

불연속 섬유강화 고분자 복합재료의 응력해석에 관한 연구

김홍건*

(논문접수일 2008. 2. 15, 심사완료일 2008. 4. 3)

A Study on the Stress Analysis of Discontinuous Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites

H. G. Kim*

Abstract

A composite mechanics for discontinuous fiber reinforced polymer matrix composites(PMC) is analysed in order to predict fiber axial stresses. In continuum approach, frictional slip which usually takes place between fibers and polymers is accounted to derive PMC equations. The interfacial friction stress is treated by the product of the coefficient of friction and the compressive stress normal to the fiber/matrix interface. The residual stress and the Poisson's contraction implemented by the rule of mixture(ROM) are considered for the compressive stress normal to the fiber/matrix interface. In addition, the effects of fiber aspect ratio and fiber volume fraction on fiber axial stresses are evaluated using the derived equations. Results are illustrated numerically using the present equations with reasonable materials data. It is found that the fiber axial stress in the center region shows no great discrepancy for different fiber aspect ratios and fiber volume fractions while some discrepancies are shown in the fiber end region.

Key Words : Composite(복합재료), Polymer(고분자), Fiber(화이버), Matrix(모재), Residual stress(잔류응력), Slip(슬립)

1. 서론

유기체 고분자 화합물인 섬유강화 플라스틱(Fiber Reinforced Plastics : FRP)은 경량에 비해 강도가 큰 장점이 있으며 또 성형가공성이 매우 크다^(1,2). 특히 유리섬유 강화 플라스틱(Glass Fiber Reinforced Plastics : GFRP)가 공업재료로서 필수불가결한 것이 된 것도 본래 플라스틱재료가 갖고 있는

가공성의 장점을 발휘했기 때문이다. 탄소섬유강화 플라스틱(Carbon Fiber Reinforced Plastics : CFRP), 아라미드섬유 강화 플라스틱(Aramid Fiber Reinforced Plastics : ArFRP) 등의 복합재료도 기본적으로는 GFRP와 동일 성형방법의 채용이 가능하다. 일반적으로 FRP는 기지수지(축매, 축진제, 경화제 등의 반응 개시제를 포함), 강화섬유 및 부자재로서 구성된다. 이들은 어떤 것이든 성형시 일체화되는 일이 많

* 전주대학교 기계자동차공학과 (hkim@jj.ac.kr)
주소: 560-759 전북 전주시 완산구 효자동3가 1200번지

은데, 기계성형에서는 미리 혼합해 두는 일도 많으며 이러한 것을 성형재료(molding compound)라고 부른다. 고분자 복합체의 강화 과정을 이해하는 것은 양질의 복합재료를 생산하는데 매우 중요하다. 피로 메커니즘과 함께 복합재료의 강화과정에 대한 지식은 강성과 강도를 위한 복합재료의 최적 설계 개발을 촉진시켰다. 일반적으로 단섬유와 모재 사이의 상호작용은 매우 복잡하며 불완전하게 이해되고 있는 경우가 많다. 불연속 섬유 중 MMC(Metal Matrix Composite)와 같은 단섬유 복합체에 있어서의 응력전달 메커니즘은 최근 많은 연구자들에 의해 계산식이 정립되어 왔다⁽³⁻⁹⁾.

그러나 PMC의 경우, 보강재와 모재의 접착력이 경우에 따라 다르기 때문에 계산식에서 반드시 고려되어야 하며 이 논문에서는 이러한 접착력을 미지수로 한 PMC에서의 보강재 응력을 예측하기 위한 정식화를 수행하였다. 결국 보강재의 응력을 간단하면서도 정확하게 예측함으로써 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 계산하였다. 그리고 보강재와 모재의 열팽창계수 차이로 인해 복합재료 제작시 발생하는 열응력은 잔류응력으로 존재하게 되며 이 잔류응력을 고려한 모델링을 수행하였으며 Poisson 효과로 인한 마찰력 계산시 보강재와 모재의 혼합물의 법칙(ROM)을 적용하였다. 모델링을 위한 대표모델(Representative Volume Element : RVE)은 축대칭 모델을 사용하였으며 이 모델의 개념은 종전의 연구내용과 동일하다^(10,11). 또 정식화된 방정식을 이용하여 탄소-에폭시 시스템의 수치예제를 적용함으로써 응력계산 절차를 상세히 묘사하였으며 보강재의 종횡비 및 체적함유율이 보강재 응력에 미치는 영향을 조사하였다.

2. 이론 해석

2.1 불연속 복합재료역학 일반식

본 이론의 미세구조역학적 모델은 보강재는 탄성적 거동, 그리고 모재(matrix)는 탄소성적으로 거동하고 있다고 가정하고 계면에서 슬립이 발생되며 동시에 보강재(fiber reinforcement)로부터 모재로 응력이 전달된다고 가정한다. 또 각 보강재는 Fig. 1에서처럼 정육각형으로 규칙적으로 다른 보강재들에 의하여 둘러싸여 있다고 가정한다. 이 때 Fig. 1에서 보강재의 반경은 r_f 이고 대표모델(RVE)의 반경은 R 로 한다. 그리고 보강재의 변형률은 ϵ_f , 모재의 변형률은 ϵ_m , 복합체의 변형률은 ϵ_c 로 하고 보강재 중심으로부터 임의의 반지름 r 에 관한 함수로써 축대칭의 응력분포를 가진다. 즉, 모재의 변형율과 전단응력 τ 는 보강재 축에 대하여 축대칭이 되며 보강재 표면($r = r_f$)에서의 평형 방정식은 다음의 식 (1)과 같이 된다.

$$\tau = \tau_s \frac{r_f}{r} \tag{1}$$

여기서 τ_s 는 계면에서의 전단응력을 의미한다. 여기서 RVE를 묘사하면 Fig. 2와 같다. Fig. 2 (a)는 불연속섬유 고분자 복합재료 모델에서의 하중 전의 상태, Fig. 2 (b)는 하중을 가한 상태를 각각 나타낸다. 이 때 축방향은 z 축이 되고 보강재의 길이는 $2l$, RVE의 길이는 $2L$ 이 된다.

한편 보강재의 응력을 σ_f 라 하면 보강재/모재 계면에서의

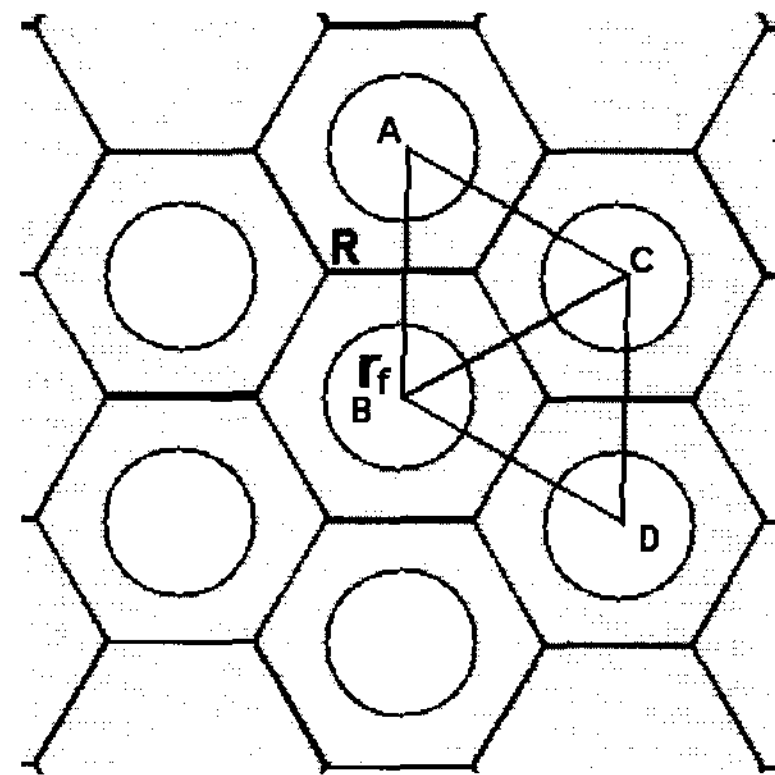


Fig. 1 Fiber packing model in the matrix. Fibers show hexagonally-packed regularly spaced arrangement

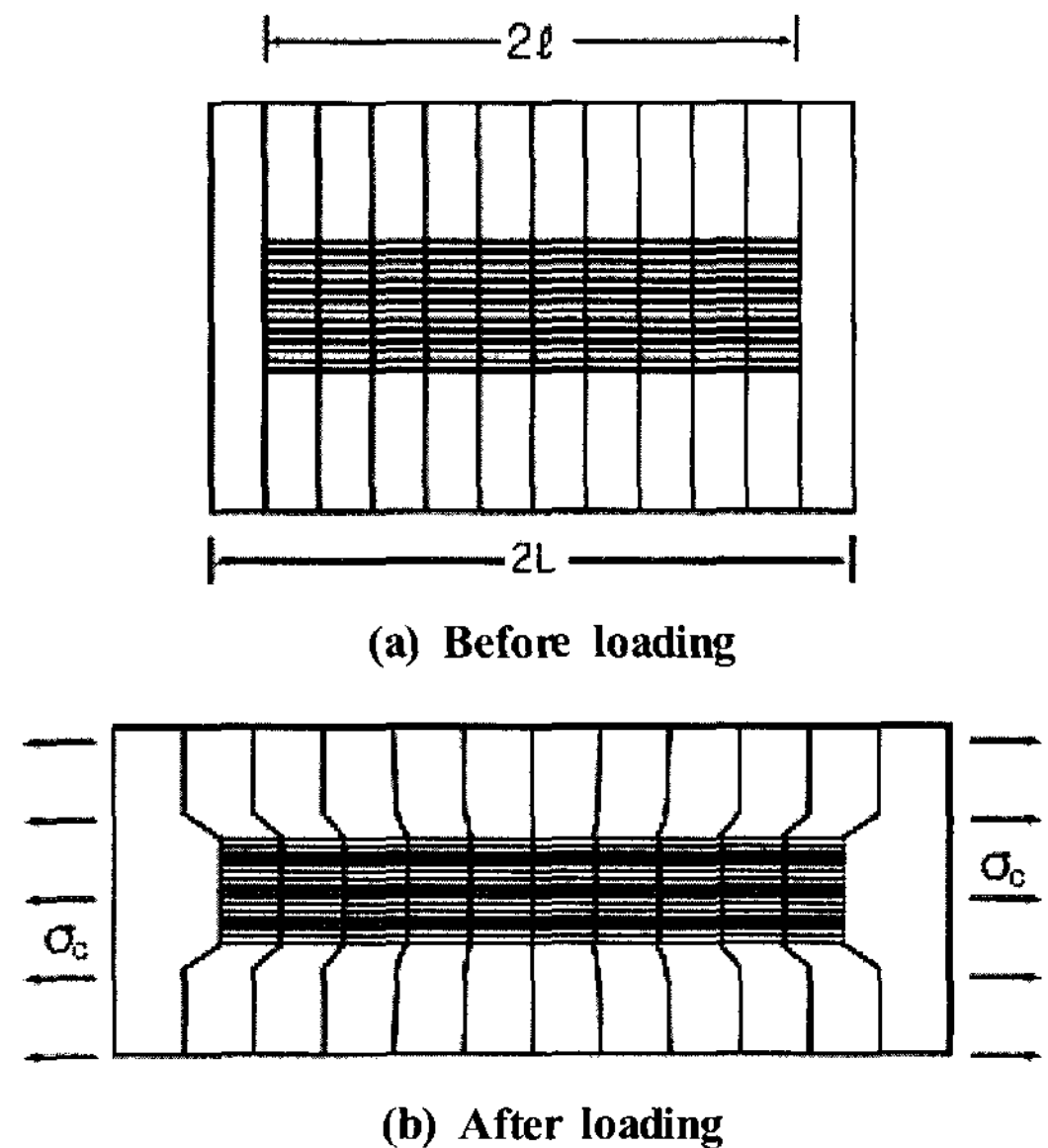


Fig. 2 Single fiber composite unit cell(RVE) for imperfectly bonded reinforced polymers

전단응력과 보강재의 내부응력과 평형 방정식은 식 (2)와 같이 유도된다^(3,7,11).

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = -\frac{2\tau_s}{r_f} \quad (2)$$

따라서 식 (1) 및 식 (2)를 이용하여 지배방정식을 세우면 다음의 식 (3)과 같이 된다.

$$\frac{d^2\sigma_f}{dz^2} = \frac{n^2}{r_f^2}(\sigma_f - E_f\epsilon_c) \quad (3)$$

여기서 E 는 탄성계수로서 하첨자 f, m 및 c 는 각각 보강재(화이버), 모재 및 복합체를 의미한다. 또 식 (3)에서의 n 은 무차원 계수로서 이는 식 (4)를 의미한다.

$$n^2 = \frac{2E_m}{E_f(1+\nu_m)\ln(P_f/V_f)} \quad (4)$$

여기서 ν_m 은 모재의 포아송비이고, P_f 는 Packing Factor, V_f 는 보강재 체적함유율을 의미한다. 단, $G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$ 이고 $V_f = 1 - V_m$ 이다. 또 P_f 는 보강재의 배열방식에 따라 다르며 본 논문에서 채택한 육각배열시 식 (5)와 같이 된다⁽¹¹⁾.

$$P_f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

식 (3)의 해를 구하기 위한 경계조건은 $z = \pm l$ 일 때 $\sigma_f = 0$ 으로 설정하였다. 이는 모재에서 보강재 단을 가로질러 하중이 전달되지 않음을 의미한다. 이에 의한 해를 구하면 식 (6)과 같이 된다.

$$\sigma_f = E_f\epsilon_c \left\{ 1 - \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(ns)} \right\} \quad (6)$$

단, $s = \frac{l}{r_f}$ (보강재의 종횡비) 이다. 이를 식 (2)에 대입하여 정리하면 식 (7)이 유도된다.

$$\tau_s = \frac{nE_f\epsilon_c \sinh(nz/r_f)}{2\cosh(ns)} \quad (7)$$

2.2 불연속 고분자 복합재료역학 정식화

보강재의 재료로써 일반적으로 사용되는 세라믹 재료와 모재인 고분자 재료와의 접착은 잘 결합된 강화금속과는 달리 통상 마찰슬립(frictional slip)이 발생한다. 특히 최근 들

어 보강재의 재료로써 많이 사용되는 탄소섬유(carbon fiber)와 같은 비활성 보강재에서는 반드시 미약한 계면 접착효과를 고려해야 한다. 불완전한 접착효과를 고려해 보면 슬립의 시작 즉, 슬립점이 매우 중요하다. 접착이 완전할 때, 슬립점에서 변형률 ϵ_{cs} 는 $z=l$ 에서 $\tau_{s\max} = \tau_{my}$ 이 되며 따라서 식 (7)로부터 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_{cs} = \frac{2\tau_{my}\coth(ns)}{nE_f} \quad (8)$$

여기서 τ_{my} 는 모재의 전단항복응력이다. 그러나 계면접착이 불완전할 때는 Fig. 3에서 보이는 바와 같이 무차원 매개변수 λ 를 사용해야 하며 이는 1을 초과할 수 없다. 슬립점에서 $\tau_{s\max}$ 값은 다음의 식 (9)와 같이 된다.

$$\tau_{s\max} = \lambda\tau_{my} = \frac{1}{2}nE_f\epsilon_{cs}\tanh(ns) \quad (9)$$

한편, 보강재에서 슬립이 발생하는 부분을 m 으로 표시하면 $z = \pm l(1-m)$ 에서 슬립이 없는 보강재 중앙 부분의 응력 σ_{fc} 의 도함수 값은 약한 접착력(Poor Adhesion)으로 인하여 감소하게 된다. 따라서 식 (2)는 다음의 식 (10)과 같이 된다.

$$\frac{d\sigma_{fc}}{dz} = -\frac{2\lambda\tau_{my}}{r_f} \quad (10)$$

한편 계면에서의 접착력이 완전할 때, 즉 $\lambda=1$ 일 때의 보강재 중심부 응력은 식 (11)과 같이 된다.

$$\sigma_{fc} = E_f\epsilon_c + (\sigma_{f_l} - E_f\epsilon_c) \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(ns)} \quad (11)$$

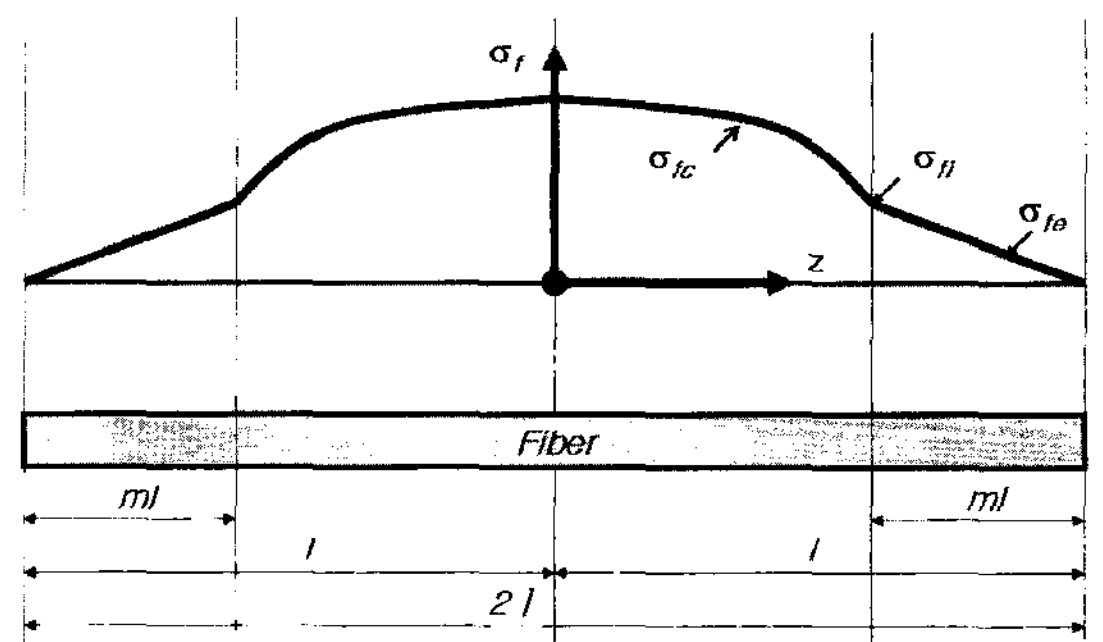


Fig. 3 Schematic of fiber stress and fiber/matrix interfacial shear stress

여기서 계면접촉 효과를 고려하면 식 (11)은 다음의 식 (12)와 같이 된다.

$$\sigma_{fc} = \lambda E_f \epsilon_c + (\sigma_{fi} - \lambda E_f \epsilon_c) \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(n\bar{s})} \quad (12)$$

또 $z = \pm l(1-m)$ 일 때 식 (12)를 미분하여 식 (10)에 대입하면 식 (13)이 된다.

$$\sigma_{fi} - \lambda E_f \epsilon_c = -\frac{2\lambda\tau_{my}}{n} \coth(n\bar{s}) \quad (13)$$

여기서 $\bar{s} = s(1-m)$ 이다. 또 계면접착력이 불완전할 때의 λ 값은 $\lambda < 1$ 이 된다. 따라서 식 (13)을 식 (12)에 대입하여 정리한 후 잔류응력을 추가로 고려하면 보강재 중심부의 응력은 다음의 식 (14)와 같이 된다.

$$\sigma_{fc} = \lambda E_f \epsilon_c - \frac{2\lambda\tau_{my}}{n} \frac{\cosh(nz/r_f)}{\sinh(n\bar{s})} + \sigma_R \quad \text{for } 0 \leq z \leq l(1-m) \quad (14)$$

이들 변화의 효과는 τ_{my} 가 $\lambda\tau_{my}$ 를 갖는 식으로 변환되고 이로 인하여 탄성응력전달은 감소하는 것으로 나타난다. 매우 약한 접착에 대해서, 예를 들어 $\lambda = 10^{-2}$ 인 값에 대해 슬립점에서 응력-변형률은 매우 작다. 이런 경우에 있어서 탄성효과는 무시될 수 있고, 모든 응력-변형률 곡선은 슬립효과를 기초로 하여 계산할 수 있다.

한편 계면마찰은 마찰계수 μ 를 발생시키고 압축응력 σ_r 는 보강재/모재 계면에 수직으로 작용한다. 강화 고분자에 대하여 σ_r 는 복합재료 제조시 냉각에 따른 보강재와 기지의 수축 차이로부터 발생하는 잔류응력 및 하중이 복합재료에 가해질 때 기지의 푸아송 수축으로 인한 응력으로 구성된다. 잔류응력 σ_R 은 제조시의 수축조건으로부터 계산될 수 있다. 기지의 푸아송비에 의한 구속은 원칙적으로 탄성해석에 의하여 결정될 수 있으며 $-\nu_c E_m \epsilon_c$ 으로 표현될 수 있다. 따라서 σ_r 은 다음의 식 (15)와 같이 된다. 여기서 $\nu_c = V_f \nu_f + V_m \nu_m$ 로 가정한다.

$$\sigma_r = \sigma_R - \nu_c E_m \epsilon_c \quad (15)$$

한편 $z = ml$ 부분에서는 슬립이 발생되고 있으며 보강재 양단 부분의 약한 마찰전단응력은 $-\mu\sigma_r$ 이 되고 단지 압축응력 σ_r 이 0보다 작을 경우에 존재한다. 따라서 보강재 양단 부분의 응력 σ_{fe} 의 도함수 값은 식 (2)와 식 (15)로부터 다음

의 식 (16)이 유도된다.

$$\frac{d\sigma_{fe}}{dz} = \frac{2\mu}{r_f} (\sigma_R - \nu_c E_m \epsilon_c) \quad (16)$$

또한 $z=l$ 에서 $\sigma_{fe} = 0$ 이고 이를 적분하면 슬립부에서 보강재 응력은 다음의 식 (17)과 같이 된다.

$$\sigma_{fe} = \frac{2\mu}{r_f} (\nu_c E_m \epsilon_c - \sigma_R)(l-z) \quad \text{for } l(1-m) \leq z \leq l \quad (17)$$

슬립부에서 보강재에 전달되는 경계응력 σ_{fi} 는 식 (17)에서 다음과 같이 정리된다.

$$\sigma_{fi} = 2\mu ms (\nu_c E_m \epsilon_c - \sigma_R) \quad (18)$$

이 때 m 값은 식 (13) 및 식 (18)에서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$m = \frac{n\lambda E_f \epsilon_c - 2\lambda\tau_{my} \coth(n\bar{s})}{2\mu ns (\nu_c E_m \epsilon_c - \sigma_R)} \quad (18)$$

여기서 m 값은 충분히 긴 보강재를 고려할 때 다음과 같은 가정을 세울 수 있다.

$$\coth(n\bar{s}) \approx 1.00 \quad (19)$$

따라서 m 값은 다음의 식 (20)과 같이 정리될 수 있다.

$$m \approx \frac{n\lambda E_f \epsilon_c - 2\lambda\tau_{my}}{2\mu ns (\nu_c E_m \epsilon_c - \sigma_R)} \quad (20)$$

3. 결과 및 고찰

본 연구에서 적용한 재료는 고분자 화합물인 카본-에폭시 (Carbon-Epoxy) 시스템으로 계산하였으며 모재는 에폭시, 보강재는 탄소섬유(stiff carbon fiber)로 하였다. 축방향의 인장하중으로는 $\epsilon_c = 0.4\%$ 로 가하였다. 물성치로서 대표적인 값들은 $E_m = 2.5 \text{ GPa}$, $E_f = 377 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.34$, $\nu_f = 0.16$, $\tau_{my} = 30 \text{ MPa}$, $\mu = 0.2$, $\sigma_R = -15 \text{ MPa}$ 로 적용하였다⁽²⁾. 또 $r_f = 1$, $P_f = 2\pi/\sqrt{3}$ 로 하고 $\lambda = 1$ 가정하였다. 이에 따라 상기의 정식화된 식을 이용하여 카본-에폭시 시스템의 기계적 성질을 예측하였다. 보강재 축방향 응력의 계산에 초점을 맞추었으며 보강재 체적함유율은 V_f 를 20%, 40% 및

60%에 대하여 계산하였고 보강재 종횡비에 대하여는 $s = 200, 500$ 및 1000 에 관하여 각각 검토하였다. 이 때 계산된 n 값, 슬립변형률 ϵ_{cs} 값 및 m 값은 Fig. 4-6과 같이 각각

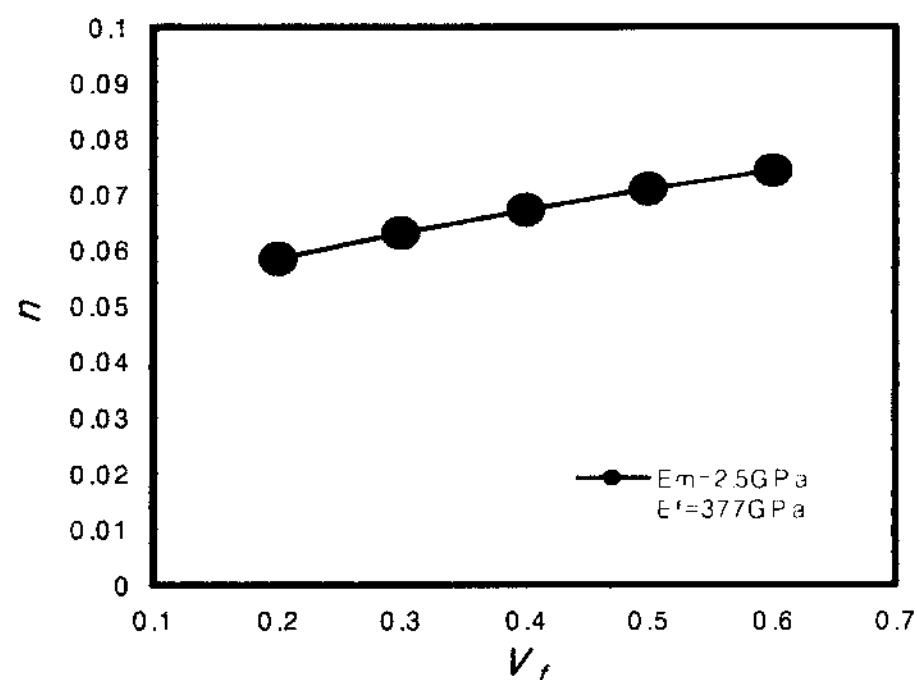


Fig. 4 Dimensionless parameter n value as a function of fiber volume fraction

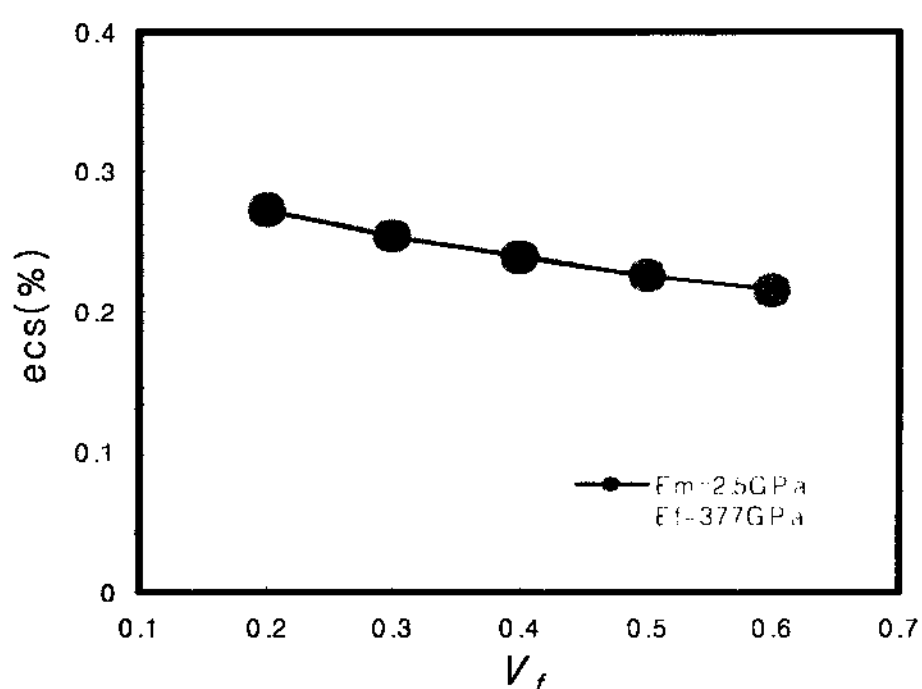


Fig. 5 Composite slip strains as a function of fiber volume fraction

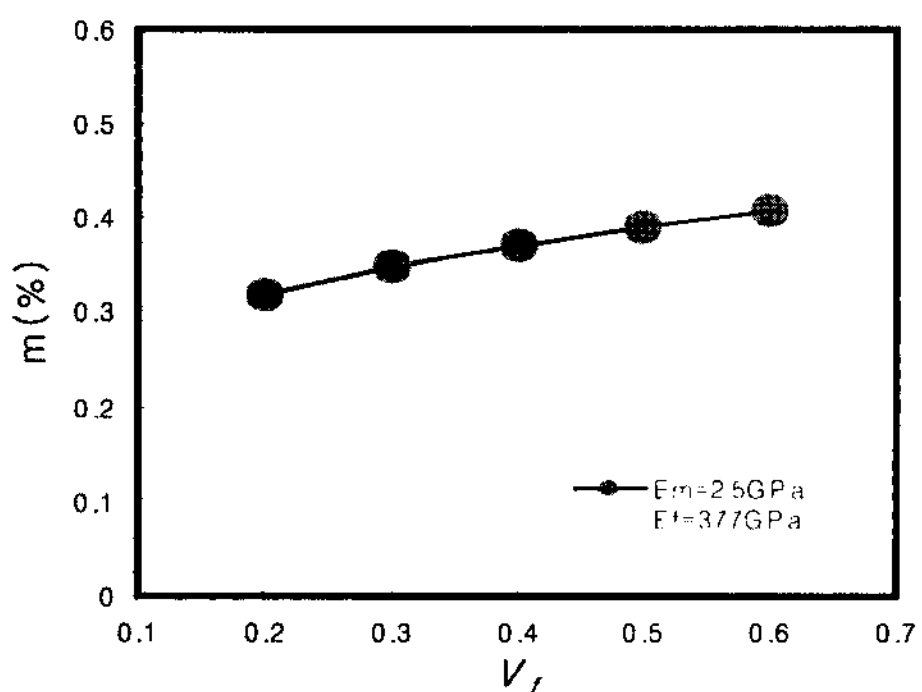


Fig. 6 Slip ratio m value as a function of fiber volume fraction

나타났다.

Fig. 4에서 보이는 바와 같이 무차원 상수 n 값은 0.1 이하의 작은 값으로 계산되며 보강재 체적함유율 V_f 가 증가할수록 비례적으로 증가함을 알 수 있다. 또 Fig. 5에서 보이는 바와 같이 슬립변형률 ϵ_{cs} 값은 보강재 체적함유율 V_f 가 증가할수록 비례적으로 감소함을 알 수 있다. 그리고 Fig. 6에서 보이는 바와 같이 슬립비(slip ratio) m 값도 역시 체적함유율 V_f 가 증가할수록 완만하게 증가함을 알 수 있다.

Fig. 7-9는 보강재 종횡비 $s = 200, 500$ 및 1000 에 관하여

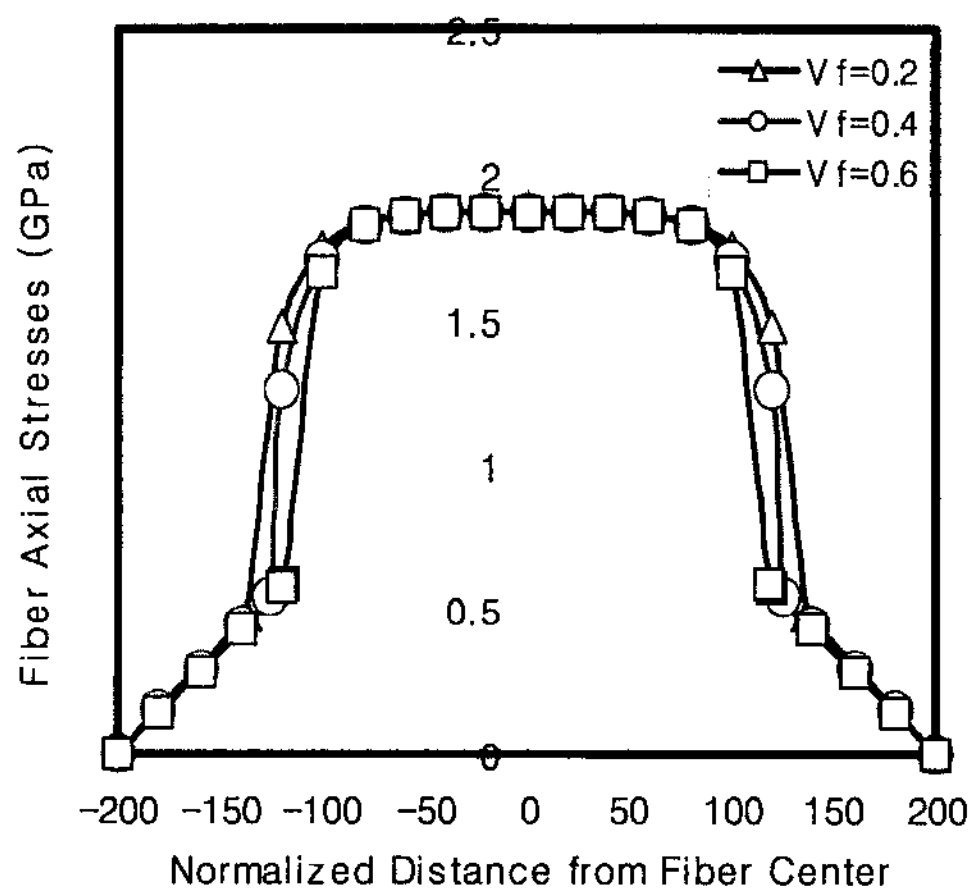


Fig. 7 Fiber axial stresses concerning to normalized distance from fiber center for $s=200$

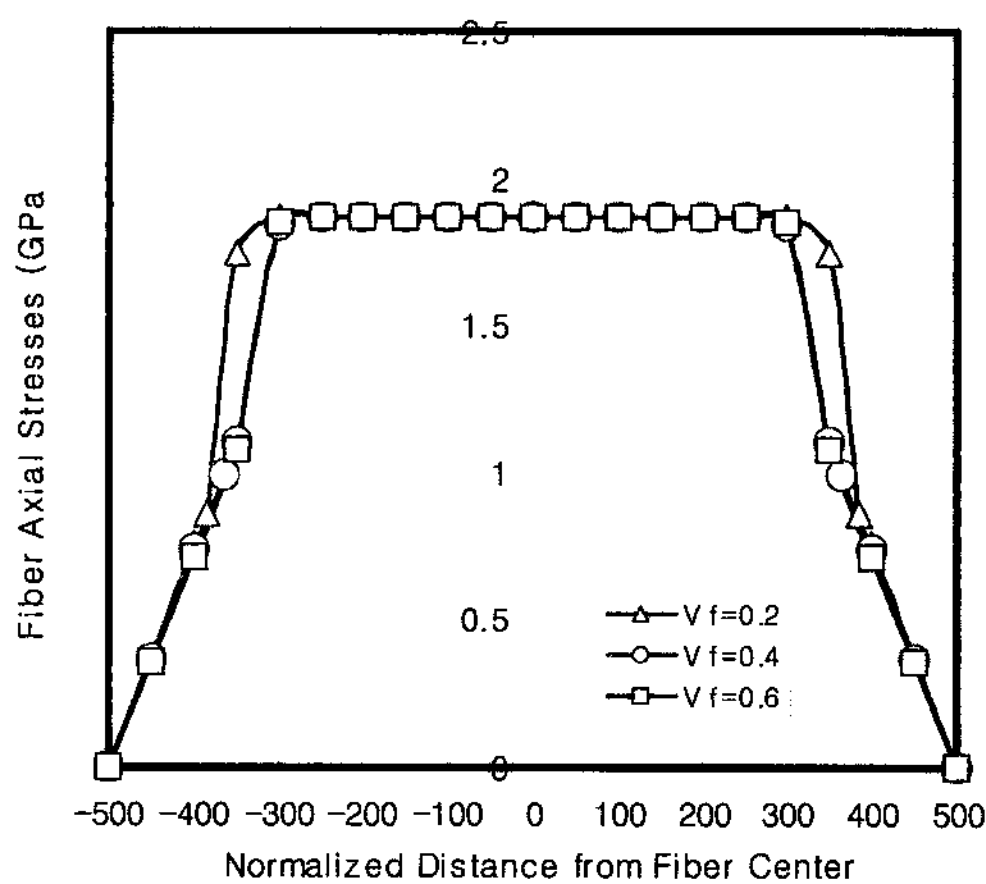


Fig. 8 Fiber axial stresses concerning to normalized distance from fiber center for $s=500$

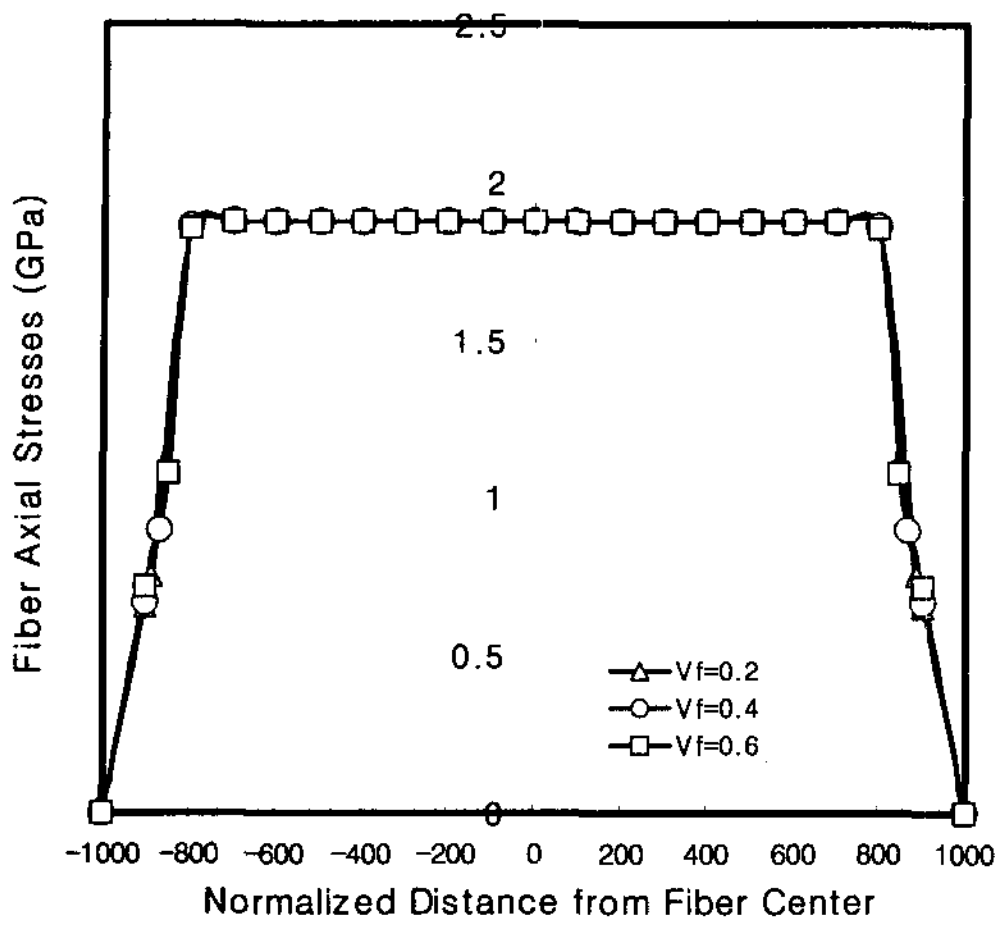


Fig. 9 Fiber axial stresses concerning to normalized distance from fiber center for $s=1000$

보강재 체적함유율을 V_f 를 20%, 40% 및 60%로 변화시킬 때 보강재 응력의 계산결과를 각각 나타내고 있다. 해석결과 모든 경우에 있어서 보강재 체적함유율이 증가할수록 슬립이 더 빠르게 일어남을 알 수 있다.

또 보강재 종횡비가 $s=200$ 일 때와 $s=500$ 일 때는 체적함유율이 변함에 따라 보강재 응력이 다소 변화됨을 알 수 있으나 $s=1000$ 일 경우에는 체적함유율에 따른 보강재 응력이 거의 변하지 않는다는 것을 알 수 있다. 한편, 보강재의 최대응력은 모든 경우에 있어 항상 중앙에서 최대가 됨을 알 수 있으며 그 값은 약 $1.9GPa$ 정도가 됨을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 보강재와 모재의 접착력이 일정하지 않은 PMC에 관하여, 복합강화 메커니즘을 규명하였으며 이러한 접착력을 미지수로 한 보강재 응력을 예측하기 위해 정식화를 유도하였다. 즉, 보강재 응력을 간단하면서도 정확하게 예측함으로써 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 계산하는 방법을 제시하였다. 그리고 보강재와 모재의 열팽창계수 차이로 인해 복합재료 제작시 발생하는 잔류응력을 고려한 모델링을 수행하였으며 Poisson 효과로 인한 마찰력 계산시 보강재와 모재의 혼합물의 법칙을 적용하여 수식화하였다. 또 보강재의 종횡비 및 체적함유율이 보강

재 응력에 미치는 영향을 조사하였다. 이 때 보강재 응력은 보강재 종횡비가 임계종횡비 이상이 되면 큰 변화가 없으며 체적함유율의 영향도 거의 미치지 않는다는 것을 알 수 있었다. 그리고 보강재의 최대응력은 모든 경우에 있어 항상 중앙에서 최대가 되며 그 값은 약 $1.9GPa$ 정도가 됨을 알 수 있었다. 또 슬립비는 보강재 체적함유율이 증가할수록 비례적으로 완만하게 증가함을 알 수 있다.

참고 문헌

- (1) Agarwal, B. D., Lifszitz, J. M., and Broutdman, L. J., 1974, "Elastic-Plastic Element Analysis of Short Fiber Composites," *Fiber Science and Technology*, Vol. 7, pp. 45~62.
- (2) Agarwal, B. D. and Broutman, L. J., 1980, "Analysis and performance of Fiber Composites," *Johns Wiley and Sons*, New York, pp. 71~104.
- (3) Cox, H. L., 1952, "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials," *British Journal of Applied Physics*, Vol. 3, pp. 72~79.
- (4) Nardone, V. C. and Prewo, K. M., 1986, "On the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Composites," *Scripta Metallurgica*, Vol. 20, pp. 43~48.
- (5) Nardone, V. C., 1987, "Assessment of Models used to Predict the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Alloys," *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 1313~1318.
- (6) Taya, M., and Arsenault, R. J., 1987, "A Comparison between a Shear Lag Type Model and an Eshelby Type Model in Predicting the Mechanical Properties of Short Fiber Composite," *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 349~354.
- (7) Kim, H. G., 1998, "Analytical Study on the Elastic-Plastic Transition in Short Fiber Reinforced Composites," *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 2, pp. 257~266.
- (8) Kim, H. G., 1997, "An Investigation of the Thermoelastic Behavior in Short Fiber Reinforced Composite Materials," *Journal of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 6, No. 3, pp.

- 89~95.
- (9) Ryu, S. R. and Lee, D. J., 2001, "Effects of Short Fiber End Shape on Tensile Properties of Reinforced Rubber," *Transactions of KSME, A*, Vol. 25, No. 6, pp. 1023~1030.
- (10) Kim, H. G. and Choi, C. Y., 2003, "A Study on the Tensile Strength of Glass Woven Fiber Reinforced PET Composites," *Journal of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 12, No. 1, pp. 45~49.
- (11) Kim, H. G. and Noh, H. G., 2004, "Effects of Elastic Modulus Ratio on Internal Stresses in Short Fiber Composites," *Journal of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 13, No. 4, pp. 73~78.