

# 순계환 비선형계통의 백스테핑 없는 적응 신경망 제어기

論 文

57-5-19

## Adaptive Neural Control for Strict-feedback Nonlinear Systems without Backstepping

朴張鉉\* · 金成煥<sup>†</sup> · 朴永煥\*\*

(Jang-Hyun Park · Seong-Hwan Kim · Young-Hwan Park)

**Abstract** - A new adaptive neuro-control algorithm for a SISO strict-feedback nonlinear system is proposed. All the previous adaptive neural control algorithms for strict-feedback nonlinear systems are based on the backstepping scheme, which makes the control law and stability analysis very complicated. The main contribution of the proposed method is that it demonstrates that the state-feedback control of the strict-feedback system can be viewed as the output-feedback control problem of the system in the normal form. As a result, the proposed control algorithm is considerably simpler than the previous ones based on backstepping. Depending heavily on the universal approximation property of the neural network (NN), only one NN is employed to approximate the lumped uncertain system nonlinearity. The Lyapunov stability of the NN weights and filtered tracking error is guaranteed in the semi-global sense.

**Key Words** : Adaptive neural control, Strict-feedback nonlinear system

### 1. 서 론

최근에 백스테핑(backstepping) 제어기 설계기법[1]과 신경망(neural network, NN) 근사화기의 개념[2-4]을 결합하여 순계환(strict-feedback) 혹은 순수계환(pure-feedback) 비선형 계통에 대한 새로운 신경망 백스테핑 제어기가 제안되었다.[5-10] 이 문헌들에서는 다음과 같은 방정식으로 기술되는 계통에 대해서 백스테핑 기법에 의해서 체계적으로 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i)x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}_n) + g_n(\mathbf{x}_n)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in R^i (i = 1, \dots, n)$ ,  $u \in R$ ,  $y \in R$ 은 각각 상태변수벡터, 제어입력, 계통의 출력이다. 그리고  $f_i(\cdot)$ ,  $g_i(\cdot)$ 은 각각 미지의 평활한 함수(smooth function)이다. 이 함수들이  $\mathbf{x}_i$ 의 평활한 함수라는 사실 이외에는 그 구조가 완전히 미지라는 사실을 주지할 필요가 있다. 따라서 이 함수들이 안정도에 도움이 되어 상쇄할 필요가 없는 함수를 내포하는지 아닌지에 대한 정보조차도 없다고 가정하는 것이다. 또한 신경망 근사기를 도입하면 고전

적인 적응제어기에서 필요로 했던 매개변수 선형화 조건, 즉  $f_i(\cdot)$ ,  $g_i(\cdot)$ 가 미지의 파라미터에 대해서 선형구조를 가진다는 조건도 불필요하게 된다.

그러나 기존의 백스테핑 기법 기반의 적응 신경망 제어기법에는 단점들이 있다. 각 설계단계마다 가상제어항(virtual control term)들을 결정하고 그 이후 단계에서 그것들의 미분을 계산하는 것이 매우 복잡하고 지리한 계산과정을 거쳐야 한다는 것이다. [6]에서 지적된 바와 같이 DC모터 제어와 같은 간단한 응용과정에서조차도 적응 백스테핑 제어기의 회귀행렬(regression matrix)식이 거의 [11]의 한 페이지에 걸쳐 기술되어 있다. 이러한 복잡도는 계통의 차수  $n$ 이 커질수록 지수함수적으로 증가하며 실용적인 측면에서는 반드시 해결해야 할 문제인 것이다.

본 논문에서는 (1)과 같은 비선형 계통에 대해서 백스테핑 없는 새로운 적응 신경망 제어기를 제안한다. 만약 신경망과 같은 소위 범용 근사기(universal approximator)를 미지의 비선형 함수를 추정하는데 적용한다면 (1)과 같은 계통의 출력 안정화 제어에 굳이 백스테핑을 적용할 필요가 없다는 사실을 보인다. 먼저 (1)식은 계통의 출력과 그 미분항들의 정규식(normal form)으로 재구성될 수 있다는 것을 보이며 이 정규식은 상대차수  $n$ 을 가진다. 제안된 제어기의 핵심은 (1)에 대한 상태변수 계환 제어방식이 변환된 정규식의 출력계환 제어방식으로 볼 수 있다는 것이다. 따라서 비록  $n$ 차의 상태변수 관측기(observer)가 도입됨에도 불구하고 기존의 백스테핑 기반의 적응제어기보다 제어기와 안정도 해석이 현저하게 간단해 짐을 보일 것이다. 제안된 제어기는  $n+1$ 개의 입력을 가지는 오직 하나의 신경망 근사기를 사용하여 모든 미지항들을 포함하는 새로운 하나의 총괄함수를 근사화하게 되며 바로 이 점이 다른 적응신경망

\* 正 會 員 : 木浦大學校 電氣制御新素材工學部 助教授

<sup>†</sup> 교신저자, 正 會 員 : 木浦大學校 電氣制御新素材工學部 副教授

E-mail : shkim@mkpo.ac.kr

\*\* 正 會 員 : 忠州大學校 情報制御工學科 副教授

接受日字 : 2008年 1月 9日

最終完了 : 2008年 2月 14日

제어방식과, 비교하여 본 논문에서 제안된 방식의 간결함을 극명하게 대변한다.

제안된 제어기는 간단한 2차 계통에 대해서 적용해보고 기 제안된 [8]에서 백스테핑 적용 신경망 제어기와 비교하여 그 효율성과 간결함을 보여줄 것이다.

## 2. 문제정의

다음과 같은 표기법이 논문 전반에 걸쳐 사용된다.  $R$ 은 실수를,  $R^n$ 과  $R^{n \times m}$ 은 실수요소를 가지는  $n$ 차 벡터와  $n \times m$ 차원의 행렬을 각각 표기한다. 벡터  $\mathbf{k}$ 에 대해서  $|\mathbf{k}|$ 은 유클리디언 노름(Euclidean norm)을 표기하며 스칼라  $k$ 에 대해서는  $|k|$ 는 절대값을 표기한다.

본 논문은 순례환 비선형 시스템 (1)을 고려하며 모든 상태변수는 측정가능하다고 가정한다. 가제어성을 위하여 다음과 같은 가정이 성립한다고 하자.

**가정 1.** 함수  $g_i(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ 의 부호는 모두 알 수 있다.

본 논문에서는 가정 1에 의해서 모든  $\mathbf{x}_i$ 에 대해서  $g_i(\mathbf{x}_i) > 0$ 이라고 가정한다. 제어목적은 시스템 출력  $y$ 가 기준 출력  $y_d$ 를 추종하고 계통의 모든 신호가 유계임을 보장하는 것이다.

이제 원래의 계통 (1)이 새로 정의되는 상태변수에 대해서 정규식으로 변환됨을 보이도록 한다. 새로운 상태변수  $z_1$ 과  $z_2$ 를  $z_1 \equiv y$ ,  $z_2 \equiv \dot{z}_1 = f_1 + g_1 x_2$ 라고 정의하면  $z_2$ 의 미분에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 x_2 + g_1 \dot{x}_2 \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) (f_1 + g_1 x_2) + g_1 f_2 \\ &= a_2(\mathbf{x}_2) + b_2(\mathbf{x}_2) x_3 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $a_2(\mathbf{x}_2) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) (f_1 + g_1 x_2) + g_1 f_2$  이고  $b_2(\mathbf{x}_2) = g_1 g_2$ 이다. 다시  $z_3 = a_2 + b_2 x_3$ 로 정의하고 그 시간 도함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial b_2}{\partial x_j} \dot{x}_j x_3 + b_2 \dot{x}_3 \\ &= \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_j} + \frac{\partial b_2}{\partial x_j} x_3 \right) (f_j + g_j x_{j+1}) \\ &\quad + b_2 (f_3 + g_3 x_4) \\ &= a_3(\mathbf{x}_3) + b_3(\mathbf{x}_3) x_4 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_3(\mathbf{x}_3) &= \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_j} + \frac{\partial b_2}{\partial x_j} x_3 \right) (f_j + g_j x_{j+1}) \\ b_3(\mathbf{x}_3) &= \prod_{j=1}^3 g_j \end{aligned}$$

이다. 이와 같은 방법으로 일반식을 유도할 수 있으며 그 결과식은 다음과 같다.  $a_1 \equiv f_1$ ,  $b_1 \equiv g_1$ 이라고 정의하면  $i = 2, \dots, n$ 에 대해서 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned} z_i &\equiv a_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) + b_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) x_i \\ \dot{z}_i &\equiv a_i(\mathbf{x}_i) + b_i(\mathbf{x}_i) x_{i+1} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{x}_i) &\equiv \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial b_{i-1}}{\partial x_j} x_i \right) (f_j + g_j x_{j+1}) \\ &\quad + b_{i-1} f_i \\ b_i(\mathbf{x}_i) &\equiv b_{i-1} g_i = \prod_{j=1}^i g_j. \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 따라서 순례환 비선형계통 (1)은 새로이 정의된 상태변수  $z_i (i = 1, \dots, n)$ 에 대해서 다음과 같은 정규식으로 재기술될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $a(\mathbf{x}) = a_n(\mathbf{x}_n)$ 이고  $b(\mathbf{x}) = b_n(\mathbf{x}_n)$ 이다. 한 가지 주지할 사실은 함수  $a(\cdot)$ 와  $b(\cdot)$ 은 그것들이  $\mathbf{x}$ 의 함수라는 사실 외에는 그 함수구조가 완전히 미지라는 것이다. 또한 가정 1에 의해서  $\forall \mathbf{x} \in R^n$ 에 대해서  $b(\mathbf{x}) \geq b_0$ 을 만족하는 양의 상수  $b_0 > 0$ 가 존재하며, 이는 (6)에 가제어성을 부여한다.

## 3. 제어기 설계

### 3.1 고이득 관측기

유도된 정규식 (6)에서 알 수 있듯이 함수  $a_i(\cdot)$ 와  $b_i(\cdot)$ 는 미지의 함수이므로 이들의 함수인 상태변수  $z_i (i = 2, \dots, n)$ 는 계산이 불가능하다. 따라서 이들을 관측하기 위해서 다음의 정리에서와 같이 고이득 관측기 (high-gain observer, HGO)를 도입한다.[4][12]

**보조정리 1.** 출력  $y(t)$ 와 그  $n-1$ 차 시간 도함수가 유계라고 가정하자. 이제 다음과 같은 선형계통을 고려하면

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \epsilon \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ &\vdots \\ \epsilon \dot{\xi}_n &= d_1 \xi_n + d_2 \xi_{n-1} \dots - d_{n-1} \xi_2 - \xi_1 + y(t) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\epsilon$ 은 양의 설계상수이다. 만약 (7)의 마지막 식의 계수들  $d_1, \dots, d_{n-1}$ 을 다항식  $s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + 1$ 이 Hurwitz이도록 선정하면 다음 부등식 (8)이 모든  $t > t^*$ 에 대해서 성립하는 양의 상수  $h$ 와  $t^*$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}| &\leq \epsilon h \\ \hat{\mathbf{z}} &= \left[ z_1, \frac{\xi_2}{\epsilon}, \frac{\xi_3}{\epsilon^2}, \dots, \frac{\xi_n}{\epsilon^{n-1}} \right]^T \end{aligned} \quad (8)$$

위의 보조정리1의 증명은 [12]에서 찾아 볼 수 있다.

이후의 제어기 설계는 기본적으로 [13]에서 제안된 상태 재환 제어 알고리즘에 기반을 두지만 본 논문에서는 새로이 정의된 상태변수  $z_i$ 를 측정할 수 없으므로 HGO를 도입했고 따라서 그 알고리즘의 수정이 불가피하다. 벡터  $\mathbf{y}_d$ ,  $\mathbf{e}$ , 그리고 필터링된 추종오차  $s$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{y}_d = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{e} = |\mathbf{z} - \mathbf{y}_d| \quad (10)$$

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \mathbf{e} = [\Lambda^T \quad 1] \mathbf{e} \quad (11)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d = z_1 - y_d \quad (12)$$

여기서  $\Lambda \equiv [\lambda^{n-1}, (n-1)\lambda^{n-2}, \dots, (n-1)\lambda]^T$  이고  $\lambda > 0$ 은 설계상수이다. HGO식인 (8)을 이용하여 관측된  $\mathbf{e}$ 와  $s$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{y}_d \\ \hat{s} &= [\Lambda^T \quad 1] \hat{\mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (13)$$

식 (11)을 이용하여  $s$ 의 시간 도함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= [0 \quad \Lambda^T] \mathbf{e} + (y^{(n)} - y_d^{(n)}) \\ &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u - y_d^{(n)} + [0 \quad \Lambda^T] \mathbf{e} \\ &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u - y_d^{(n)} + [0 \quad \Lambda^T] \hat{\mathbf{e}} - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \\ &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u + \hat{v} - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\hat{v} = y_d^{(n)} + [0 \quad \Lambda^T] \hat{\mathbf{e}}$ 이고  $\tilde{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{e}$ 이다.

**보조정리 2 :** 계통 (1)이 가정 1을 만족한다고 하며 이상적인 제어입력을 HGO (7)을 이용하여 다음과 같다고 하자.

$$u^* = -k\hat{s} - u_{ad}^*(\mathbf{x}, \hat{v}) \quad (15)$$

$$u_{ad}^*(\mathbf{x}, \hat{v}) = \frac{a(\mathbf{x}) + \hat{v}}{b(\mathbf{x})} \quad (16)$$

여기서  $k > 0$ 은 설계상수이다. 그러면 필터링된 추종오차  $s$ 는 uniformly ultimately bounded 이다.

**증명 :** 리아프노브(Lyapunov) 함수를  $L_s = s^2/2$ 이라고 하면 그 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_s &= s \left\{ a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) \left( -k\hat{s} - \frac{a(\mathbf{x}) + \hat{v}}{b(\mathbf{x})} \right) + \hat{v} - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \right\} \\ &= s \left\{ -kb(\mathbf{x})\hat{s} - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \right\} \\ &= s \left\{ -kb(\mathbf{x})s - kb(\mathbf{x})(\hat{s} - s) - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \right\} \\ &= s \left\{ -kb(\mathbf{x})s - kb(\mathbf{x})[\Lambda^T \quad 1] \tilde{\mathbf{z}} - [0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}} \right\} \\ &\leq -kb(\mathbf{x})s^2 + kb(\mathbf{x})|s| \left( |[\Lambda^T \quad 1] \tilde{\mathbf{z}}| + \frac{|[0 \quad \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}}|}{kb(\mathbf{x})} \right) \\ &\leq -kb(\mathbf{x})|s| (|s| - c_\lambda) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $c_{\lambda 1} = |[\Lambda^T \quad 1]|$ ,  $c_{\lambda 2} = |[0 \quad \Lambda^T]|$ 이고  $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ 이

다. 이 마지막 부등식으로부터  $s$ 에 대해서 다음  $\Omega_s$ 가 불변 집합(invariant set)임을 알 수 있다.

$$\Omega_s = \{s \mid |s| \leq (c_{\lambda 1} + \frac{c_{\lambda 2}}{kb_0})\epsilon h\} \quad (18)$$

또한 집합  $\Omega_s$ 의 반지름은 설계상수  $k$ 와  $\epsilon$ 을 조절하여 원하는 정도로 작게 만들 수 있다는 것을 알 수 있다. ■

제안하는 신경망 제어방식은 하나의 신경망을 도입하여 미지함수 (16)을 근사화 한다.

### 3.2 RBFN에 대한 간략한 기술

일반적으로 다입력 단일출력 RBFN(radial-basis function network)의 출력식은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\hat{u}_{ad}(\mathbf{x}_{in}) = \mathbf{w}^T \Phi(\mathbf{x}_{in}) \quad (19)$$

여기서  $\mathbf{x}_{in} = [\mathbf{x}_{in}^T \quad \hat{v}]^T \in R^{n+1}$ 은 RBFN으로의 입력벡터,  $\hat{u}_{ad} \in R$ 은 출력,  $\mathbf{w} \in R^L$ 은 가변 파라미터 벡터,  $\Phi(\cdot) : R^{n+1} \rightarrow R^L$ 은 입력의 비선형 함수 벡터이다. 그리고  $L$ 은 RBF의 개수를 나타낸다. 벡터  $\mathbf{w}$ 의  $i$ 번째 요소  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ 는 은닉층의  $i$ 번째 뉴런과 출력노드와의 연결강도이며  $\Phi(\mathbf{x}_{in})$ 은 다음과 같은 가우시안 함수이다.

$$\Phi_i(\mathbf{x}_{in}) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_{in} - \mathbf{m}_i|^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (20)$$

여기서  $\mathbf{m}_i \in R^{n+1}$ 은  $i$ 번째 기저함수의 중심을 나타내는 벡터이고  $\sigma_i$ 는 그 기울기를 나타낸다.

RBFN의 주요 장점은 다음 정리에 기술된 바와 같이 원하는 정확도로 비선형 함수를 근사할 수 있는 능력에 있다.

**정리 1 :** (범용 근사화 이론) 어떤 콤팩트(compact) 집합  $\Omega_{\mathbf{x}_{in}} \in R^{n+1}$ 에서 정의된 연속인 실함수  $u_{ad}^*$ 와 임의의 실수  $\epsilon_{re} > 0$ 에 대해서 다음의 부등식을 만족하는 (19)식과 같이 기술되는 RBFN과 최적의 파라미터 벡터  $\mathbf{w}^*$ 가 존재한다.

$$\sup_{\mathbf{x}_{in} \in \Omega_{\mathbf{x}_{in}}} |u_{ad}^*(\mathbf{x}_{in}) - \hat{u}_{ad}(\mathbf{x}_{in} | \mathbf{w}^*)| < \epsilon_{re}. \quad (21)$$

위의 정리 1에서  $\epsilon_{re}$ 는 최적의 파라미터에 대해서도 구조적인 결핍으로 인해 불가피하게 내재하는 재구성오차(reconstruction error)를 나타내며 일반적으로 RBFN의 구조를 키우면  $\epsilon_{re}$ 는 작아진다. 본 논문에서 이 후  $\mathbf{w}^*$ 의 추정치를  $\hat{\mathbf{w}}$ 로 표기한다.

### 3.3 제어법칙과 적응법칙 그리고 안정도 해석

식 (15)에서  $s$ 를  $\hat{s}$ 로 대치하면 다음과 같은 제어기를 얻는다.

$$u = -k\hat{s} - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\mathbf{x}_{in}) \quad (22)$$

파라미터 추정치  $\hat{\mathbf{w}}$ 를 위한 학습법칙은 다음 정리와 같이 결정한다.

**보조정리 3 :** 파라미터 추정치  $\hat{\mathbf{w}}$ 의 학습법칙은 다음식과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = \gamma (\hat{s}\Phi(\mathbf{x}_{in}) - \sigma_s(\hat{\mathbf{w}})|\hat{s}|\hat{\mathbf{w}}) \quad (23)$$

$$\sigma_s(\hat{\mathbf{w}}) = \begin{cases} \frac{c_\Phi}{\epsilon_w} & \text{if } |\hat{\mathbf{w}}| > \epsilon_w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

여기서  $\gamma$ 는 양의 학습률(learning rate)이고  $\epsilon_w$ 는 양의 설계상수이고 상수  $c_\Phi$ 는  $|\Phi(\cdot)| < c_\Phi$ 를 만족시키는 최소 상수이다. 이 학습법칙은  $|\hat{\mathbf{w}}| \leq \epsilon_w$ 를 보장한다.

**증명 :** 리아프노브 함수를  $L_w = \frac{1}{2\gamma} \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{w}}$ 로 정하고 그 시간 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_w &= \frac{1}{\gamma} \hat{\mathbf{w}}^T \dot{\hat{\mathbf{w}}} \\ &= \hat{\mathbf{w}}^T (\hat{s}\Phi - \sigma_s(\hat{\mathbf{w}})|\hat{s}|\hat{\mathbf{w}}) \\ &\leq |\hat{s}|\hat{\mathbf{w}}|c_\Phi - \sigma_s(\hat{\mathbf{w}})|\hat{s}|\hat{\mathbf{w}}|^2 \\ &= -|\hat{s}|\hat{\mathbf{w}}|(\sigma_s(\hat{\mathbf{w}})|\hat{\mathbf{w}}| - c_\Phi). \end{aligned} \quad (24)$$

마지막 부등식에 의하면 만약  $|\hat{\mathbf{w}}| > \epsilon_w$ 이면  $\dot{L}_w < 0$ 이 되므로  $|\hat{\mathbf{w}}| \leq \epsilon_w$ 가 보장된다. ■

한 가지 주지할 사항은 스위칭함수  $\sigma_s(\hat{\mathbf{w}})$ 은 RBFN이 학습된 정보를 유지시키도록 하기 위해서 도입되었으며, 이것은 고전적인 적응제어에서의 switching- $\sigma$  기법[14]을 채용한 것이다. 이 기법은 만약  $\epsilon_w$ 가  $\epsilon_w > |\mathbf{w}^*|$ 를 만족하도록 충분히 크게 선정된다면  $|\hat{\mathbf{w}}|$ 의 유계를 보장하면서 동시에 학습된 정보의 손실도 막을 수 있다.

**정리 2 :** 가정 1을 만족하는 계통식 (1)과 제어기 (22), HGO (7)과 적응법칙 (23)으로 이루어진 적응제어시스템을 고려하자. 이 계통의 필터링된 추종오차  $s$ 는 준진역적으로 (semi-globally) uniformly ultimately bounded 이다.

**증명 :** 이번에는 리아프노브 함수를  $L = s^2/2$ 으로 선정하고 그 시간 도함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_s &= s\dot{s} \\ &= s(a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u + \hat{v} - [0 \ \Lambda^T] \tilde{\mathbf{e}}) \\ &= s(a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u - b(\mathbf{x})u^* + b(\mathbf{x})u^* + \hat{v} - [0 \ \Lambda^T] \tilde{\mathbf{z}}) \\ &= s(-kb(\mathbf{x})\hat{s} + b(\mathbf{x})(u_{ad}^* - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi) - [0 \ \Lambda^T] \tilde{\mathbf{z}}) \\ &= s(-kb(\mathbf{x})s + kb(\mathbf{x})(s - \hat{s}) + b(\mathbf{x})(u_{ad}^* - \hat{\mathbf{w}}^* T \Phi + \hat{\mathbf{w}}^* T \Phi - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi) - [0 \ \Lambda^T] \tilde{\mathbf{z}}) \\ &= -kb(\mathbf{x})s^2 + sb(\mathbf{x})(k[\Lambda^T \ 1] \tilde{\mathbf{z}} + (u_{ad}^* - \hat{\mathbf{w}}^* T \Phi) + \hat{\mathbf{w}}^T \Phi - \frac{[0 \ \Lambda^T] \tilde{\mathbf{z}}}{b(\mathbf{x})}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\leq -kb(\mathbf{x})s^2 \\ &\quad + |s|b(\mathbf{x})(kc_{\lambda_1}\epsilon h + \epsilon_{re} + c_w^- c_\Phi + \frac{c_{\lambda_2}\epsilon h}{b_0}) \end{aligned}$$

여기서  $c_w^- = \epsilon_w + |\mathbf{w}^*|$ 이다. 이제 상수  $c$ 를  $c = \epsilon_{re} + c_w^- c_\Phi + c_{\lambda_2}\epsilon h/b_0$ 로 정의하면 (25)식의 마지막 부등식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_s &= -kb(\mathbf{x})s^2 + |s|b(\mathbf{x})(kc_{\lambda_1}\epsilon h + c) \\ &= -kb(\mathbf{x})|s|(|s| - \epsilon c_{\lambda_1}h - \frac{c}{k}). \end{aligned} \quad (26)$$

이 식은  $s$ 가 다음과 같은 집합에 대해 불변(invariant)하다는 것을 보장하며

$$\Omega_s = \{s \mid |s| \leq \epsilon c_{\lambda_1}h + \frac{c}{k}\} \quad (27)$$

이 집합의 반경은 관측기의 설계상수  $\epsilon$ 과 제어기의 이득  $k$ 를 조절함으로써 충분히 작게 할 수 있다. ■

기존의 백스테핑 기반의 적응 신경망 제어기 [5-10]과 비교하여 본 논문에서 제안된 제어 알고리즘은 상대적으로 매우 간결하다. 이는 매우 복잡한 회귀행렬과 그 미분식의 계산이 없기 때문이며 백스테핑 기법에서는 계통의 차수  $n$ 이 증가할 수록 그 계산의 복잡도는 지수함수적으로 증가한다. 또한 기존의 신경망 제어기는 (1)식의 미지함수  $f_i(\cdot)$ 와  $g_i(\cdot)$ 를 근사화하는데 별개의 신경망을 각각 이용하므로 사용되는 신경망의 개수가 매우 많지만 본 논문에서는 오직 하나의 신경망만 사용하며 미지함들의 집합함수인 (16)을 근사화하여 상쇄하므로 적응칙과 제어입력이 훨씬 간결하며 이 장점은 계통의 차수  $n$ 이 증가할수록 커지게 된다. 또한 설계상수  $\epsilon, d_i, k, \lambda, \gamma, \epsilon_w$ 를 결정해야 하는데 제약적인 조건이 없다는 것도 장점이다.

#### 4. 제어기 설계 예 및 모의실험

제안된 제어 알고리즘의 간결성 및 효율성을 보이기 위해 다음과 같은 2차 계통에 대해서 모의실험을 수행하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.1x_1^2 + (1 + 0.1\sin x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0.2e^{-x_2} + x_1\sin x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (28)$$

초기 상태값은  $\mathbf{x}(0) = [0.6, 0.5]^T$  이고 원하는 출력은  $y_d(t) = \sin t + \cos 0.5t$  이다. 비록 사용된 예가 2차 계통이지만 제안된 제어기의 알고리즘의 간결성을 보이기에 충분하다.

##### 4.1 [8]에서 제안된 적응 신경망 제어기

본 절에서는 비교를 위해서 [8]에서 제안된 백스테핑 기반의 신경망 제어기를 설계한다. 추종오차를  $e_1 = x_1 - y_d$  이라고 정의하면 첫 번째 가상제어항  $\alpha_1$ 은 다음과 같이 선정된다.

$$\alpha_1 = -k_1 e_1 - \hat{\mathbf{w}}_1^T \Phi_1(\mathbf{x}_{in1}), \quad \mathbf{x}_{in1} = [x_1, y_{d2}]^T \quad (29)$$

여기서  $\mathbf{w}_1$ 과  $\Phi_1$ 은 첫 번째 RBFN의 연결강도벡터 및 은닉층의 출력벡터를 각각 나타낸다. 다음으로  $e_2 = x_2 - \alpha_1$ 으로 정의하고 두 번째 RBFN의 입력을 다음과 같이 결정한다.

$$x_{in2} = \left[ x_1, x_2, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}, \phi_1 \right]^T \quad (30)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_{d1}} \dot{y}_{d1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_{d2}} \dot{y}_{d2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{w}_1} \dot{\mathbf{w}}_1 \\ \dot{\mathbf{w}}_1 &= \gamma_1 (\Phi_1 e_1 - \sigma_1 \hat{\mathbf{w}}_1) \end{aligned} \quad (31)$$

이다. 마지막으로 실제 제어 입력은 다음과 같이 결정된다.

$$u = -z_1 - k_2 z_2 - \hat{\mathbf{w}}_2^T \Phi_2(\mathbf{x}_{in2}) \quad (32)$$

여기서 두 번째 RBFN의 적응칙은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_2 = \gamma_2 (\Phi_2 z_2 - \sigma_2 \hat{\mathbf{w}}_2) \quad (33)$$

이 제어알고리즘에서는 입력인 2개와 4개인 RBFN 두 개가 사용되었다. 더욱이 (30)의  $\partial \alpha_1 / \partial x_1$ 과  $\phi_1$ 을 계산하는 것도 RBF와 가상제어 항에 대한 부분적분식이라서 그리 간단하지 않다. 본 예제는 비록 2차 계통이지만 전술한 바와 같이 계통의 차수가 커지면 커질수록 제어입력 계산식의 복잡도는 지수함수적으로 증가하게 된다.

#### 4.2 제안된 신경망 제어기

본 논문에서 제안된 제어기의 구현과정을 요약하면 다음과 같다. 먼저 2차 HGO를 다음과 같이 결정한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 / \epsilon \\ \dot{\xi}_2 &= -d_1 \xi_2 - \xi_1 + y(t) \end{aligned} \quad (34)$$

그리고 관측오차 벡터와 추종오차벡터는  $\hat{\mathbf{z}} = [z_1, \xi_2 / \epsilon]^T$ ,  $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{y}_d$ 이다. 제어입력과 적응칙은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} u &= -k\hat{s} - \hat{\mathbf{w}}^T \Phi(\mathbf{x}_{in}), \quad \mathbf{x}_{in} = [x_1, x_2, \hat{v}]^T \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}} &= \gamma(\hat{s}\Phi - \sigma_s |\hat{s}| \hat{\mathbf{w}}) \end{aligned} \quad (35)$$

여기서  $\hat{s} = [1 \quad \lambda] \hat{\mathbf{e}}$  이고  $\hat{v} = \ddot{y}_d + [0 \quad \lambda] \hat{\mathbf{e}}$ 이다. 제안된 알고리즘은 3개의 입력을 가지는 하나의 RBFN만 사용되며 RBF의 미분항 같은 계산식은 필요치 않다. 한 가지 강조할 점은 제안된 제어기는 계통의 차수가 증가할 때 변하는 점은 HGO의 차수의 증가와 RBFN의 입력벡터의 개수가 증가하는 정도로서 백스테핑 기반의 제어기의 계산량이 지수함수적으로 증가한다는 점에 대비된다. 제어기의 설계상수값은  $\lambda = 2$ ,  $k = 10$ ,  $\gamma = 20$ ,  $\epsilon_w = 6$ 이고 관측기의 설계상수값은  $\epsilon = 0.01$ ,  $d_1 = 2$ 이다. 몇 번의 모의실험을 거쳐서 RBF함수의 개수는 36개로 선정했다. 그 중심값은  $[-5, 5] \times [-5, 5] \times [-10, 50]$ 의 공간에 균일하게 분포되도록 선정했으며  $x_1, x_2, \hat{v}$ 에 대응하는 가우시안 함수의 개수는 각각 3, 3, 4개이다.  $\hat{\mathbf{w}}$ 와 HGO의 초기값은 모두 0이다. 모의실험 결과

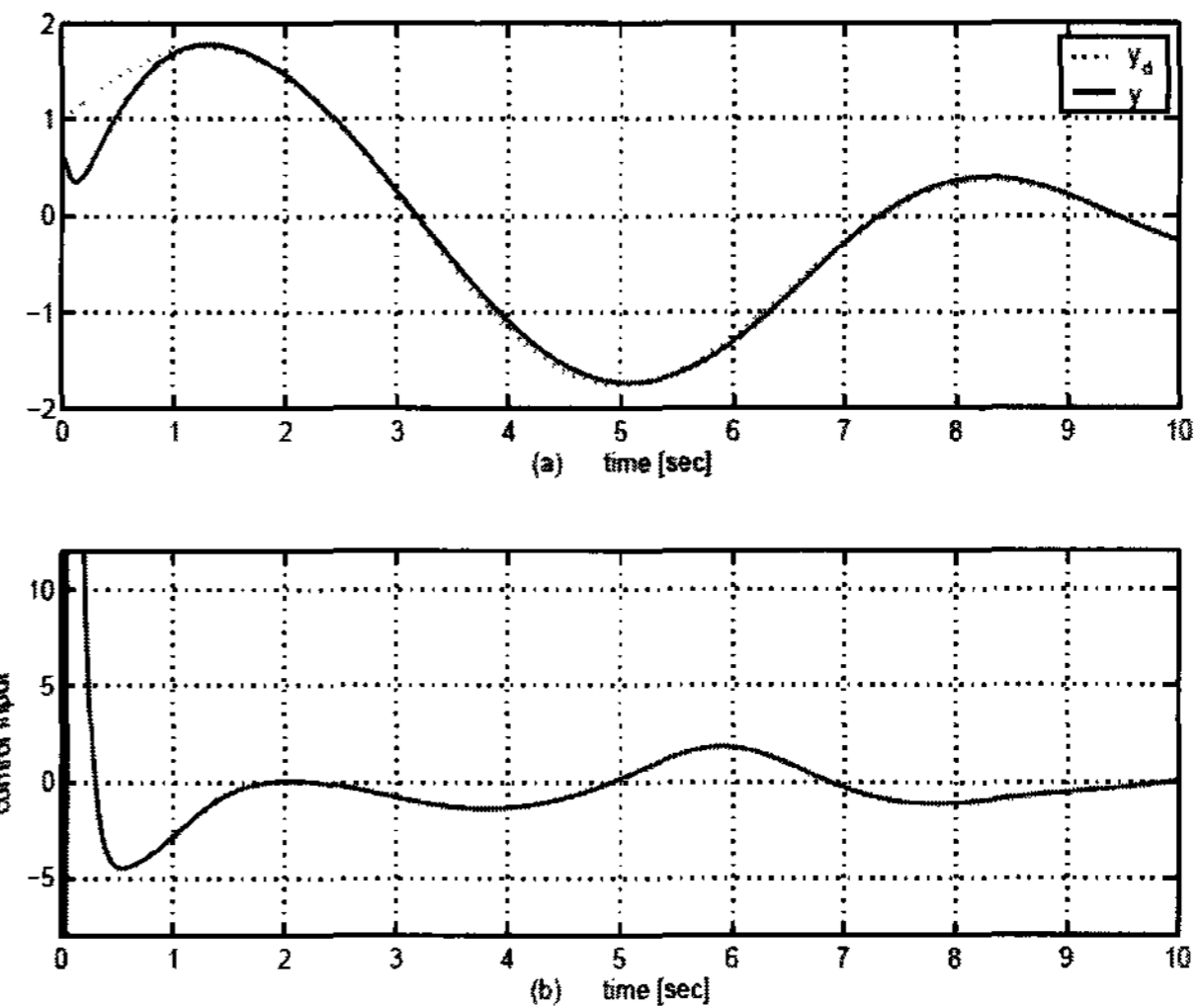


그림 1 모의실험 결과 (a) 계통의 출력  $y$ 와  $y_d$  (b) 제어입력  $u$ .

Fig. 1 Simulation result : (a) system output  $y$  and  $y_d$  (b) control input  $u$ .

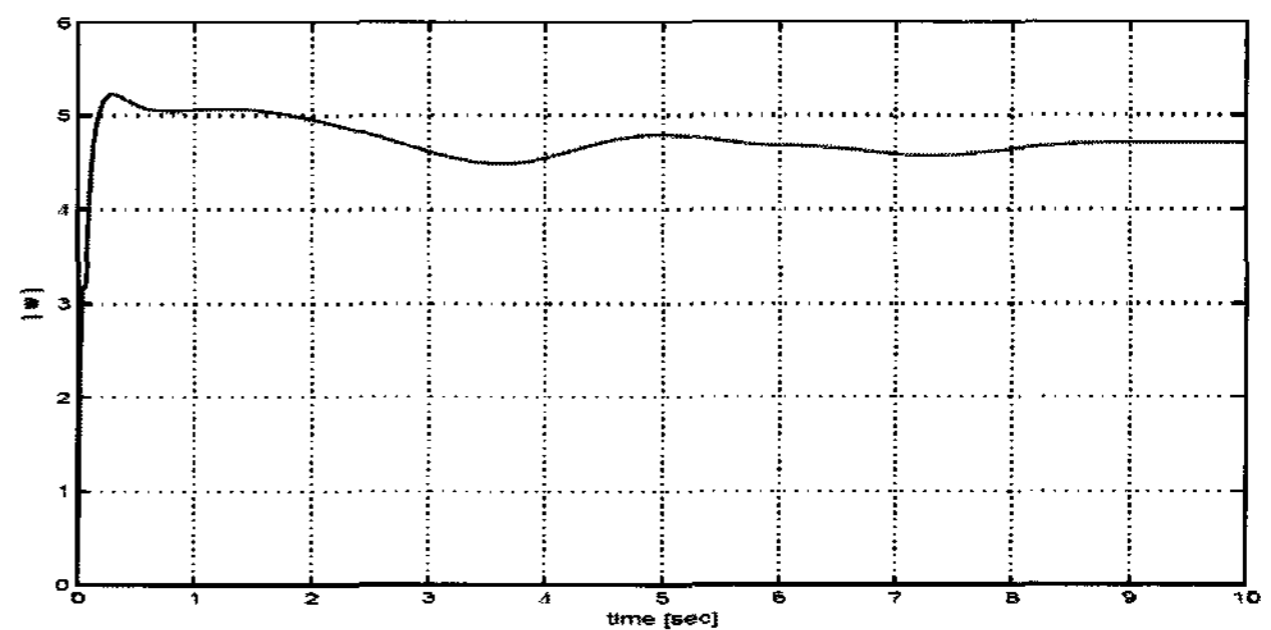


그림 2  $|\hat{\mathbf{w}}|$ 의 궤적.

Fig. 2 Trajectory of  $|\hat{\mathbf{w}}|$ .

는 그림 1과 그림 2에 도시하였으며 이 그림으로부터 제안된 제어기가 만족할 만한 성능을 보여줌을 확인할 수 있다.

#### 5. 결 론

본 논문은 불확실한 순회환 비선형 계통에 대한 새로운 적응 신경망 제어기를 제안하였다. 제안된 제어 알고리즘의 가장 주요한 개념은 순회환 비선형 계통의 상태변수 궤환 제어문제가 정규식의 출력궤환 제어문제로 바꾸어 기술될 수 있다는 점이며 이러한 사실에 기인하여 제어기를 설계하는 데 있어서 백스테핑을 회피할 수 있었다. 본 논문에서는 기존의 백스테핑 기반의 적응 신경망 제어기에 비해서 제어법칙과 안정도 해석이 현저히 간단하다는 사실을 보였다. 또한  $n+1$ 개의 입력을 가지는 단 하나의 RBFN을 사용하여 계통에 내재된 미지함수를 추정하고 상쇄하는데 사용하며 이 또한 제안된 알고리즘의 간결성을 보여주는 것이다.

### 감사의 글

이 논문은 2006년도 정부재원(교육인적자원부 학술 연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음. (KRF-2006-003-D00182)

### 참 고 문 헌

- [1] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. A Wiley-Interscience publication, 1995.
- [2] J.-H. Park and G.-T. Park, "Robust adaptive fuzzy controller for nonaffine nonlinear systems with dynamic rule activation," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, no. 2, pp. 117-139, 2003.
- [3] J.-H. Park, S.-H. Huh, S.-H. Kim, S.-J. Seo, G.-T. Park, "Direct adaptive controller for nonaffine nonlinear systems using self-structuring neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 16, no. 2, pp. 414-422, 2005.
- [4] S. S. Ge and C. C. Hang and T. Zhang, "Adaptive neural network control of nonlinear systems by state and output feedback," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, vol. 29, no. 6, pp. 818-828, 1999.
- [5] M. U. Polycarpou and M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 3, pp. 363-384, 1998.
- [6] Y. Li, S. Qiang, X. Zhuang, O. Kaynak, "Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using rbf neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 15, no. 3, pp. 693-7001, 2004.
- [7] D. Wang, J. Huang, "Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form," *Automatica*, vol. 38, pp. 1365-1372, 2002.
- [8] S. S. Ge, C. Wang, "Direct adaptive NN control of a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 13, no. 1, pp. 214-221, 2002.
- [9] ---, "Adaptive nn control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 671-682, 2002.
- [10] J. Q. Gong, B. Yao, "Neural network adaptive robust control of nonlinear systems in semi-strict feedback form," *Automatica*, vol. 37, pp. 1149-1160, 2001.
- [11] D. M. Dawson, J. J. Carroll, and M. Schneider, "Integrator backstepping control of a brush dc motor turning a rogotic load," *IEEE Trans. System, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, vol. 2, pp. 233-244, 1994.
- [12] S. Behatsh, "Robust output tracking for nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1381-1407, 1990.
- [13] S. N. Huang, K. K. Tan, and T. H. Lee, "Futher results on adaptive control for a class of nonlinear systems using neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 14, no. 3, pp. 719-722, 2003.
- [14] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1996.

### 저 자 소 개



#### 박 장 현 (朴 張 鉉)

1972년 1월 24일생. 1995년 고려대학교 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 현재 목포대학교 전기제어신소재공학부 제어시스템공학전공 조교수. 관심분야는 지능제어, 비선형 적응제어, 마이크로프로세서 응용.



#### 김 성 환 (金 成 煥)

1991년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1995년 2월 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1998년 8월 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 현 목포대 공대 전기제어신소재공학부 제어시스템공학전공 부교수. 관심분야는 지능제어, AC전동기제어, DSP응용



#### 박 영 환 (朴 永 煥)

1961년 1월 28일생. 1986년 고려대학교 전기공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 현재 충주대학교 정보제어공학과 부교수.