 판단해야 하는데, 이 판단이 용이하지 않다. 우리는 공정의 특성 또는 관리자의 성향에 따라 다음 두가지 전략을 제안한다. 첫째는 식 (5.2)의 수행조건에서 기대값의 부분이 평균의 지속적 변화와 지속적 흐름의 경우 중 더 작은 것을 사용하는 것으로, 이는 가능하면 교정작업을 수행하지 않는 것에 주안을 둔 전략이다. 즉,

$$C_R \,<\, C_T\,\sigma_\epsilon^2 \left[T_r(\hat{\tilde{\sigma}}^{*2}-1) + \min\left\{\frac{\hat{\tilde{\mu}}^{*2}\,\theta^{2T_1}\,\left(1-\theta^{2T_r}\right)}{1-\theta^2},\, \frac{\hat{r}^{*2}}{(1-\theta)^2}\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r}(1-\theta^i)^2\right\}\right]$$

인 경우 교정활동을 수행하는 것이다.

두번째는 기대값의 부분이 평균의 지속적 변화와 지속적 흐름의 경우 중 더 큰 것을 사용하는 것으로, 이는 교정작업을 수행하는 것에 주안을 둔 전략이다. 즉,

$$C_R \,<\, C_T\,\sigma_\epsilon^2 \left[T_r(\hat{\tilde{\sigma}}^{*2}-1) + \max\left\{\frac{\hat{\tilde{\mu}}^{*2}\,\theta^{2T_1}\,\left(1-\theta^{2T_r}\right)}{1-\theta^2},\, \frac{\hat{r}^{*2}}{(1-\theta)^2}\sum_{i=T_1+1}^{T_1+T_r}(1-\theta^i)^2\right\}\right]$$

인 경우 교정활동을 수행하는 것이다. 기타 다른 전략, 예를 들어 두 경우의 평균과 비교하는 전략도 가능할 것이라고 생각한다.

표 5.1: 관측오차 e_t와 관리통계량 $\hat{W}_t^S$ 및 $\hat{W}_t^D$ 값

t	e_t	$\hat{W}_t^S$	$\hat{W}_t^D$
46	1.27	2.68	1.51
47	0.74	3.83	2.32
48	−0.71	2.77	1.51
49	−0.35	5.62	1.96
50	0.42	3.06	1.70
51	3.09	4.28	4.28
52	−0.62	3.58	2.56
53	3.25	6.81	6.85
54	−1.96	7.46	6.74
55	0.21	6.86	5.93
56	−0.33	6.37	5.17
57	−3.36	9.67	8.71
58	−3.02	12.42	11.77
59	−0.19	11.71	10.97
60	2.42	13.21	12.31
61	−2.42	14.73	13.99

5.2. 예제

앞 절에서 제안한 교정활동의 수행 절차에 대한 이해를 돕고자 이를 적용하는 예제를 한가지 들고자 한다. 실제 현장의 데이터에 적용하기가 힘들어 모의실험을 이용하였다.

어떤 제품의 생산공정은 $N = 30000$개의 제품을 생산한 후 공정을 다시 재설정하며, 제품 생산에 소요되는 총 시간은 $T_C = 100$시간이라고 가정하자. 표본추출의 시점은 모두 1시간 간격으로 하기로 하였다. 또한 예비표본을 통한 Phase I 단계에서 수정되지 않은 공정의 공정편차 Z_t는 ARIMA(0,1,1) 모형에 잘 적합되며, 모수인 θ와 σ_ϵ^2은 각각 0.4와 1로 추정되었음을 가정한다. 이 생산공정에 대한 IPC 절차로서, APC는 총 수정효과가 $A_t = -\hat{Z}_t$가 되는 MMSE 수정 절차를 사용하고 $\hat{Z}_t$는 식 (2.5)를 이용하기로 한다. 또한 과거의 경험으로 볼 때 이상원인이 평균과 분산을 동시에 변화시키지만 평균에 지속적 변화와 지속적 흐름 중 어떤 것이 발생할지 확실하지 않기 때문에, SPC는 $\hat{W}_t^S$와 $\hat{W}_t^D$를 동시에 사용하는 GLR 관리도를 수행하며 관리한계인 h_{SD}는 표 4.2의 값인 14.01을 사용하기로 하였다.

모의실험으로 시점 $t = 50$까지는 관리상태, 즉 $\tau = 50$으로 하고, $t = 50$과 51 사이에서 $\tilde{\mu}^* = 2.0$이고 $\tilde{\sigma}^* = 2.0$인 평균과 분산의 지속적 변화의 이상원인을 발생시켰다. 표 5.1에는 관리상태 중 $t = 46$에서 50까지와 이상상태인 $t = 51$부터의 관측오차 e_t와 관리통계량 $\hat{W}_t^S$ 및 $\hat{W}_t^D$ 값을 수록하였다.

시점 $t = 61$에서 $\hat{W}_t^D$는 관리한계인 $h_{SD} = 14.01$ 보다 작지만 $\hat{W}_t^S$가 관리한계 보다 크기 때문에 이상상태의 신호를 주며, 이 이상원인을 평균과 분산의 지속적 변화로 판단하였다. 이때 $(t = 61)$, 공정의 변화시점인 τ의 MLE는 50으로 계산되었고, $\tilde{\mu}^*$와 $\tilde{\sigma}^*$의 MLE는 각각 2.71과 2.09로 계산되었다. 이 모의실험에서 τ와 $\tilde{\sigma}^*$는 정확하게 추정되었지만, $\tilde{\mu}^*$는 조금 부정확하게 추정되었고 이는 분산이 동시에 변화한 것에 기인한 것으로 생각된다.

이제 이상신호 후 이상원인에 대한 교정활동의 수행 여부에 대하여 알아보자. 식 (5.3)에서 $\tau + T_1 = 61$이고 τ는 50으로 추정되었기 때문에 $T_1 = 11$로 추정되고, 공정의 잔여시간은 $T_r = 39$로 계산된다. 따라서 식 (5.3)은 대략 $C_R < 131.36\,C_T$가 되어, 교정비용 C_R이 목표치로부터 일표준편차 이탈에 대한 비용 C_T의 131.36배 보다 작은 경우 교정활동을 수행하는 것이 경제적인 측면에서 더 바람직하다는 결론을 얻을 수 있다.

6. 결론

통합공정관리인 IPC는 잡음이 내재하는 공정에 대하여 수정활동을 수행하는 APC와 수정활동 중 공정에 이상원인이 발생하면 이를 탐지하는 SPC를 병행하는 절차이다.

이 논문에서는 잡음이 내재하는 공정모형으로 ARIMA(0,1,1) 모형을 가정하고 공정 평균에 지속적 변화 또는 지속적 흐름이, 분산에 지속적 변화의 이상원인이 발생하는 경우를 고려하였다. 이때 매시점마다 MMSE 수정을 수행하는 과정에서 이상원인이 발생할 경우에 대한 관측오차의 표현식을 제안하고, 이 관측오차의 변화에 기초하여 이상원인을 탐지하는 관리도 절차를 제안하였다.

또한 일정한 시간 동안 가동하는 공정에서 이상신호가 발생할 때, 무조건 교정활동을 수행하는 것이 경제적인 관점에서 최선이 아니다. 이 논문에서는 공정잔여시간에서 발생하는 미래손실을 고려하여 교정활동의 수행 여부를 결정하는 절차를 제안하였다.

부록

A. 식 (4.3)의 유도

공정 평균과 분산에 지속적 변화가 있는 경우 e_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우 $N(0, \sigma_\epsilon^2)$이고 $t \ge \tau + 1$인 경우 $N(\tilde{\mu}^*\, \theta^{t-\tau-1}\, \sigma_\epsilon, \tilde{\sigma}^{*2}\sigma_\epsilon^2)$이므로, $e_1, e_2, \ldots, e_t$가 주어진 경우 로그우도비함수(log likelihood function)는

$$\begin{aligned}\ln L(\tau, \tilde{\mu}^*, \tilde{\sigma}^{*2} \,|\, e_1, e_2, \ldots, e_t) &= -\frac{t}{2}\ln(2\pi\,\sigma_\epsilon^2) - \frac{t-\tau}{2}\ln\tilde{\sigma}^{*2} \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2 + \sum_{i=\tau+1}^{t}\left(\frac{e_i - \tilde{\mu}^*\,\theta^{i-\tau-1}\,\sigma_\epsilon}{\tilde{\sigma}^*}\right)^2\right]\end{aligned}$$

으로 표현된다. 만일 τ를 알고 있다고 가정하면, $\tilde{\mu}^*$와 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE는

$$\bar{e}^S_{\tau+1,t} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{t} \theta^{i-\tau-1}\, e_i}{\sum_{i=\tau+1}^{t} \theta^{2(i-\tau-1)}} = \frac{(1-\theta^2)\sum_{i=\tau+1}^{t}\theta^{i-\tau-1}\, e_i}{1-\theta^{2(t-\tau)}}$$

에 대하여

$$\hat{\tilde{\mu}}^* = \frac{1}{\sigma_\epsilon}\,\bar{e}^S_{\tau+1,t}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}^{*2} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{t}\left(e_i - \theta^{i-\tau-1}\,\bar{e}^S_{\tau+1,t}\right)^2}{(t-\tau)\,\sigma_\epsilon^2}$$

이 된다. 이 추정량들을 로그우도비함수에 대입하면

$$\ln L(\tau\,|\,e_1,e_2,\ldots,e_t) = -\frac{t}{2}\ln(2\pi\,\sigma_\epsilon^2) - \frac{1}{2}\left[(t-\tau)\left\{\ln\hat{\tilde{\sigma}}^{*2}+1\right\} + \frac{\sum_{i=1}^{\tau}e_i^2}{\sigma_\epsilon^2}\right]$$

이 되므로, 공정의 변화시점 τ의 MLE 및 $\tilde{\mu}^*$와 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE는 식 (4.3)과 같이 유도된다.

B. 식 (4.4)의 유도

공정 평균에 지속적 흐름과 분산에 지속적 변화가 있는 경우 e_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우 $N(0,\sigma_\epsilon^2)$이고 $t \ge \tau+1$인 경우 $N(r^*\,(1-\theta^{t-\tau})\,\sigma_\epsilon/(1-\theta), \tilde{\sigma}^{*2}\sigma_\epsilon^2)$이므로, $e_1,e_2,\ldots,e_t$가 주어진 경우 로그우도비함수는

$$\begin{aligned}\ln L(\tau,r^*,\tilde{\sigma}^{*2}\,|\,e_1,e_2,\ldots,e_t) \;=\; & -\frac{t}{2}\ln(2\pi\,\sigma_\epsilon^2) - \frac{t-\tau}{2}\ln\tilde{\sigma}^{*2} \\ & -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=1}^{\tau}e_i^2 + \sum_{i=\tau+1}^{t}\left(\frac{e_i - r^*\,(1-\theta^{i-\tau})\,\sigma_\epsilon/(1-\theta)}{\tilde{\sigma}^*}\right)^2\right]\end{aligned}$$

으로 표현된다. 만일 τ를 알고 있다고 가정하면, r^*와 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE는

$$\bar{e}^D_{\tau+1,t} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{t}(1-\theta^{i-\tau})\,e_i}{\sum_{i=\tau+1}^{t}(1-\theta^{i-\tau})^2}$$

에 대하여

$$\hat{r}^* = \frac{(1-\theta)}{\sigma_\epsilon}\,\bar{e}^D_{\tau+1,t}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}^{*2} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{t}\left(e_i - (1-\theta^{i-\tau})\,\bar{e}^D_{\tau+1,t}\right)^2}{(t-\tau)\,\sigma_\epsilon^2}$$

이 된다. 이 추정량들을 로그우도비함수에 대입하면 τ의 MLE 및 r^*와 $\tilde{\sigma}^{*2}$의 MLE는 식 (4.4)와 같이 유도된다.

참고문헌

Apley, D. W. and Shi, J. (1999). The GLRT for statistical process control of autocorrelated processes, *IIE Transactions*, **31**, 1123–1134.

Box, G., Jenkins, G. and Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 3rd ed., Prentice Hall, New Jersey.

Box, G. and Kramer, T. (1992). Statistical process monitoring and feedback adjustment–A discussion, *Technometrics*, **34**, 251–267.

Box, G. and Luceño, A. (1994). Selection of sampling interval and action limit for discrete feedback adjustment, *Technometrics*, **36**, 369–378.

Box, G. and Luceño, A. (1997). *Statistical control by monitoring and feedback adjustment*, John Wiley & Sons, New York.

Capilla, C., Ferrer, A., Romero, R. and Hualda, A. (1999). Integration of statistical and engineering process control in a continuous polymerization process, *Technometrics*, **41**, 14–28.

del Castillo, E. (2002). *Statistical process adjustment for quality control*, John Wiley & Sons, New York.

Janakiram, M. and Keats, J. B. (1998). Combining SPC and EPC in a hybrid industry, *Journal of Quality Technology*, **30**, 189–200.

Jiang, W. (2004). A joint monitoring scheme for automatically controlled processes, *IIE Transactions*, **36**, 1201–1210.

Jiang, W. and Tsui, K. L. (2000). An economic model for integrated APC and SPC control charts, *IIE Transactions*, **32**, 505–513.

Jiang, W., Wu, H., Tsung, F., Nair, V. N. and Tsui, K. L. (2002). Proportional integral derivative charts for process monitoring, *Technometrics*, **44**, 205–214.

Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: A unified approach, *Technometrics*, **28**, 3–10.

Mastrangelo, C. M. and Brown, E. C. (2000). Shift detection properties of moving centerline control chart schemes, *Journal of Quality Technology*, **32**, 67–74.

Montgomery, D. C. (1999). A perspective on models and the quality sciences: Some challenges and future directions, *ASQ Statistics Division Newsletter*, **18**, 8–13.

Montgoemry, D. C., Keats, J. B., Runger, G. C. and Messina, W. S. (1994). Integrating statistical process control and engineering process control, *Journal of Quality Technology*, **26**, 79–87.

Nembhard, H. B. and Mastrangelo, C. M. (1998). Integrated process control for startup operations, *Journal of Quality Technology*, **30**, 201–211.

Park, C. (2001). A statistical process control procedure with adjustments and monitoring, *Nonlinear Analysis*, **47**, 2061–2072.

Park, C., Lee, J. and Kim, Y. (2004). Economic design of a variable sampling rate EWMA control chart, *IIE Transactions*, **36**, 387–399.

Park, C. and Reynolds, M. Jr. (2008). Economic design of an integrated process control procedure with repeated adjustments and EWMA monitoring, to be published.

Reynolds, M. R. Jr. and Stoumbos, Z. G. (2004a). Control charts and the efficient allocation of sampling resources, *Technometrics*, **46**, 200–214.

Reynolds, M. R. Jr. and Stoumbos, Z. G. (2004b). Should observations be grouped for effective process monitoring?, *Journal of Quality Technology*, **36**, 343–366.

Reynolds, M. R. Jr. and Stoumbos, Z. G. (2005). Should exponentially weighted moving average and cumulative sum charts be used with Shewhart limits?, *Technometrics*, **47**, 409–424.

Reynolds, M. R. Jr. and Park, C. (2008). CUSUM charts for detecting special causes in integrated process control, *IIE Transactions*, under revision for publication.

Ruhhal, N. H., Runger, G. C. and Dumitrescu, M. (2000). Control charts and feedback adjustments for a jump disturbance model, *Journal of Quality Technology*, **32**, 379–394.

Vander Wiel, S. A. (1996). Monitoring processes that wander using integrated moving average models, *Technometrics*, **38**, 139–151.

Vander Wiel, S. A., Tucker, W. T., Faltin, F. W. and Doganaksoy, N. (1992). Algorithmic statistical process control: Concepts and an application, *Technometrics*, **34**, 286–297.

[2008년 1월 접수, 2008년 2월 채택]

An Integrated Process Control Scheme Based on the Future Loss*

Changsoon Park[1)] Jaeheon Lee[2)]

ABSTRACT

This paper considers the integrated process control procedure for detecting special causes in an ARIMA(0,1,1) process that is being adjusted automatically after each observation using a minimum mean squared error adjustment policy. It is assumed that a special cause can change the process mean and the process variance. We derive expressions for the process deviation from target for a variety of different process parameter changes, and introduce a control chart, based on the generalized likelihood ratio, for detecting special causes. We also propose the integrated process control scheme bases on the future loss. The future loss denotes the cost that will be incurred in a process remaining interval from a true out-of-control signal.

Keywords: Integrated process control, statistical process control, automatic process control, process adjustment, rectifying action, future loss.

* This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (MOEHRD, Basic Research Promotion Fund) (KRF-2006-312-C00490).

1) Professor, Dept. of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea.
E-mail: cspark@cau.ac.kr

2) Corresponding author. Professor, Dept. of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea.
E-mail: jaeheon@cau.ac.kr