韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 05. 제 47권, 제 2호, 113-133

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2008, Vol. 47, No. 2, 113-133

개인차를 고려한 중학교 기하 교수-학습 방법 개발

권 영 인 (경상대학교)
서 보 억 (경북대학교 강사)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학은 현세계를 이해하고 사회에 능동적으로 참여하기 위해 필요 불가결한 과목이다. 수학은 다양한 분야에서 활용될 수 있는 도구적인 측면에서 매우 유용한 교과이다. 따라서 학교에서 수학을 가르치는 것은 매우 중요한 것임에는 분명하다. 수학을 배우는 학생 개개인이 수학을 통해 필요한 지식을 배워야 하고, 수학을 가르치는 교사는 다양한 학생의 요구에 부합되도록 가르쳐야 한다. 이러한 수학교육에서의 수요자의 높은 수준에 대한 고려, 획일적인 수업에서 벗어난 한 개인의 필요를 충족시켜주는 새로운 교육적 패러다임의 등장, 급격한 사회 변화에 능동적으로 대처할 수 있는 창의적 인간의 육성이라는 당면 문제에 부합된 교육을 위해 개인차를 고려한 수학교육이 강조되어지고 있다.

최근 실시한 제 2주기 국제 학력 비교 평가 시험(PISA2003) 결과 '수학적 소양' 분야에서 우리나라는 매우 우수한 결과를 보였다(한국교육과정평가원, 2004). 하지만 '학습 심리적 배경과 수학 성취도' 와 관련된 요소들, 즉, 첫째, 수학 학습 동기, 둘째, 수학에 대한 자아관련 신념, 셋째 수학학습전략 모두에서 매우 부정적인 결과를 보였다. 이와 같은 결과에 대해 다양한 분석이 가능하지만, 한 가지 가능한 결론중의 하나는 수학교육 현장에서 학생 개개인의 심리적인 특성을 고려하지 않은 교육의 결과일 것이다.

* 2008년 1월 투고, 2008년 4월 심사 완료.
* ZDM 분류 : G13
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 기하교육, 개인차, 개인차 변인, 수학적 재능

수학교실에서 가장 어려움 중의 하나는 학습 상황에서의 개인차가 타 교과에 비해 현저하게 두드러진다는 것이다. 결국 이러한 개인차를 극복하는 것은 수학교육에서 가장 당면한 문제라고 볼 수 있다.

수학교육에서의 개인차 문제는 아주 오래된 문제이다. 이러한 문제가 우리나라에서 구체적으로 관심을 가지게 된 계기는 제 7차 교육과정이다. 제 7차 교육과정에서는 '지금까지 학생들 개개인의 학업성취 능력을 고려함이 없이 수학 수업을 진행하여 그들 자신의 능력에 맞지 않은 학습내용을 획일적으로 다루어왔다.' 고 밝히면서 '개인의 능력 수준의 고려, 개인의 능력에 따라 학습할 수 있도록 배려' 한 수학교육을 명시하였다(교육인적자원부, 2007). 또한 개인차를 고려한 수학지도 방법으로 '학생의 개인차에 따른 학습능력을 고려하여 개별화 학습, 소집단 협력학습활동' 을 강조하였다. 또한, 2007년에 발표된 '2007년 개정 교육과정 개요' 에서도 '학생 개인의 학습능력에 따라 자기 주도적 학습을 촉진하는 창의적인 학습 기회를 제공한다.' 고 밝혔다. 또한 '현실 적합한 수준별 수업 방안 구축, 교수-학습 방법으로써 수준별 수업 권장' 을 명시하면서 지속적인 개인차를 고려한 수학교육을 강조하고 있고 개인차를 고려한 교육에 대한 필요성은 더욱 더 강력하게 대두될 것이다.

하지만, 이러한 요구에도 불구하고 학교 교육은 여전히 획일화된 교육을 완전히 벗어났다고 보기 어렵다. 여러 가지 원인이 있겠지만, 학교 현장에서의 개인차를 고려한 학습에 대한 개념, 그리고 개인차를 고려한다고 할 때 고려해야할 대상이 무엇인가에 대한 설정, 개인차를 드러내는 심리적인 특성에 대한 변인과 하위요소의 추출, 실제 수업 현장에서 개인차를 고려한 수업에 활용할 학습 자료의 개발, 개인차를 고려한 수업 방법의 개발 등과 같은 개인차를 고려한 수업을 위한 기본적인 준비가 충분하지 않다. 따라서 이에 대한 구체적이고 체계적

인 연구가 필요한 실정이다. 실제로 개인차와 관련된 선행연구를 종합하면 첫째, 개인차를 고려한 교과서에 대한 연구로 한인기(2004), 권영인·서보억(2005)에 의해 수행되었고, 둘째, 학업성취능력의 차이에 따른 지도방법에 대한 연구가 수행되었고(오세길, 2005), 셋째, 수준별 이동수업과 관련된 연구로 이동수업에 따른 효과에 대한 연구가 수행되었다(김환희, 2006). 이러한 선행연구들은 개인의 심리적 특성인 재능을 고려한 수업을 실현하기에 충분하지 않다.

이상과 같은 필요성에 따라 학교에서 자신의 필요와 재능에 부합되는 수학교육을 실현하기 위해 학습자의 개인차를 고려한 기하 교수-학습 방법의 구체적인 실현 방법을 찾는 것을 본 연구의 목적으로 한다(서보억, 2008).

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위해 다음과 같이 연구 문제를 설정한다.

(연구문제1) 수학교육에서 개인차를 유발하는 개인차 변인은 무엇인가?

(연구문제2) 수학적 재능에 부합되고 개인차에 상응하는 기하 학습은 구체적으로 어떤 학습 방법을 통해 실현될 수 있는가?

Ⅱ. 문헌 검토

본 연구는 개인차를 고려한 구체적인 기하 학습 방법을 개발하는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 이루기 위해 문헌 검토는 다음 두 주제로 나누어 진행한다. 첫째, 개인차에 대한 문헌 연구이다. 둘째, 개인차를 유발하는 변인을 추출하기 위한 문헌 연구이다.

1. 개인차(individual difference)

1) 개인차의 정의와 그 의미

수학 교실에서 동일한 재능을 가진 학생은 단 한 사람도 없을 것이다. 따라서 교육과 관련된 문제에서는 개인차란 말을 자주 사용한다. 개인차에 대한 사전적 의미로는 '각 개인의 신체적, 정신적 성능의 차이' 라고 정의하고 있고, 심리학적 측면에서는 '집단을 구성하는 개인과 개인 사이에 발견되거나 나타나는 신체적 조건, 지능, 능력, 학업성취, 흥미, 취미 등의 차이' 로 정의하고 있다 (한글학회, 1992).

인간의 개인차에 관한 초기 작업은 대부분 인간의 능력의 차이를 밝혀내는 데 집중되었지만, 최근에는 개인차 연구영역이 확대되어 개성, 감성, 동기, 환경적인 측면에까지 확대되었다. 또한, 이러한 '능력' 을 보는 관점에도 큰 변화가 생겼다. 초기에는 주로 성취결과의 차이에만 집중하였지만 지금은 사고과정에 더 많은 관심을 가진다. 왜냐하면 사고의 개인적 특성, 즉 개인차는 과제를 수행하는 사고과정에서 드러나기 때문이다(한인기, 2006). 실제로 Rubinstein은 결과보다 오히려 사고활동의 과정이 더 중요한 연구문제라고 지적하였다(Krutetskii 1969, 12쪽 재인용). 또한 Krutetskii(1976)는 이러한 사고과정에서 발생하는 개인차를 연구하는 것이 바로 재능의 문제로 보았고, 개인차의 문제를 재능의 문제로 귀결시켰다.

2) 재능과 개인차

재능에 대한 연구는 사고과정에서 발생하는 개인차를 연구하는 가장 대표적인 연구영역이다. 따라서 재능에 대해 구체적으로 살펴볼 필요가 있다.

첫째, Rubinstein은 재능을 '인간 사회의 역사적 발달과정에서 축적된 사회적으로 유용한 어떤 활동의 성공적인 수행과 관련된 인간의 특성' 이라고 하였다(한인기 2006, 21쪽 재인용).

둘째, Petrovsky는 주어진 활동의 성공적인 수행의 조건이 되며 활동의 수행에 필요한 지식, 기능, 능력 등의 획득과정에서 차이를 유발시키는 개인적-심리적인 특성을 재능이라고 보고 있다(Petrovsky, 1993).

셋째, Vygotsky는 재능에 대해, 어떤 학생이 문제를 푸는데 실패하였다면 이것은 그 학생의 재능에 대해 어떤 것도 말해 줄 수 없다고 말한다(Vygotsky, 2000). 학생의 지적인 계발은 혼자서 이루어지는 것이 아니라, 학생과 성인(교사)의 계속적인 의사소통을 통해서 이루어진다. 그러므로 지금은 학생이 스스로 하지 못하지만, 곧 어른의 도움을 받아 할 수 있게 될 수도 있다. 따라서

재능이라는 것은 스스로 문제를 푼 결과에 의해서가 아니라 스스로의 풀이와 교사의 도움에 의한 풀이 사이의 차이에 대한 이해가 재능의 중요한 부분이 된다고 보았다.

넷째, Teplov는 모든 사람이 동등하게 가지고 있는 것을 재능이라고 부르지는 않았고, 개인적이고 심리적인 특성들 중에서 어떤 활동의 성공적인 수행에 관련된 특성만을 재능이라고 생각하였다.

2. 수학적 재능

1) 수학적 재능에 대한 여러 견해

앞에서 언급하였듯이 수학에서의 개인차는 바로 개인의 재능의 차이로 인식하는 것이 타당하다. 수학을 잘하는 학생은 수학에 재능이 많다고 말하지만 수학을 잘 못하는 학생은 재능이 부족하다고 말한다. 모든 사람이 모든 방향에서 같은 발달 정도를 보이고 활동의 수행에서 같은 잠재능력을 소유한다면 재능에 대해 논의할 것이 아무것도 없을 것이다. 재능을 얘기할 때 사람들 간에 어떤 개인적 차이가 존재함을 미리 가정하고 있다. 모든 사람이 어떤 일을 할 수 있는 능력을 가지고 있지만 할 수 있는 정도에는 차이가 있다. 게다가 다른 모든 조건이 일정한 상황에서 동일한 연습과 동일한 교수방법에 의해서 본질적으로 서로 다른 학습의 결과를 나타내게 된다면 이러한 차이는 학생의 개개인의 재능의 차이로 받아들일 수 밖에 없을 것이다.

여기서 여러 학자 Werdelin(1958), Hadamard(1945), Poincaré(1983) 등의 연구결과와 Duncker(1945)를 비롯한 형태주의 심리학자들의 연구결과와 Krutetskii(1969) 등 러시아 심리학자들의 연구결과들을 요약하여 수학적 재능의 구성요소에 대해 정리하면 다음과 같다.

첫째, Werdelin은 수학적 재능이란 수학적인 기호나 방법을 문제 상황에서 적용하고, 기억하고, 이해하는 것과 관련이 있는 것이라고 하면서 수학적 재능에 대해 '수학적인 또는 그와 유사한 문제, 기호, 방법 등을 이해하는 능력, 그것들을 배우고 기억하고 재생하는 능력, 그것들과 또 다른 문제, 기호, 방법, 증명 등과 결합시키는 능력, 수학적인 또는 그와 유사한 문제들을 해결할 때 그러한 것들을 사용하는 능력' 으로 구분하였다.

둘째, Hadamard와 Poincaré의 이론으로부터 수학적 재능에 대한 중요한 시사점은 개인차는 문제해결의 사고과정에서 드러나고 관찰된다는 것이다. 또한 사실로부터 법칙으로 옮겨 가는 것과 법칙으로부터 사실을 탐구하는 것이 수학적 사고활동이라고 언급함으로써 수학적 사실을 일반화하고, 일반화된 사실에 적용할 수 있는 재능을 중요하게 생각하였다. 마지막으로 기억에 대해 수량적인 정보에 대한 막연한 기억이 아니라 문제의 본질에 대한 구조적인 기억을 할 수 있는 재능을 언급하였다.

셋째, 수학적 재능에 대해 Ruthe(Krutetskii 1975, 37쪽 재인용)는 '추상화', '공간적 개념', '사고에 관한 자질', '연역적 능력', '공간적 산술적인 관계', '강력한 집중력'을 수학적 재능을 구성하는 구성요소로 제시하였다.

넷째, 형태심리학자들에 의한 수학적 재능에 대한 연구에 의하면 문제를 푸는 과정은 역동적인 사고과정으로 보고 이것을 재능의 중요한 부분으로 보았다. 특히, Duncker는 수학적 재능에서 개인차에 대해 실행 가능한 해법을 얻기 위해서는 문제에 대한 일련의 재조직의 과정이 필요한데 재능이 많은 사람들과 그렇지 않은 사람들 사이의 가장 커다란 차이는 이러한 재조직의 용이함이라고 언급하였다. Duncker는 빈약한 수학자들은 생각이 고정되어 유연성이 부족하다고 보고 있다. 또한 Duncker는 구체적 사실로부터 일반성을 발견하는데 필수적인 지각 능력에는 개인차가 있다고 보았다.

다섯째, 수학적인 재능에 대한 러시아 심리학자들의 연구이다. Kolmogorov는 수학적인 재능의 구성요소로서 알고리즘적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면으로 구분하였다(한인기, 2001). 또한, Krutetskii는 재능의 구성요소로 '문제해결을 위한 초기 방향설정의 재능, 수학적 대상과 관계, 조작을 일반화하는 재능, 수학적 추론과 연산에서 사고과정을 단축하는 재능, 사고과정의 유연성에 대한 재능, 풀이에서의 명료함과 간단함, 우아성에 대한 재능, 수학적 추론에서 사고과정의 역행성에 대한 재능, 정보에 대한 기억 재능' 으로 세분화하였다.

2) 수학적 재능의 구체적 고찰

수학적 재능에 대한 다양한 문헌 검토로부터 다양한 요소들에 대해 언급하였다. 각각의 구성요소에 대한 구체적인 연구결과를 개인차에 대해 종합적으로 연구한

Krutetskii를 중심으로 구체적으로 고찰해 보자.

(1) 수학적 정보의 수집과 이들의 관련성 파악에서의 개인의 심리적 특성

수학적 정보를 수집하는 것의 궁극적인 목적은 주어진 문제의 구조를 파악하는 것이다. 문제의 구조를 파악하기 위한 개인의 심리적 특성은 다음 세 가지로 세분하여 생각할 수 있다.

첫째, 분석-종합적인 지각이다. 정보를 수집하는 과정에서 수학적인 자료는 먼저 분석적으로 지각한다.

둘째, 문제 지각에서의 단축성이다. 재능이 많은 학생들은 문제의 지각과정에서 단축적인 성격을 띄며, 많은 경우에 지각과 동시에 문제의 구조 파악이 이루어지는 경향이 있다. 반면, 평균적인 학생들은 문제의 구조를 지각하는 것은 분석-종합적인 과정을 통해 나타난다.

셋째, 정보수집에서 방향설정의 도구적인 성격이다. 재능이 많은 학생에게 방향설정은 항상 도구적인 성격을 지니고 있다. 이러한 방향설정은 문제의 특성들을 확인하고 다른 문제들로부터 주어진 유형의 문제를 식별하는 가능성 뿐 아니라 이후의 문제해결을 위한 적극적인 행동의 가능성을 제시한다. 재능이 적은 학생들의 방향설정은 주어진 문제를 인식하여 다른 문제들과 구별하도록 하는 징표들의 추출을 지향한다. 그리하여 주어진 문제를 다른 문제들과 구별할 수는 있지만 이들 문제의 해결을 위한 행동에서 어떤 차이가 있어야 하는가에 대해서는 알지 못한다.

(2) 일반화와 다양한 적용 및 증명에서의 개인의 심리적 특성

일반화는 주어진 문제에 대한 적용 가능한 알고리즘을 찾거나 새로운 알고리즘을 만드는 것과 관련된다.

이러한 일반화에 대해 재능이 많은 학생은 다양한 특별한 것 속에 숨어있는 일반성을 쉽게 찾아내고, 외견상 감추어진 현상의 내재된 본질을 보고 외견상 다르고 구별되는 것 중에서 무엇이 주가 되고 기본적이고 일반적인 것인가를 잘 파악하고 새로운 것 속에서 친숙한 요소를 정확히 찾아낸다.

평균적인 학생에게는 즉각적인 일반화나 동일한 유형의 문제로 확장하는 것은 보이지 않지만, 계속된 잘 만들어진 절차로 교육을 받은 결과 점진적으로 일반화에 도달할 수 있다.

재능이 적은 학생들은 수학적인 자료를 일반화하는데 큰 어려움을 가지고 있다. 상당히 많은 수의 문제에서 도움을 주고, 질문을 하고, 효과적인 추론을 제공해 주었을 경우에 다음 문제로 넘어갈 수 있다.

(3) 사고과정에서의 개인의 심리적 특성

사고과정에서 나타나는 개인의 심리적 특성은 다음 네 가지로 나눌 수 있다.

첫째, 논리적 추론의 빠른 숙달과 사고과정의 단축성이다. 재능이 많은 학생들은 추론과 수학적인 연산에 대응되는 체계를 빨리 즉각적으로 단축하는 경향이 있다. 평균적인 학생들은 처음에는 추론과정의 단축이 잘 일어나지 않지만 점진적으로 추론의 단축이 일어난다. 재능이 적은 학생들은 교사의 도움으로 어렵게 추론과정이 어느 정도는 자리를 잡게 된다.

둘째, 사고과정의 유연성이다. 여러 개의 해를 가지는 문제들에 대해 재능이 많은 학생들은 어려움 없이 한 사고 조작으로부터 새로운 사고 조작으로 쉽게 전환을 한다. 평균적인 학생들에게는 이러한 특성이 잘 드러나지 않고 빠른 사고의 전환에 약점이 있었다. 재능이 적은 학생들에게 있어 이미 발견된 풀이는 그들이 새로운 조작방법으로 전환할 가능성을 끊어 버리는 것처럼 보인다. 때때로 처음에 발견된 풀이 방법은 같은 문제를 푸는 또 다른 풀이 방법을 발견하는 것을 방해했다. 또한 더 일찍 발견된 풀이 방법을 잊어버릴 때 새로운 풀이 방법을 발견할 가능성을 증가시켰다.

셋째, 사고과정의 가역성이다. 재능이 많은 학생들은 특별한 어려움 없이 특별한 조언을 필요로 하지 않고 역행적 사고를 통해 역행 문제를 잘 푼다. 평균적인 학생들은 역행 문제를 모방하는 수준에서 해결하려고 한다. 평균적인 학생에 있어서 역행문제를 해결하는 것은 특정한 교육을 필요로 하며, 순행문제와 시간적으로 분리되어 있어야 한다. 재능이 적은 학생들은 역행문제는 순행문제 후에 바로 주어지는 경우보다는 시간적인 차이를 두고 역행문제를 순행문제와 완전히 구분시켜 독자적으로 주어질 때 더 잘 해결한다.

넷째, 문제해결에서의 능숙함, 다양성, 독창성과 창조성, 우아성이다. 문제에 대한 가장 합리적인 풀이의 추구, 목표에 이르는 가장 명확한, 가장 간단한, 가장 짧은, 그리하여 가장 멋있고 아름다운 길을 찾는 것과 관련된

다. 이러한 특성들은 재능이 많은 학생들의 전형적인 특징이라고 볼 수 있다.

(4) 기억과 재생에서의 폭넓은 활용

수학적으로 재능이 많은 학생들의 기억작용은 문제의 유형, 문제를 푸는 일반화된 방법, 추론의 구조, 증명의 기본방향, 논리적 규칙성 등은 즉시 그 자리에서 기억하고, 영원히 기억하는 것으로 보인다. 반면 구체적인 자료나 수치자료는 문제를 푸는 동안에만 잘 기억하고 문제를 푼 후에는 빨리 잊어버린다.

평균적인 학생들은 조금 다른 성격을 지니고 있다. 그들은 구체적인 자료나 수치 자료들을 비교적 잘 기억하지만 문제의 일반적인 유형이나 추론의 구조는 잘 기억하지 못한다. 평균적인 학생들에게 일반적인 것과 특수한 것, 추상적인 것과 구체적인 것, 본질적인 것과 비본질적인 것의 차이를 느끼지 못해 모든 것을 기억하려는 것으로 보인다.

재능이 적은 학생들은 그들 사이에도 큰 차이를 보여주고 있다. 일부 학생들은 수학적인 영역에서 기억 작용에 매우 현저한 약점을 보여 주고 있다. 그들은 수학적인 일반적인 구조나 구체적인 수치자료 모두에서 같은 현상을 드러내고 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

본 연구는 개인차를 고려한 기하교육이 수학교실에서 실현되는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 이루기 위해서 먼저, 고려해야할 개인차 변인을 문헌연구를 통해 추출하고(연구문제1), 둘째, 추출된 변인을 고려한 구체적인 기하 학습방법을 제시하고(연구문제2)하고자 한다.

(연구문제1)은 수학교육에서 개인차를 유발하는 개인차 변인을 결정하는 것으로 수학적 재능에 대한 문헌연구를 통해 이루어진다. 문헌연구를 통한 결과 도출은 Krippendorff(1980)가 제시한 내용분석 절차에 따라 자료를 나열하고, 분석이 이루어진다.

(연구문제2)는 수학적 재능에 부합되고 개인차에 상응하는 기하 학습방법을 구체적으로 개발하는 개발 연구이다. 본 연구문제를 효과적으로 해결하기 위해서 중학교 기하에서 가장 폭넓게 사용되어지는 기초적이고 핵심적인 개념인 합동을 선택하였고, 합동과 관련된 단원에서 기하 학습방법을 구체적으로 제시하기 위해 실제 문제해결 상황을 구체적인 문제를 통해 설정하였다. 사용된 문제는 우리나라 7차 교육과정 교과서의 문제, 러시아 Gusev(2005)의 기하문제 모음집의 문제, Gusev(1995)의 실험교과서의 문제, 이성헌과 이지흠(1960)의 기하대전을 기초로 하여 제작되었다. 제작된 기하단원의 합동 관련 문제를 기초로 하여 <연구문제1>에서 추출한 개인차 변인을 고려한 구체적인 학습방법이 개발되어진다.

Ⅳ. 개인차 변인

본 연구는 개인차를 고려한 기하교육이 수학교실에서 실현되는 것을 목적으로 한다. 본 장에서는 이러한 목적을 달성하기 위해 문헌 검토의 결과를 기초로 개인차를 고려한 기하학습에서 고려해야할 구체적인 변인과 각 변인에 대한 하위요소를 추출한다.

앞에서 제시한 문헌 검토를 분석하여 재능에 대한 개인적 특성을 다음 다섯 가지로 분류할 수 있다.

첫째, 수학적 대상에 대한 정보 수집과 정보들 사이의 관련성 파악과 관련된 재능에서 개인차가 존재한다.

둘째, 구체적이고 특별한 내용으로부터 새로운 규칙을 찾는 것과 주어진 문제 상황을 이미 알고 있는 내용에 정확하게 적용할 수 있는 일반화 능력, 증명의 일반적인 유형을 이해하는 능력과 관련된 재능에서 개인차가 존재한다.

셋째, 사고과정과 관련된 구성요소이다. 사고과정에서 나타나는 사고의 단축, 논리적 추론의 빠른 숙달, 사고과정에서의 특별한 유연성, 사고의 여유와 다양성과 관련된 재능에서 개인차가 존재한다.

넷째, 문제해결 과정에서의 사고의 독창성과 창조성, 사고의 우아성과 관련된 재능에서 개인차가 존재한다.

다섯째, 기억과 재생과 관련된 구성요소이다. 수학적 내용의 정확한 기억과 재생, 수학적인 내용의 체계적인 기억, 창조적인 재생과 생산적인 활동, 정보의 파지 등과 관련된 재능에서 개인차가 존재한다.

재능에 대한 이러한 다섯 가지 특성을 개인차를 유발하는 변인으로 결정하고 이 변인에 따른 구체적인 하위요소를 선행연구 결과로부터 다음과 같이 추출하였다.

(변인1) 수학적 대상에 대한 정보수집에서의 개인차

수학적 대상에 대한 정보수집에서의 개인차는 다음 세 가지 하위요소로 세분화할 수 있다.

1) 분석-종합적인 지각을 통한 문제구조의 파악에 개인차가 있다.

2) 문제 구조 파악에서의 분석-종합적인 지각의 단축성에 개인차가 있다.

3) 문제의 구조 파악에서 방향설정의 도구적 성격에 개인차가 있다.

(변인2) 일반화하는 능력에서의 개인차

일반화하는 능력에서는 다음 두 가지 하위요소를 생각할 수 있다.

1) 구체적인 자료를 이미 알고 있는 자료와 동일한 것으로 보는 능력에 개인차가 있다.

2) 구체적 자료로부터 추상화하여 본질적인 것을 찾아내는 능력에 개인차가 있다.

(변인3) 사고과정에서의 개인차

사고과정에서의 개인차는 다음 세 가지 하위요소로 나누어 생각할 수 있다.

1) 사고과정의 단축성에 개인차가 있다.

2) 사고과정의 유연성에 개인차가 있다.

3) 사고과정의 가역성에 개인차가 있다.

(변인4) 풀이의 심미지향성에서의 개인차

풀이의 심미지향성에서의 개인차는 다음 세 가지 하위요소를 생각할 수 있다.

1) 세련된 심미성의 추구에 개인차가 있다. .

2) 정교한 심미성의 추구에 개인차가 있다.

3) 풀이과정을 되돌아보고 더 나은 다른 방법으로 풀고자하는 경향에 개인차가 있다.

(변인5) 수학적 정보에 대한 정보기억에서의 개인차

정보기억에서의 개인차는 다음 세 가지 하위요소로 나누어 생각할 수 있다.

1) 수학문제를 해결하고 나면 기억하고 있는 내용에 개인차가 있다.

2) 기억해야할 수학적 내용을 기억하는 방법에 개인차가 있다.

3) 수학적 내용을 기억한 후 새로운 문제 상황에서 기억한 것을 사용하는데 개인차가 있다.

V. 개인차를 고려한 기하 학습 방법

앞에서 추출한 변인과 하위요소를 고려한 기하 학습 방법에 대해 구체적으로 살펴보자.

1. 수학적 정보수집에서 개인차를 고려한 학습

수학적 대상에 대한 정보수집에서 발생하는 개인차를 크게 다음 세 가지로 나누어 생각한다. 첫째, 문제 구조 파악을 위한 분석-종합적인 지각능력의 차이에 대한 고려, 둘째, 분석-종합적인 지각에서 단축성의 차이에 대한 고려, 셋째, 문제의 구조 파악에서 방향설정의 도구적 성격의 차이에 대한 고려이다.

1) 문제 구조 파악을 위한 분석-종합적인 지각능력의 차이에 대한 고려

학생은 문제에 주어진 자료들을 분석적으로 지각한다. 주어진 수학적 대상들을 추출하고, 이들을 체계화한다. 또한, 주어진 자료들을 종합적으로 지각한다. 주어진 수학적 대상들을 독립적으로 보지 않고 서로 다른 대상들과 결합시켜 하나의 집합체를 만들고, 상호간의 관련성을 찾아내면서 지각한다. 이러한 특성을 바탕으로 다음과 같은 방법으로 수학적 정보수집에서 분석-종합적인 지각능력에서의 개인차를 고려한다.

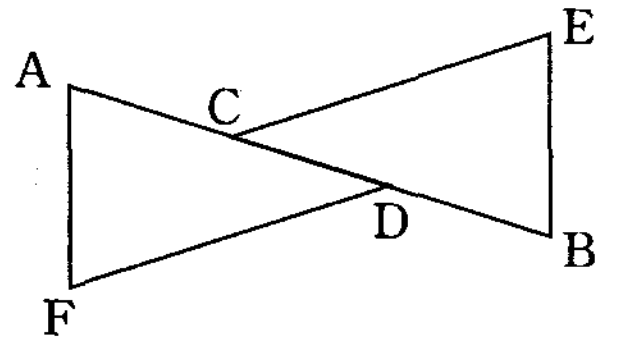
<방법1> 분석적 지각능력을 도와주기 위한 활동이다. 문제의 구조파악을 위한 문제에 주어진 것과 구할 것, 수학적 개념과 용어, 수학적 배경지식 등에 대한 목록을 작성하도록 한다.

<방법2> 주어진 수학적 정보들 중 가능한 것들은 기호적 표현, 도식적 표현, 언어적 표현, 시각적 표현 등 다양한 표상으로 나타낸다. 이를 통해 각각의 수학적 정보들의 수학적 의미를 정확하게 인식하도록 한다. 사실 문제가 주어질 때 문제를 해결하지 못하는 것은 실행에서의 어려움 보다는 문제의 표상에서의 어려움 때문이라고 볼 수 있다(Mayer · Hegarty, 1996). 따라서 문제 구조의 파악을 위한 표상의 역할은 중요하다고 하겠다.

<방법3> 종합적인 지각능력을 도와주기 위한 활동이다. 문제의 구성 요소들 사이의 관련성과 종속성을 찾기 위해 여러 가지 결합을 시도하여 결합목록을 작성하고, 수학적 의미를 이해하도록 한다. 이를 통해 궁극적으로 수학적 개념을 하나의 집합체로 볼 수 있도록 유도한다. 실제 Poincaré(1983)는 무의식에서의 유의미한 결합이 문제해결에 중요한 역할을 한다고 보았다. 이러한 유의미한 결합을 찾을 수 있는 기회를 학생에게 제공한다.

다음 주어진 문제를 통해 구체적으로 이러한 방법에 대해 살펴보기로 하자.

[문제1] 선분 AB위에 $\overline{AC} = \overline{BD}$인 점 C와 D를 잡고, $\overline{CE} = \overline{DF}$이고 $\overline{CE}//\overline{DF}$인 점 E와 F를 잡았을 때, 삼각형 AFD와 삼각형 BEC가 합동임을 설명하시오.



<그림 1> 첫 번째 문제

<방법1> 분석적 지각능력을 도와주기 위해 주어진 것과 구할 것, 개념과 용어, 배경지식 등에 대한 목록을 작성하도록 유도한다. 첫째, 주어진 것은 문제에 언어적 형태, 기호적 형태, 도식적 형태 등으로 제시된 모든 수학적 대상을 나타내고, 둘째, 구할 것은 문제에서 요구하는 최종의 결과를 의미하고, 셋째, 개념과 용어는 '주어진 것' 이나 '구할 것' 에서 사용되어진 수학적인 용어들에 대한 의미를 확인하는 것이고, 넷째, '주어진 것' 이나 '구할 것' 이 문제에서 표면적으로 드러난 것이라면 배경지식은 표면적으로 드러나지 않지만 문제해결에 유용한 수학적인 대상들을 나타낸다. 주어진 <표 1>과 같이 분석목록을 작성할 수 있다.

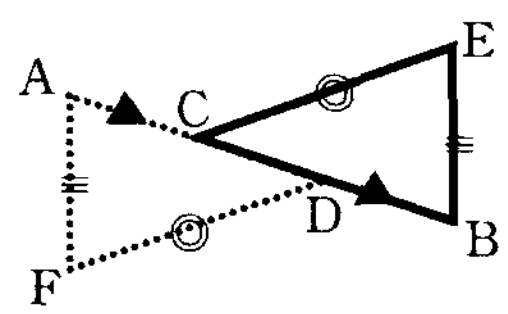
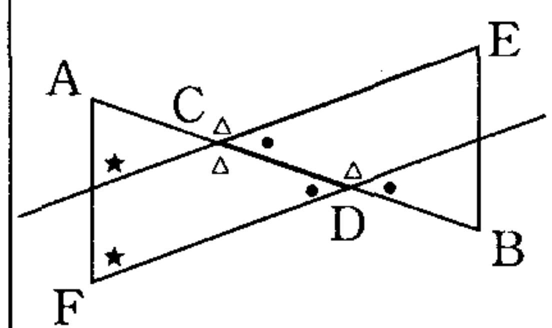
<방법2> 주어진 수학적 정보들을 여러 가지 표현 방법을 이용하여 나타낸다. 예를 들어, 제시되어진 분석목록들은 언어적, 기호적, 도식적인 형태로 동시에 나타낼 수 있다. 한 가지 표현 방법보다는 여러 가지 표현 방법을 동시에 사용함으로써 분석적 지각능력으로부터 종합적 지각능력으로 연결을 용이하게 한다.

<표 1> 분석목록

구분	목록
주어진 것	1. 선분 AB
	2. 선분 AB위에 있는 점 C, D
	3. $\overline{AC} = \overline{BD}$
	4. $\overline{CE} = \overline{DF}$
	5. $\overline{CE}//\overline{DF}$
	6. 삼각형 AFD와 삼각형 BEC
구할 것	7. 삼각형 AFD와 삼각형 BEC가 합동이다.
배경지식	8. 평행하면 동위각과 엇각의 크기가 같다.
	9. 삼각형은 SSS, SAS, ASA 합동조건이 있다.
개념 및 용어	10. 두 도형이 서로 포개어질 때 합동이다. 따라서 대응하는 변과 각의 크기는 모두 같다.

<표 1>의 분석목록 중에서 '목록7' 과 '목록8' 을 이용하여 다양한 표현방법의 예를 <표 2>와 같이 제시할 수 있다.

<표 2> 다양한 표현방법으로 나타내기

구분	언어적 표현	기호적 표현	도식적 표현
목록 7	삼각형 AFD와 삼각형 BEC가 합동이다	$\triangle AFD \equiv \triangle BEC$	
목록 8	평행하면 동위각과 엇각의 크기가 같다	$\overline{CE}//\overline{DF}$이므로, $\angle ECD = \angle FDC$	

<방법3> 종합적인 지각능력을 도와주기 위한 활동이다. 문제의 구성 요소들 사이의 관련성과 종속성을 찾기 위해 관계표를 만들어 여러 가지 결합을 시도하고, 이 결합으로부터 얻을 수 있는 결합목록을 작성한다. 이를 통해 궁극적으로 수학적 개념을 하나의 집합체로 볼 수 있도록 유도한다. 앞에서 제시한 '주어진 것', '구할 것', '배경지식' 등을 이용하여 서로 간의 관련성을 찾아보도록 하자.

주어진 <표 3>의 관계표와 같이 분석된 각각의 수학적 대상들을 나열하고 그들과 서로 어떤 관계가 있는지 생각하고 관련성을 찾을 수 있도록 유도한다. 이 때 교사에 의해 적절한 도움이 제공된다.

<표 3> 관계표

								목록 1
							목록 2	관계 1
						목록 3	관계 2	
					목록 4		관계 3	
				목록 5		관계 3		관계 4
			목록 6	관계 6	관계 6		관계 5	
		목록 7		관계 6	관계 6			
	목록 8			관계 7				
목록 9			관계 8					

<표 3>의 관계표를 바탕으로 다음과 같은 결합목록을 작성할 수 있다.

관계1. 점 A, B, C, D가 동일한 직선위에 있다.

관계2. 선분 AD와 선분 BC의 길이는 같다.

관계3. 직선 AB는 평행한 두 직선 CE와 DF를 지난다.

관계4. 각 ECB와 각 FDA는 엇각의 위치에 있다.

관계5. 삼각형 AFD의 한 변 AD, 삼각형 BEC의 한 변 BC의 일부인 선분 AC와 선분 BD는 같다.

관계6. 두 삼각형에서 한 변의 길이가 같고 평행하다.

관계7. 각 ADF와 각 BCE의 크기는 서로 같다.

관계8. 적용 가능한 합동조건을 찾을 수 있다.

2) 분석-종합적인 지각에서 단축성의 차이에 대한 고려

재능이 많은 학생들은 문제가 주어지면 수학적 정보들을 순간적인 통찰로 이해하고, 그렇지 않은 학생들은 이들 사이의 관련성을 파악하는 일련의 순차적인 과정을 통해 이해한다. 이러한 개인적인 특성을 바탕으로 다음과 같은 방법으로 분석-종합적인 지각에서의 단축성에 대한 개인차를 고려하도록 한다.

<방법1> 문제에서 주어진 것, 배경지식, 풀이절차, 구해야 할 것을 모두 정확하게 찾아낼 수 있는 기회를 제공하고, 필요한 도움을 발문형식으로 제공한다. 일반적으로 학생들에게 앞의 [문제1]에서 수학적 정보를 찾으라고 한다면 선분 AB, 선분 AC, 선분 BD, 선분 CE, 선분 EF, 삼각형 AFD, 삼각형 BEC 정도만 제시할 것이다. 하지만, 주어진 문제에는 더 많은 수학적 정보를 가지고 있다. 의미 있고 중요한 수학적인 정보를 모두 빠르게 찾을 수 있도록 하기 위해 교사의 도움이 필요하다. 정보수집단계에서 지속적인 도움을 통해 분석-종합적인 지각이 단축되도록 유도한다. 이러한 도움의 예로 잘 조직된 발문의 예를 다음과 같이 제시할 수 있다.

<방법2> 추출한 수학적인 요소들 사이의 관련성을 단계적으로 찾을 수 있도록 문제를 세분화시킨 하위문제 형식으로 제공한다. 재능이 많은 학생이 분석과 동시에 종합적 사고를 하는 경향이 강한 것이 사실이지만, 재능이 많은 학생들이나 그렇지 않은 학생이나 문제해결에 필수적인 수학적 요소들 간의 유의미한 관련성을 찾는 것은 간단하지 않은 부분이다. 따라서 재능의 많고 적음에 관계없이 수학적 요소들 사이의 관련성을 찾는 것은 매우 중요하다. 따라서 유의미한 관련성을 효율적으로 신속하게 찾기 위한 경험이 필요하다.

<방법3> 본질적으로 동일한 유형의 문제를 체계적으로 제공하여 분석-종합적인 지각이 보다 빠르게 일어나도록 유도한다. 앞의 [문제1]을 통해 이것에 대해 구체적으로 살펴보자. 이 문제해결에 결정적인 역할을 한 수학적인 내용은 크게 다음 두 가지라고 볼 수 있다. 첫째는 삼각형의 합동조건으로써 SAS 합동조건이고, 둘째는 동위각과 엇각에 대한 평행선의 성질이다. 이 두 가지의 수학적 사실에서 본질적으로 동일한 유형의 문제를 체계적으로 제시하여 분석-종합적인 지각이 보다 빠르게 나타날 수 있도록 유도한다.

3) 문제의 구조 파악에서 방향설정의 도구적 성격의 차이에 대한 고려

수집된 정보는 궁극적으로 문제해결과 연결되어져야 한다. 재능이 많은 학생은 정보수집과 문제해결을 쉽게 연결하는 경향이 있다. 반면 재능이 부족할수록 주어진 정보는 구별할 수 있지만 구체적인 조작방법은 결정하지

못하는 경향이 있다. 또한 Mayer와 Hegarty(1996)는 수학적인 문제에 직면하였을 때 문제해결자는 문제해결을 위한 목표를 가지게 되지만, 어떻게 이 목표에 도달할 것인지 알지 못하기 때문에 문제에 서술되어져 있는 상황을 이해하려고 시도하고 파악한 상황을 표현하는 것을 기초로 하여 문제를 해결하기 위한 방법을 고안한다고 하였다. 이러한 주장과 심리적인 특성을 바탕으로 다음과 같은 방법으로 문제의 지각에서 방향설정의 도구적 성격에서의 개인차를 고려하도록 한다.

<방법1> 주어진 문제가 어떤 유형의 문제인지 파악하도록 유도한다. 문제를 어떻게 풀 것인가에 대한 방향을 설정하기 위해서 먼저 이 문제의 유형에 대해 정확히 아는 것이 중요하다. 문제의 유형은 문제의 구성요소를 '주어진 것(A)', '배경지식(B)', '풀이절차(C)', '구할 것(D)'으로 보고, 이것에 의해 총 16가지 유형으로 분류할 수 있다(한인기, 1998). 이러한 기준에 의해 주어진 문제가 어떤 형태의 문제인지 결정하고 이러한 결정을 통해 정보수집 단계에서 문제해결을 위한 방향설정에 도움을 제공한다.

구체적으로 문제의 유형은 첫째, 네 가지 구성요소가 모두 수학적인 정보로 문제에 제시되어져 있는 유형(ABCD형), 둘째, 세 가지 구성요소가 수학적인 정보로 문제에 제시되어져 있는 유형(ABCx형, ABxD형, AxCD형, xBCD형), 셋째, 두 가지 구성요소가 수학적인 정보로 문제에 제시되어져 있는 유형(ABxy형, AxCy형, AxyD형, xBCy형, xByD형, xyCD형), 넷째, 한 가지 구성요소가 수학적인 정보로 문제에 제시되어져 있는 유형(Axyz형, xByz형, xyCz형, xyzD형), 다섯째, 네 가지 구성요소가 모두 수학적인 정보로 문제에 제시되어져 있지 않은 유형(xyzw형)으로 나눌 수 있다. 이러한 문제 유형이 결정되면 문제해결을 위해 필요한 요소들을 찾을 수 있고, 이러한 요소들로부터 문제해결을 위한 방향설정에 도움을 줄 수 있다.

<방법2> 문제에서 구해야할 것이 무엇인지 정확하게 찾도록 유도하기 위해 적절한 발문과 도움을 제공한다. 이것을 통해 주어진 문제가 증명하는 문제인지, 구체적인 수치를 구하는 문제인지, 조건을 찾는 문제인지, 조건들 사이의 관련성을 찾는 문제인지, 해결의 전형적인 풀이절차를 찾는 문제인지에 대해 구별하도록 한다.

<방법3> 정보수집을 통해 얻어진 결과로부터 한 가지 풀이 방법을 추측하도록 한다. 학생들은 문제를 이해하고 정보를 수집하면서 어떻게 풀어야 할 것인지를 생각한다. 동시에 머릿속에서 문제해결에 대한 실마리를 가지게 된다. 하지만 이러한 생각은 실제 문제해결을 위한 실행과 연결되지 않는 경향이 많다. 정보수집 단계에서 획득된 문제해결의 실마리가 되는 생각을 문제해결과 연결하기 위해 자신의 생각을 추측이라는 활동을 통해 드러내도록 유도한다. 이를 통해 정보수집이 문제해결의 방향설정과 연결되도록 도움을 제공한다.

2. 일반화하는 능력에서의 개인차를 고려한 학습

Krutetskii(1976)의 연구에 의하면 일반화는 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 구체적인 자료를 이미 알고 있는 자료와 동일한 것으로 보는 것과 관련된 것이다. 다른 하나는 주어진 대상, 관계 등과 같은 구체적 자료로부터 추상화하고 유사한 것, 일반적인 것, 본질적인 것을 찾는 것과 관련된다.

이와 관련하여 Carroll(1996)은 구체적인 자료들로부터 일반화하거나 규칙을 발견하는 것을 귀납적인 사고라고 하면서 수학자는 귀납적인 사고를 많이 사용하고 있다고 하였다. Carroll의 지적은 수학에서 일반화하는 능력은 수학적으로 매우 중요한 부분임을 강조하고 있다. 따라서 중학교 기하단원의 교수-학습에서도 일반화하는 능력에서의 개인차를 충분히 고려하는 것은 다른 어떤 것보다 중요하다고 볼 수 있다.

앞에서 언급한 특성을 바탕으로 수학적 내용을 일반화하는 것에서 발생하는 개인차는 다음 두 가지로 나누어 생각해 보자. 첫째, 구체적인 자료를 이미 알고 있는 자료와 동일한 것으로 보는 능력의 차이, 둘째, 구체적 자료로부터 추상화하여 본질적인 것을 찾아내는 능력의 차이이다.

1) 구체적인 자료를 이미 알고 있는 자료와 동일한 것으로 보는 능력의 차이에 대한 고려

다음과 같은 방법으로 구체적인 자료를 이미 알고 있는 자료와 동일한 것으로 보는 능력에서의 개인차를 고려하도록 한다.

<방법1> 주어진 문제해결과 관련된 이미 알고 있는 자료(정리, 명제, 사실, 원리, 개념, 기능, 증명방법 등)를 교사와 학생이 함께 나열하도록 하고, 나열된 여러 자료를 도움으로 제공한다. 나열되거나 제시된 여러 자료와 주어진 문제의 구체적인 자료를 비교하여 적용 가능한 타당한 자료를 결정하도록 한다.

<방법2> 일반화할 수 있는 능력의 향상을 위해 주어진 문제유형에는 비본질적이나 구체적인 변형에 본질적인 가능한 다양한 유형의 체계적인 문제를 학생들에게 제공한다.

<방법3> 주어진 문제해결을 위한 풀이방법의 주된 흐름이 무엇인지 생각하도록 하고 이것을 통해 적용 가능한 다른 상황에 준비하도록 한다.

2) 구체적 자료로부터 추상화하여 본질적인 것을 찾아내는 능력의 차이에 대한 고려

Brandford와 Zech, Daniel, Vye(1996)는 본질적인 것을 찾아내는 일반화와 관련하여 학생들은 특정한 문제를 해결하고 나면 그 문제를 기능적으로 고착화시키려는 경향이 있다고 지적하였다. 따라서 다양하게 변화된 문제에 대한 다양한 경험이나 잘 조직된 체계적인 연습 등을 통해 문제해결의 전략이나 개념이 일반화되어질 수 있도록 도움을 줄 필요가 있다.

이러한 특성을 고려하여 다음과 같은 방법으로 구체적인 자료로부터 추상화하여 본질적인 것을 찾아내는 능력에서의 개인차를 고려하도록 한다.

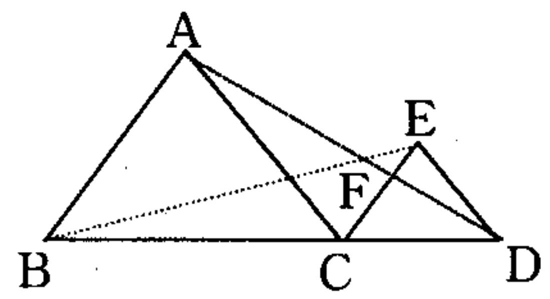
<방법1> 주어진 구체적인 문제를 해결하고 주어진 문제와 풀이과정에서 불변인 요소와 가변인 요소를 추출한다. 이를 통해 추출된 불변인 요소의 일반적인 특성에 대해 이해한다.

<방법2> 동일한 유형의 잘 조직된 체계적인 연습을 통해 본질적인 것을 찾을 수 있는 기회를 제공한다.

<방법3> 다양한 구체적인 자료를 제시하고 이를 보고 일반적인 규칙을 추측할 수 있는 귀납적 사고의 기회를 제공한다. 제시된 추측의 타당성을 확인하여 본질적인 것, 즉 새로운 개념을 형성하도록 한다.

다음 주어진 문제를 통해 제시된 방법에 대해 구체적으로 살펴보기로 하자.

[문제2] 다음 그림과 같이 선분 BD 위에 임의의 한 점 C를 잡아 선분 BC와 선분 CD를 만든다. 이 각 선분을 한 변으로 하는 정삼각형 ABC와 정삼각형 CDE를 만든다. 선분 AD와 선분 BE를 긋고, 그 교점을 F라고 할 때, 각 AFB의 크기를 구하시오.



<그림 2> 두 번째 문제

<방법1> 주어진 문제를 해결하고 불변인 요소와 가변인 요소를 추출한다.

[불변인 요소와 가변인 요소 찾기]

주어진 문제와 풀이과정에서 불변인 요소와 가변인 요소를 추출한다.

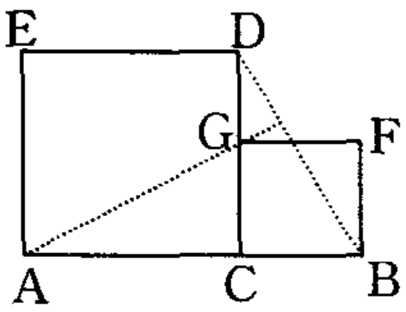
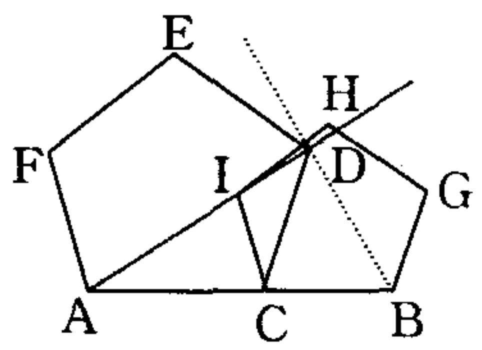
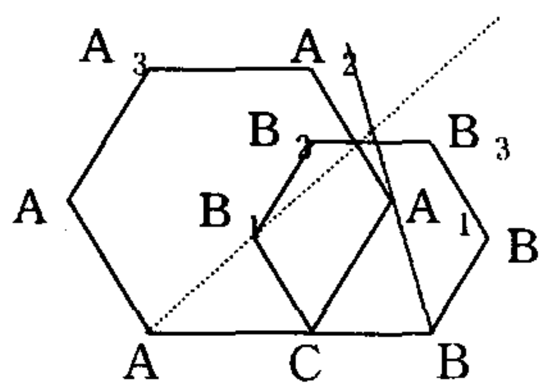
첫째, 불변인 요소를 찾는다. 선분 BD가 존재하여 점 C를 잡는 것, 선분 BC와 선분 CD와 같은 쪽에 정다각형을 그리는 것, 직선 BE와 직선 AD를 그어서 교점 F를 잡는 것 등을 생각할 수 있다.

둘째, 가변인 요소를 찾는다. 선분 BC와 선분 CD 위에 정삼각형이 아니라, 정사각형, 정오각형, 정다각형을 그리는 것, 각 AFB의 크기, 선분 BD가 점 C에 의해서 꺾이는 것 등을 생각할 수 있다.

<방법2> 잘 조직된 체계적인 연습을 통해 본질적인 것을 찾을 수 있는 기회를 제공한다. 교사는 가변의 요소들을 다양화하고 동일한 불변의 요소를 가지는 문제를 체계화하여 학생들에게 제공한다.

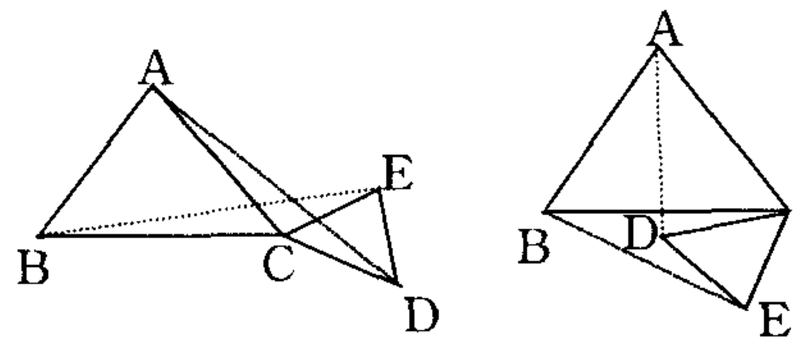
첫째, 가변인 요소 중에서 정다각형에 대해 고려해 보자. 선분 BC와 선분 CD위에 정다각형을 위치시키는 경우 각 AFB의 크기를 일반화할 수 있는 기회를 <표 4>와 같이 제공한다. 이러한 체계에 대해 공통성을 찾도록 기회를 제공한다. 이러한 체계화된 문제를 통해 개념 형성을 위한 공통성을 찾도록 한다.

<표 4> 일반화를 위한 체계적인 연습문제

순서	문제구성
[연습1]	선분 AB위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 정사각형 ACDE와 정사각형 CBFG를 같은 쪽에 그릴 때, 직선 AG와 직선 BD가 이루는 각의 크기를 구하시오. 
[연습2]	선분 AB위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 정오각형 ACDEF와 정오각형 CBGHI를 같은 쪽에 그릴 때, 직선 AI와 직선 BD가 이루는 각의 크기를 구하시오. 
[연습3]	선분 AB위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 두 정 n각형을 그릴 때, 직선 AB_1과 직선 BA_1이 이루는 각의 크기는 어떻게 될것인지 생각해 보시오. 

둘째, 가변의 요소들 중에서 다른 가변의 요소를 고려해 볼 수 있다. 선분 BD가 점 C에 의해서 꺾이는 경우를 생각하여 보자<그림 3>. 여기서 본질적으로 동일하지만 구체적인 변형에서 서로 다른 문제해결을 통해 새로운 공통성을 형성할 수 있다.

<방법3> 다양한 구체적인 자료를 제시하고 이를 보고 일반적인 규칙을 추측할 수 있는 귀납적 사고의 기회를 제공한다. 제시된 추측의 타당성을 확인하여 본질적인 것, 즉 새로운 개념을 형성하도록 한다.



<그림 3> 가변의 요소 고려

[추측하기]

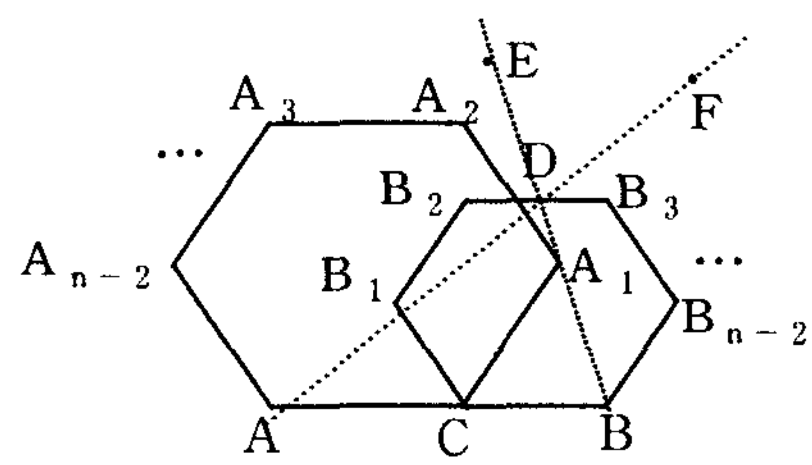
선분 AB위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 정 n각형을 그릴 때, 직선 AB_1과 직선 BA_1이 이루는 각의 크기는 정다각형의 한 내각의 크기와 같다.

[타당성 확인하기]

(풀이) 삼각형 ACB_1과 삼각형 BCA_1은 합동이다. 따라서 우리가 구하는 각 ADE의 크기는 각 DAB와 각 DBA의 크기의 합과 같다. 그런데, 각 DBA는 합동의 성질에 의해서 각 AB_1C와 같다. 따라서 다음을 얻을 수 있다. $\angle ADE = \angle B_1AC + \angle AB_1C = \angle B_1CB =$ (정n각형의 한 내각의 크기).□

[새로운 사실(일반화)]

선분 AB위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 정 n각형을 그릴 때, 직선 AB_1과 직선 BA_1이 이루는 각의 크기는 정 n각형의 한 내각의 크기와 같다<그림 4>.



<그림 4> 일반화 하기

3. 사고과정에서의 개인차를 고려한 학습

사고과정에서 발생하는 개인차는 크게 다음 세 가지로 나누어 고려한다. 첫째, 사고과정에서 단축성의 차이, 둘째, 사고과정에서 유연성의 차이, 셋째, 사고과정에서 가역성의 차이이다.

1) 사고과정에서 단축성의 차이에 대한 고려

다음과 같은 방법으로 사고과정에서 단축성에 대한 차이를 고려하도록 한다.

<방법1> 주어진 문제해결을 위한 기본 추론과정을 문제해결을 통해 설정한다. 설정된 기본 추론과정을 바탕으로 각 단계에 필요한 상세한 추론과정을 학생들이 찾을 수 있도록 한다.

<방법2> 동일한 추론과정의 유사한 유형의 문제를 제시하여 추론과정의 단축을 유도한다.

2) 사고과정에서 유연성의 차이에 대한 고려

사고과정에서 유연성은 개인차를 가진다. 여기서 유연성이란 한 가지 사고 조작에서 다른 사고 조작으로 쉽게 전환할 수 있는가와 문제해결을 위한 다양한 접근방법을 제시할 수 있는가와 관련된다. 재능이 많은 학생일수록 한 가지 사고활동에서 다른 사고활동으로의 전환이 쉽고, 동시에 다양한 접근방법을 제시할 수 있다.

사고의 유연성과 관련하여 Dreyfus와 Eisenberg (1996)는 수학적 사고과정에서 유연성의 성숙에 대해 연구를 수행하였다. 그는 수학적 사고능력을 발달시키기 위해 절대적으로 중요한 것이 유추적인 사고라고 하면서, 이러한 유추적인 사고가 수학적 유연성을 향상시키기 위해 매우 중요한 역할을 한다고 보았다. 특히, 유추의 사용으로 사고과정의 유연성을 증가시키는 두 가지 서로 다른 경향을 언급하였는데, 첫째는 더 일반적인 경우로부터 아주 단순한 한 개로 바꾸려고 하는 경향, 예를 들면 문제해결 상황에서 가정을 단순화하려는 것이 필요하고, 둘째는 아주 포괄적인 결과를 얻기 위해서 특별한 경우로부터 일반적인 한 개로 바꾸려고 하는 경향을 제시하였다.

이러한 연구결과를 바탕으로 유연성에 대한 개인차를 다음과 같은 방법으로 고려하도록 한다.

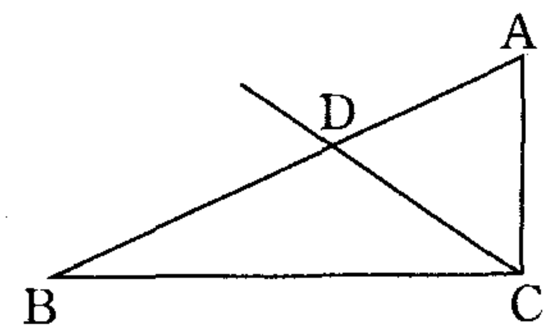
<방법1> 주어진 문제를 해결하는 과정에서 유추적인 사고에 대한 교수학적인 경험을 적극적으로 제공한다.

<방법2> 몇 가지 가능한 전형적인 풀이 방법을 학생에게 제시하고 이들 풀이 사이의 상호관련성을 탐구한다.

<방법3> 학생이 해결한 풀이 방법을 전체 학생에게 제시하고, 제시된 여러 가지 풀이 방법에 대한 학생 개인의 생각을 적을 수 있도록 하고, 적은 내용을 바탕으로 토론의 기회를 제공하여 자신의 생각을 정리한다.

다음 주어진 문제를 통해 구체적으로 이러한 방법에 대해 살펴보기로 하자.

[문제3] 다음 그림과 같이 각 A의 크기가 각 B의 크기의 두 배인 삼각형 ABC가 있다. 각 C의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 BC의 길이는 선분 AC와 선분 AD의 길이의 합임을 보이시오.

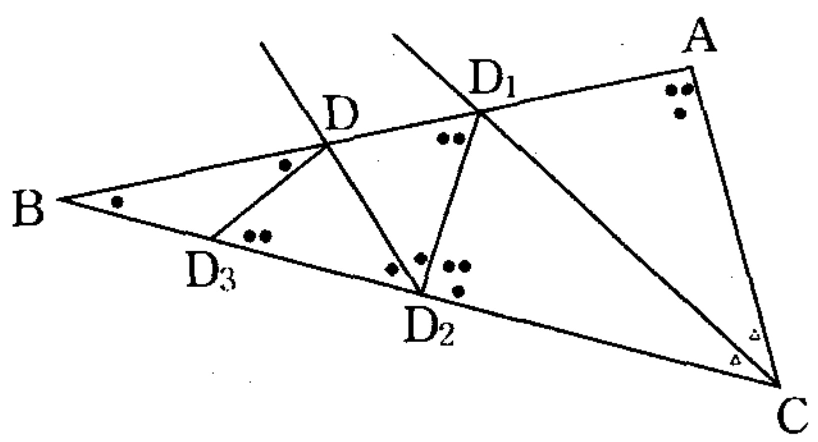


<그림 5> 세 번째 문제

<방법1> 주어진 문제를 해결하는 과정에서 유추적인 사고에 대한 경험을 다음과 같이 제공할 수 있다. 다음 두 가지로 나누어 구체적으로 생각해 보자.

첫째, 문제에서 각 A의 크기가 각 B의 크기의 두 배인 삼각형이 주어졌고, 이 때, 선분 BC의 길이는 선분 AC와 선분 AD의 길이의 합과 같다는 사실을 각 C의 이등분선을 이용해 제시하고 있다. 다음과 문제를 보자.

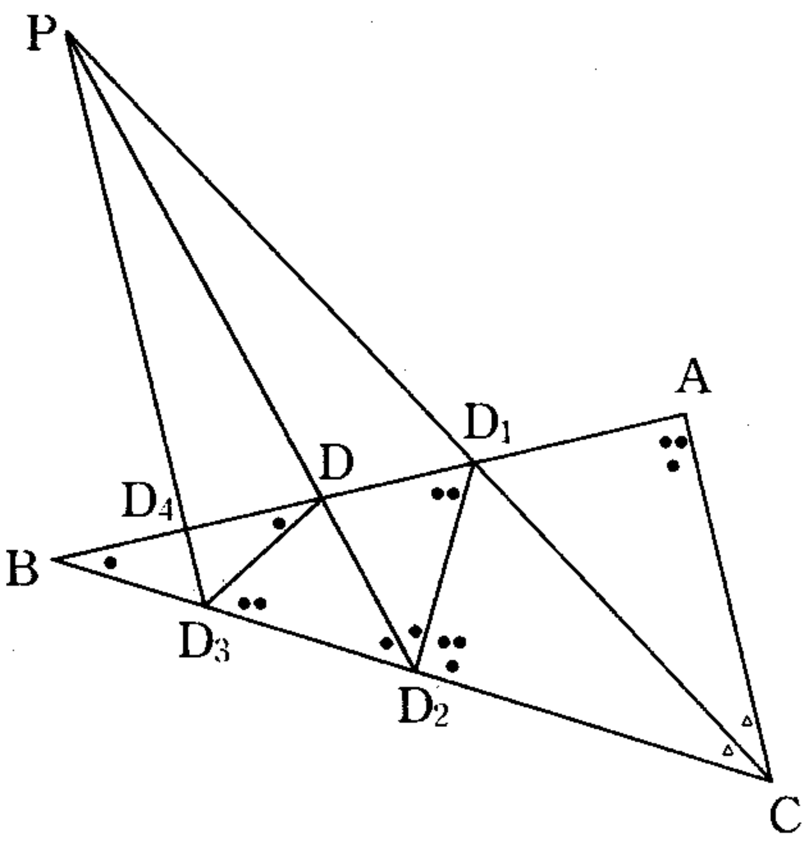
[유추문제1] 각 A의 크기가 각 B의 크기의 세 배인 삼각형이 주어졌다면, 각 C의 이등분선을 이용하여 선분 BC의 길이가 선분 AC와 선분 AD의 길이의 합과 같은 점 D를 찾을 수 있는지 생각해 보시오.



<그림 6> 첫 번째 유추

[유추1] 각 A의 크기가 각 B의 크기의 세 배인 삼각형이 주어졌다면, 각 C의 이등분선을 이용하여 선분 BC의 길이가 선분 AC와 선분 AD의 길이의 합과 같은 점

D를 찾았다고 할 때, 아래 왼쪽 그림에서 각 APB는 각 DPC의 세 배가 된다.

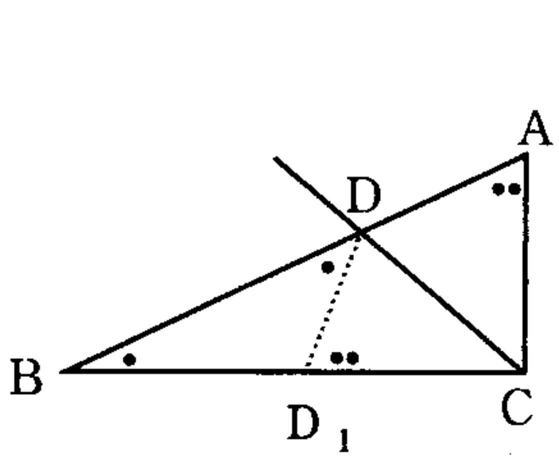


<그림 7> 두 번째 유추

<방법2> 제시된 문제에 대한 전형적인 풀이 방법 세 가지를 학생들에게 다음과 같이 제시하고, 이들 풀이 사이의 상호관련성을 탐색하도록 한다.

(풀이방법1)

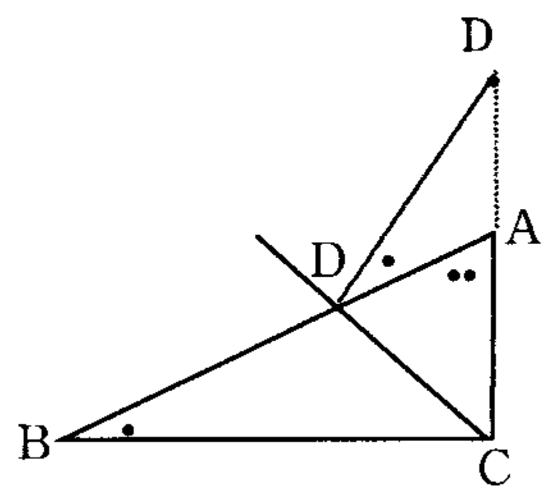
선분 AC와 선분 CD_1의 길이가 같도록 점 D_1을 선분 BC위에 잡는다. 삼각형 ACD와 삼각형 D_1CD는 SAS 합동이 된다. 따라서 선분 AD와 선분 DD_1의 길이는 같고, 각 DD_1C와 각 A의 크기는 같다. 이제 삼각형 BDD_1에서 각 B의 크기는 각 DD_1C의 반이므로, 각 B의 크기는 각 BDD_1 크기가 같다. 따라서 삼각형 BDD_1은 이등변삼각형이 되고, 두 선분 BD_1과 선분 DD_1의 길이는 서로 같다. 그러므로 선분 BC의 길이가 선분 AC와 선분 AD의 길이의 합과 같다.□



<그림 8> 세 번째 유추

(풀이방법2)

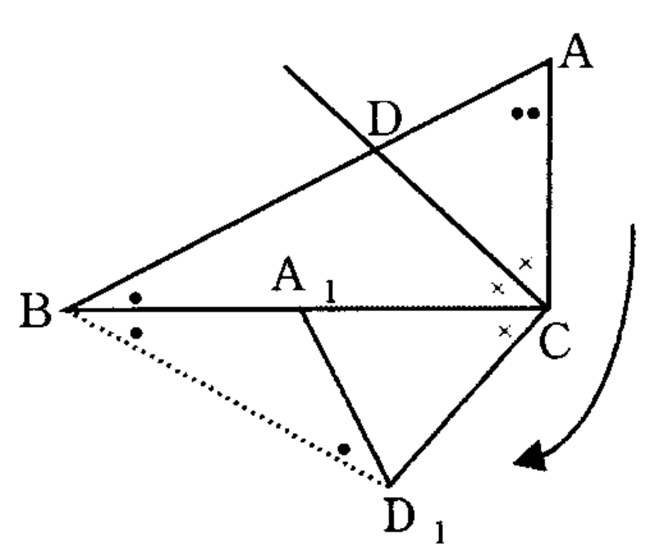
선분 BC와 선분 CD_1의 길이가 서로 같도록 점 D_1을 선분 CA의 연장선 위에 잡는다. 삼각형 BCD는 삼각형 D_1CD는 SAS 합동이 된다. 따라서 선분 BC의 길이는 선분 AD_1과 선분 AC의 길이의 합과 같고, 각 DD_1C과 각 B의 크기는 같다. 이제 삼각형 ADD_1에서 각 DD_1C의 크기는 각의 DAC의 반이므로, 각 D_1DC의 크기는 각 DD_1C 크기와 같다. 따라서 삼각형 ADD_1은 이등변삼각형이고, 선분 AD와 선분 AD_1의 길이는 같다. 그러므로 $\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{AD}$이다.□



<그림 9> 네 번째 유추

(풀이방법3)

다음 그림과 같이 삼각형 ACD를 점 C를 중심으로 점 A가 선분 BC 위에 오도록 회전시킨다. 따라서 삼각형 ACD와 삼각형 A_1D_1C는 합동이다. 두 선분 AC와 A_1C의 길이는 같고, 선분 AD와 A_1D_1의 길이도 같다. 그리고 선분 BD_1을 연결하면 삼각형 A_1BD_1이 이등변삼각형이므로, 선분 A_1D_1은 선분 A_1B와 같다. 따라서 $\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{AD}$이다.□



<그림 10> 다섯 번째 유추

[상호관련성 탐색]

첫 번째 풀이방법에서 가장 중요한 것은 각의 이등분선의 이용과 각의 이등분선을 대칭선으로 해서 대칭이 되는 합동인 삼각형을 만들었다는 것이다. 그리고 이 대칭인 삼각형은 주어진 삼각형의 내부에 만들어 졌다. 반면, 두 번째 풀이방법에서는 동일하게 각의 이등분선을 이용하였지만 이번에는 첫 번째와는 다른 삼각형을 사용하여 대칭이 되는 새로운 삼각형을 만들었고, 그 삼각형은 삼각형의 외부에 생성되어졌다. 세 번째 풀이방법에서는 앞 두 방법과는 달리 각의 이등분선을 이용하지 않았고 주어진 전체 삼각형과 합동이 되는 새로운 삼각형을 만들어서 증명을 하고 있다.

<방법3> 제시된 문제를 소집단별로 혹은 개인별로 풀이할 수 있도록 한다. 주어진 문제에 대해 학생들은 똑같은 방법으로 해결하지 않는다. 풀이한 방법을 다른 학생들에게 소개하여 가능한 다양하고 서로 다른 풀이 방법을 찾는다. 문제에 대한 여러 가지 해법을 앞에 제시한 예(풀이방법1, 2, 3)처럼 가지게 된다면 학생들은 이들 해법에 대한 자신의 생각을 기록할 수 있도록 한다. 이러한 기록을 바탕으로 해법에 대한 전략, 흐름, 장점, 단점 등을 토론하도록 한다.

Wicett와 Ohanian, Burns(2007)는 학생들이 무엇인가에 대해 자신의 생각을 기록한 후 토론을 하도록 요구하는 것은 매우 중요하다고 하였다. 왜냐하면 이것을 통해 학생들은 그들의 고유한 사고를 발표할 수 있을 뿐 아니라, 다른 사람들의 아이디어를 고민할 수 있는 기회를 가질 수 있기 때문이다. 물론 때때로 학생들이 무엇을 써야 할지에 대해서 도움을 받아야 할 필요가 있다. 교사는 이러한 상황이 발생하면 사고를 촉진하는 적절한 질문을 통해 여러 가지 풀이방법에 대한 자신의 생각을 분명하게 적을 수 있도록 유도하여야 한다. 이처럼 적는 활동과 이것을 통해 소집단에서 토론하는 시간을 가지게 함으로써 학생들의 사고는 유연해지고, 유연성이 강한 사고자가 될 수 있도록 도와주게 된다. 결국 사고과정의 유연성을 향상시키기 위해 학생들이 제안한 (풀이방법1), (풀이방법2), (풀이방법3) 등에 대한 학생들의 생각을 적을 수 있도록 하고 교사의 적극적인 개입과 발문을 전제로 한 토론의 기회를 폭넓게 제공할 필요가 있다.

3) 사고과정에서 가역성의 차이에 대한 고려

다음과 같은 방법으로 사고과정에서 가역성에 대한 차이를 고려하도록 한다.

<방법1> 순행문제와 역행문제를 동시에 제시하고, 순행문제와 역행문제를 연역 논리적 절차에 의해 체계적으로 해결하는 방법을 결정한다.

<방법2> 순행문제의 해법으로부터 역행문제 해결을 위한 관련성을 탐색하여 역행결합을 형성하도록 한다.

<방법3> 역행문제를 순행문제와 별개로 하여 독립적인 문제해결 방법을 결정하도록 한다.

4. 풀이의 심미지향성에서의 개인차를 고려한 학습

주어진 문제에 대한 가장 명쾌하고 명확한, 가장 간단하면서 경제적인 그리고, 가장 아름다운 길을 찾는 것은 재능이 많은 학생들의 전형적인 특징이다.

풀이의 심미지향성에서 발생하는 개인차는 크게 다음 세 가지로 나누어 고려한다. 첫째, 세련된 풀이를 찾고자 하는 경향의 차이에 대한 고려, 둘째, 정교한 풀이를 찾고자 하는 경향의 차이에 대한 고려, 셋째, 풀이과정을 되돌아보고 더 나은 해법을 찾는 경향의 차이에 대한 고려이다.

1) 세련된 풀이를 찾는 경향의 차이에 대한 고려

높은 수준의 수학적 개념을 문제해결 상황에서 잘 적용할 수 있는 것과 관련된다.

<방법1> 이미 학습한 수학적인 사실을 이용하여 문제를 해결한 풀이 방법과 새로 학습한 수학적인 사실을 이용하여 문제를 해결한 풀이 방법을 서로 비교하도록 한다.

<방법2> 이미 학습한 수학적인 사실들로부터 새로 학습한 수학적인 사실을 유도하게 하거나 이들 수학적 사실 사이의 상호 관련성을 찾도록 한다.

<방법3> 새로 학습한 높은 수준의 수학적인 정리나 사실들만을 사용하여 문제를 해결하도록 하는 경험을 제공한다.

2) 정교한 풀이를 찾는 경향의 차이에 대한 고려

풀이절차의 논리적인 연결고리가 아주 섬세하게 연결

되도록 문제를 해결한다. 이미 알고 있는 수학적 개념이나 원리로부터 추론의 고리를 잘 연결하여 체계적인 절차로 문제를 해결하는 것과 관련된다. 개인차와 관계없이 이러한 활동을 요구하는 것은 논리적인 사고능력의 향상에 큰 도움이 될 것이다. 이러한 활동은 먼저, 일반적인 풀이절차를 탐색한 다음, 풀이절차에 대한 정교한 풀이과정을 세분화하도록 요구하는 것이 타당하다.

5. 수학적 기억에서의 개인차를 고려한 학습

수학적 정보에 대한 기억에서 발생하는 개인차를 크게 다음 세 가지로 나누어 고찰한다. 첫째, 기억하는 수학적 내용의 차이, 둘째, 기억하는 방법의 차이, 셋째, 기억된 내용을 새로운 문제 상황에 사용하는 능력의 차이이다.

1) 기억하는 수학적 내용의 차이에 대한 고려

문제해결 과정에 존재하는 수학적 내용은 동일하다. 하지만, 문제해결 후 기억하는 내용은 서로 다르다. 따라서 여기서 다음과 같은 방법으로 기억하는 수학적 내용의 차이를 고려하도록 한다.

<방법1> 문제해결에 사용된 개념이나 정리, 수학적 사실을 찾고 기억하도록 한다.

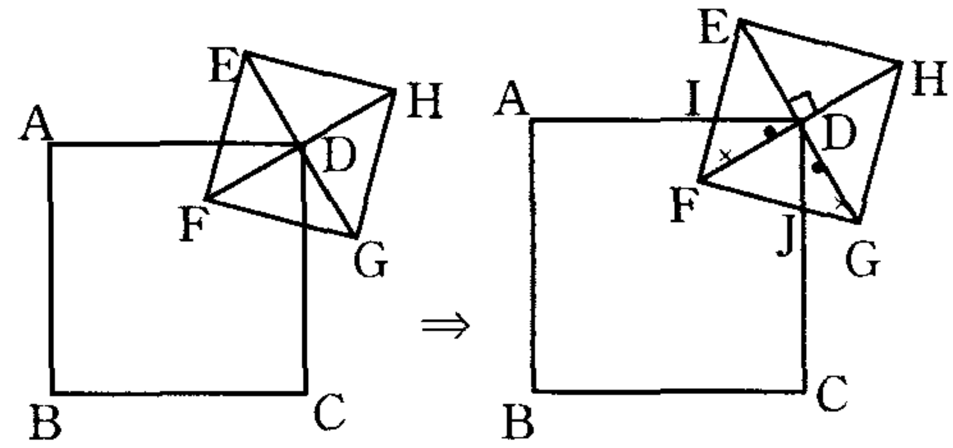
<방법2> 문제해결 과정의 전형적인 틀(증명의 큰 흐름)이나 일반적인 유형(문제풀이나 절차, 방법의 유형)을 찾고 기억한다.

<방법3> 문제 풀이에서 본질적인 것과 비본질적인 것, 일반적인 것과 특수한 것, 추상적인 것과 구체적인 것을 찾고 본질적, 일반적, 추상적인 것을 기억한다.

다음 주어진 문제를 통해 구체적으로 이러한 방법에 대해 살펴보기로 하자.

[문제4] 정사각형 ABCD의 한 꼭지점 D와 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 서로 일치할 때, 두 정사각형에 의해 겹쳐지는 부분의 넓이를 구하시오(단, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 4cm, 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는 2cm이다).

(풀이)



<그림 11> 네 번째 문제

과정1. $\triangle DEF \equiv \triangle DFG \equiv \triangle DGH \equiv \triangle DHE$

과정2. $\overline{DF} = \overline{DG}$, $\angle DFE = \angle DGF$

과정3. $\angle FDA = 90° - \angle FDC = \angle GDC$

과정4. 두 정사각형이 만나는 점을 I, J

과정5. $\triangle DFI \equiv \triangle DGJ$(ASA 합동)

과정6. $\square DIFJ = \triangle DFG = \frac{1}{4}(2)^2 = 1(cm^2)$.■

<방법1> 주어진 [문제4]의 해결과정에서 사용된 정리나 수학적 사실을 찾고 기억하도록 한다. 유용한 기억을 위해 모든 수준의 학생에게 효과적인 경험이다. 자신의 풀이를 돌아보고 의미 있는 수학적 정리나 사실을 찾는 경험은 기억에 중요한 역할을 한다.

첫째, 평행선에서 두 엇각의 크기는 서로 같다.

둘째, 한 변과 양 끝 각이 같으면 두 삼각형은 합동이다.

셋째, 정사각형의 넓이는 한 변의 길이의 제곱과 같다.

<방법2> 주어진 [문제4] 해결과정의 전형적인 틀, 주된 흐름, 일반적인 유형을 찾고 기억한다. 이 문제에서 구할 것은 사각형 DIFJ의 넓이다. 사각형의 넓이를 구하는 방법에 대해 초등학교에서 학습을 한다. 하지만, 이러한 형태의 사각형의 넓이를 구하는 것은 쉽지 않다. 따라서 주어진 도형과 동일한 넓이를 가지는 다른 도형을 찾아야 한다. 이러한 기본적인 생각을 바탕으로 문제해결 과정의 전형적인 틀이나 주된 흐름을 생각할 수 있다.

첫째, 정사각형 EFGH는 두 대각선에 의해서 합동인 네 삼각형으로 나뉜다.

둘째, 큰 정사각형의 한 꼭지점이 작은 정사각형의 대각선의 중심이므로 큰 정사각형과 대각선에 의해 만들어지는 두 삼각형은 서로 합동이다.

셋째, 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이는 정사각형 EFGH를 네 삼각형으로 나누었을 때 한 부분이다.

넷째, 정사각형 EFGH 넓이의 $\frac{1}{4}$이 겹치는 부분의 넓이와 같다.

<방법3> 주어진 [문제4]에서 본질적인 것과 비본질적인 것, 일반적인 것과 특수한 것, 추상적인 것과 구체적인 것을 찾고 본질적, 일반적, 추상적인 것을 기억한다.

첫째, [문제4] 풀이에서 본질적인 것과 비본질적인 것을 찾아보자. 본질적인 것은 두 정사각형이 겹치는 상황에서 한 정사각형의 대각선의 중심이 다른 정사각형의 한 꼭지점과 일치한다는 것이다(본질1). 이러한 경우가 아니라면 이 문제는 해결되어질 수 없다. 왜냐하면, 이 문제는 '과정5' 에서 $\triangle DFI \equiv \triangle DGJ$(ASA 합동)에 의해 해결된다. 비본질적인 것은 어떤 꼭지점과 대각선의 교점이 일치하는가는 문제의 해결과는 관계없다.

둘째, [문제4]의 풀이에서 일반적인 것과 특수한 것을 찾아보자. 일반적인 것으로는 이 문제는 정사각형의 크기에 영향을 받지 않는다. 어떤 크기를 가지더라도 이 문제는 동일한 방법으로 해결된다(일반1). 즉, 중요한 것은 대각선의 교점이 다른 정사각형의 꼭지점이 되는 그 정사각형의 넓이와 관계된다. '과정6' 에서 구하는 넓이는 $\triangle DFG = \frac{1}{4}$(정사각형의 넓이) 임을 알 수 있다. 특수한 것은 주어진 정사각형의 한 변의 길이가 각각 2cm, 4cm라는 것이다.

셋째, 문제풀이에서 추상적인 것과 구체적인 것을 찾아보자. 추상적인 것은 수학적인 개념으로 볼 수 있다. 여기서는 평행선의 성질과 정사각형의 성질에 의해서 $\triangle DEF \equiv \triangle DFG \equiv \triangle DGH \equiv \triangle DHE$(ASA 합동), $\triangle DFI \equiv \triangle DGJ$(ASA 합동)이라는 사실이다(추상1). 구체적인 것으로는 한 변이 4cm, 2cm인 정사각형, 정사각형의 대각선의 교점, $\angle FDA = 90° - \angle FDC = \angle GDC$, 두 정사각형이 만나는 점, 겹치는 부분의 넓이는 $\frac{1}{4}(2)^2 = 1(cm^2)$이라는 사실이다.

2) 기억하는 방법의 차이에 대한 고려

기억과 관련하여 Mayer와 Hegarty(1996)는 성공적인 문제해결자와 그렇지 못한 문제해결자로 나누어 다음과 같은 결론을 내렸다. 학생들은 지시적인 내용의 기억보다는 관계적인 내용의 기억을 더 어려워하였고, 성공적인 문제해결자는 그렇지 못한 해결자보다 훨씬 많은 관계적 기억을 하고 있다. Skemp(1987)도 개념들의 관련성과 관계적 이해를 통한 학습이 기억하기 쉽고 더 오래 기억된다고 하였다. Kloosterman과 Gainey(1993)는 학생들은 그들이 보고 들은 모든 것을 판단하고 그런 다음 이미 알고 있는 것과 관련시켜 새로운 정보를 기억하고 있다고 지적하였다.

이러한 결과로부터 수학적 내용을 어떻게 기억하는 것이 더 효율적인가의 물음에 대한 결과를 찾을 수 있고, 다음 세 가지 방법으로 나누어 기억하는 방법의 차이를 고려하도록 한다.

<방법1> 사용한 수학적 사실과 기억해야할 대상들과의 관련성을 탐구한다.

<방법2> 이미 알고 있는 문제해결 과정의 전형적인 틀(해결의 주된 흐름)과 새로 기억할 전형적인 틀의 본질적인 차이점을 분별하고 기억한다.

<방법3> 기존의 지식과 새롭게 기억할 본질적이고 일반적이고 추상적인 것과 관계를 만들면서 기억한다.

3) 기억된 내용을 새로운 문제 상황에 사용하는 능력의 차이에 대한 고려

우리의 교실이나 개별학습을 보면 대다수의 학생은 주어진 기하문제에 대한 증명방법이나 풀이절차에 대한 답을 알게 되면 문제에 대한 탐구활동을 중단하고 다음 문제로 넘어간다. 왜냐하면, 수학 문제의 정답은 수학 탐구활동의 목적이 되며 학생들은 정답만을 요구하고 있기 때문이다. 그렇다면, 문제를 해결하는 목적은 무엇이고, 문제해결한 후 무엇인가를 기억하게 되는데 그것을 기억하는 목적이 무엇인가에 대한 의문이 생긴다. 문제해결의 목적이나 수학적 내용을 기억하는 목적은 분명히 새로운 문제 상황에서 그것을 사용하기 위해서이다. 그러나 어떤 내용을 기억을 하고 있다고 해서 그 내용을 실제로 사용할 수 있는 것은 아니다. 특히, 수학적인 문제

상황은 더욱 그렇다. 새로운 문제 상황에서 효율적으로 잘 사용할 수 있는 다양한 교수학적인 경험을 필요로 한다는 것을 의미한다. 기억한 내용을 실제적으로 사용할 수 있는 다양한 교수-학습 기회가 수업시간이나 개별적인 과제 등을 통해 주어져야 한다.

이것과 관련하여 Vygotsky의 영향을 받은 Wertsch는 개인이 학습에서 발전을 이루기 위한 질적 변화와 양적 변화사이의 관계를 네 가지로 설명하였다(조윤동, 2002). 첫째, 질적 변화는 그에 상응하는 양적 변화를 필요로 한다. 둘째, 질적 변화는 새로운 양적 변화를 요구하는데 이 새로운 양적 변화가 없이는 질적인 성과들이 보존되거나 확대, 발전될 수 없다. 셋째, 양적 변화는 일정한 질적 변화에 의해서만 가능하다. 질적으로 변화하지 않는 한 양적 변화는 아무런 의미도 없다. 넷째, 필요한 양적 변화는 그것이 바라지 않던 질적 변화를 일으키지 않는 한계 안에서 의식적으로 수행되어야 한다. 비슷한 문제를 지나치게 많이 푼다거나 문제의 난이도를 급작스럽게 높여 가는 경우 또는 평가에서 쉬운 문제를 많이 내는 경우 학생들은 지겨워하거나 어려워하여 수학을 기피하는 계기가 되거나 실수하지 않으려는데 치중하게 되는 상황이 발생할 수도 있다는 것이다.

이러한 사실을 바탕으로 다음 세 가지 방법으로 나누어 개인차를 고려하도록 한다.

<방법1> 수학적 개념을 정착하기 위한 수학적 경험을 제공한다.

수업 시간에 획득한 기본개념을 완벽하게 내면화시키고 정착하기 위해 수업 시간 중에 기본개념과 관련된 충분한 적용의 기회가 필요하다. 주어진 문제를 해결하는 과정에서 기억해야할 수학적인 대상으로 수학적 지식과 수학적 탐구 방법을 추출할 수 있다. 이 두 가지 관점에서 획득한 개념을 정착시키기 위해 주어진 문제와 유사한 문제를 순차적으로 제시하고, 자신의 재능에 따라 문제를 해결할 수 있도록 함으로써 개인차를 고려한다.

<방법2> 획득된 개념이 문제사슬(problem chain)을 통해 점진적으로 높은 수준으로 옮겨가도록 한다.

획득된 수학적 개념으로부터 점진적으로 높은 수준의 문제로 옮겨가는 문제사슬을 통한 교수학적 경험을 제공한다. 기본개념을 정착하기 위해 기본적인 활용문제를 앞에서 다루었다면 이제는 기억된 학습내용을 단순하게 적용하는 것이 아니라 더 높은 수준을 요하는 문제를 통해 수학적인 능력을 향상시키는 교수학적인 경험을 제공한다. 이러한 경험은 재능이 많은 학생과 평균적인 학생들의 개인차를 고려하여 수업시간에 연습문제를 풀이하는 시간을 통해 달성되도록 한다. 이러한 연습문제의 예를 문제사슬로 구성하여 제시한다.

<방법3> 수학적 탐구활동을 위한 수학적 경험을 제공한다.

획득된 수학적 개념과 더불어 여러 가지 수학적 개념을 종합적으로 적용하는 수학적 탐구활동에 대한 교수학적 경험을 제공한다. 지금까지는 기본개념을 학습한 다음 기억한 내용을 수업시간 중에 연습문제로 활용하는 경우이었다. 본시 수업을 통해 획득한 지식은 수업시간 뿐 만 아니라 방과 후 과제를 통해서도 폭넓게 활용할 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다. 획득한 수학적 개념을 종합적으로 적용할 수 있는 교수학적인 경험을 제공하여 개인차를 고려할 수 있다.

이러한 세 가지 방법은 모두 일관성 있게 체계적으로 문제를 제공할 필요가 있다. 실제로, 한인기(2003)는 '바탕문제' 한 개를 제시하여 이 바탕문제로부터 체계화된 문제의 제공이 의미 있다고 보았다. 본 연구에서도 한 문제를 바탕문제로 하여 체계화된 문제사슬을 통해 기억된 내용은 새로운 문제 상황에 사용하는 능력에서의 개인차를 고려하도록 한다.

VI. 결 론

지금까지의 연구로부터 중학교 기하교육에서 개인차를 고려한 교수-학습에 대한 연구결과를 다음과 같이 제시할 수 있다.

첫째, 수학교육에서 개인차를 유발하는 개인차 변인과 각 변인의 하위요소를 추출하였다.

둘째, 개인차를 고려한 기하 교수-학습 방법을 각 하위요소별로 다음과 같이 제시할 수 있다.

1) 첫 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 분석적 지각능력을 도와주기 위한 활동으로 분석목록을 작성하도록 한다. 둘째, 주어진 수학적 정보들을 가능한 여러 가지 다양한 표상으로 나타내도록 한다. 셋째, 종합적인

지각능력을 도와주기 위한 활동으로 결합목록을 작성하도록 한다.

2) 두 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 문제에서 주어진 것, 배경지식, 풀이절차, 구해야 할 것을 모두 정확하게 찾아낼 수 있는 기회를 제공하고, 필요한 도움을 발문형식으로 제공한다. 둘째, 추출한 수학적인 요소들 사이의 관련성을 단계적으로 찾을 수 있도록 문제를 세분화시킨 하위문제 형식으로 제공한다. 셋째, 본질적으로 동일한 유형의 문제를 체계적으로 제공하여 분석-종합적인 지각이 보다 빠르게 일어나도록 유도한다.

3) 세 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 주어진 문제가 어떤 유형의 문제인지 파악하도록 유도한다. 둘째, 문제에서 구해야할 것이 무엇인지 정확하게 찾도록 유도하기 위해 적절한 발문과 도움을 제공한다. 셋째, 정보 수집을 통해 한 가지 풀이 방법을 추측하도록 하고, 이를 통해 정보수집이 문제해결의 방향설정과 연결되도록 도움을 제공한다.

4) 네 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 주어진 문제해결과 관련된 이미 알고 있는 정보를 나열하도록 하고, 나열된 여러 자료와 주어진 문제의 구체적인 자료를 비교하여 적용 가능한 타당한 자료를 결정하도록 한다. 둘째, 일반화할 수 있는 능력의 향상을 위해 주어진 문제유형에는 비본질적이나 구체적인 변형에 본질적인 가능한 다양한 유형의 체계적인 문제를 학생들에게 제공한다. 셋째, 주어진 문제해결을 위한 풀이방법의 주된 흐름이 무엇인지 생각하도록 하고 이것을 통해 적용 가능한 다른 상황에 준비하도록 한다.

5) 다섯 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 주어진 구체적인 문제를 해결하고 주어진 문제와 풀이과정에서 불변인 요소와 가변인 요소를 추출하도록 한다. 둘째, 동일한 유형의 잘 조직된 체계적인 연습을 통해 본질적인 것을 찾을 수 있는 기회를 제공한다. 셋째, 구체적인 자료를 제시하고 이를 통해 일반적인 규칙을 추측할 수 있는 귀납적 사고의 기회를 제공한다. 제시된 추측의 타당성을 확인하여 본질적인 것, 즉 새로운 개념을 형성하도록 한다.

6) 여섯 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 문제해결을 위한 기본 추론과정을 설정하고, 이를 바탕으로 상세한 추론과정을 학생들이 찾을 수 있도록 한다. 둘째, 동일한 추론과정의 유사한 유형의 문제를 제시하여 추론과정의 단축을 유도한다.

7) 일곱 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 주어진 문제를 해결하는 과정에서 유추적인 사고를 할 수 있는 교수학적인 경험을 적극적으로 제공한다. 둘째, 몇 가지 가능한 전형적인 풀이 방법을 학생들에게 제시하고, 이들 풀이 사이의 상호관련성을 탐구한다. 셋째, 학생이 해결한 풀이 방법을 전체 학생에게 제시하고, 제시된 여러 가지 풀이 방법에 대한 학생 개개인의 생각을 적을 수 있도록 하고, 적은 내용을 바탕으로 토론의 기회를 제공하여 자신의 생각을 정리한다.

8) 여덟 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 순행문제와 역행문제를 동시에 제시하고, 순행문제와 역행문제를 연역 논리적 절차에 의해 체계적으로 해결하는 방법을 결정한다. 둘째, 순행문제의 해법으로부터 역행문제 해결을 위한 관련성을 탐색하여 역행결합을 형성하도록 한다. 셋째, 역행문제를 순행문제와 별개로 하여 독립적인 문제해결 방법을 결정하도록 한다.

9) 아홉 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 이미 학습한 수학적인 사실을 이용하여 문제를 해결한 풀이 방법과 새로 학습한 수학적인 사실을 이용하여 문제를 해결한 풀이 방법을 서로 비교하도록 한다. 둘째, 이미 학습한 수학적인 사실들로부터 새로 학습한 수학적인 사실을 유도하게 하거나 이들 수학적 사실 사이의 상호 관련성을 찾도록 한다. 셋째, 새로 학습한 높은 수준의 수학적인 정리나 사실들만을 사용하여 문제를 해결하도록 하는 경험을 제공한다.

10) 열 번째 하위요소를 고려하기 위해 풀이절차의 논리적인 연결고리가 아주 섬세하게 연결되도록 문제를 해결한다. 이미 알고 있는 수학적 개념이나 원리로부터 추론의 고리를 잘 연결하여 체계적인 절차로 문제를 해결하도록 한다. 이러한 활동은 먼저, 일반적인 풀이절차를 탐색한 다음, 풀이절차에 대한 정교한 풀이과정을 세분화하도록 요구한다.

11) 열한 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 자신이 해결한 해법을 되돌아보고 어떤 방법으로 정확하게 해결하였는지 자신의 생각을 정리하고 기록할 수 있도록 한다. 둘째, 자신이 해결한 해법에서 사용된 수학적 사실을 확인하고, 주어진 것과 구할 것, 배경지식으로부터 이

용 가능한 새로운 수학적 관계성을 찾을 수 있는 기회를 제공한다. 셋째, 새로 학습한 수학적인 개념과 새로운 수학적인 생각을 바탕으로 다른 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 유도하고 적절한 도움을 제공한다.

12) 열두 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 문제해결에 사용된 개념이나 정리, 수학적 사실을 찾고 기억하도록 한다. 둘째, 문제해결 과정의 전형적인 틀이나 일반적인 유형을 찾고 기억한다. 셋째, 문제 풀이에서 본질적인 것과 비본질적인 것, 일반적인 것과 특수한 것, 추상적인 것과 구체적인 것을 찾고 본질적, 일반적, 추상적인 것을 기억한다.

13) 열세 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 사용한 수학적 사실과 기억해야할 대상들과의 관련성을 탐구한다. 둘째, 이미 알고 있는 문제해결 과정의 전형적인 틀과 새로 기억할 전형적인 틀의 본질적인 차이점을 분별하고 기억한다. 셋째, 기존 지식과 기억할 본질적이고 일반적이고 추상적인 것과 관계를 만들면서 기억한다.

14) 열네 번째 하위요소를 고려하기 위해 첫째, 수학적 개념을 정착하기 위한 수학적 경험을 제공한다. 둘째, 획득된 개념이 문제사슬을 통해 점진적으로 높은 수준으로 옮겨가도록 한다. 셋째, 수학적 탐구활동을 위한 수학적 경험을 제공한다.

지금까지의 연구결과를 통해 중학교 기하교육에서 개인차를 고려한 구체적인 학습방법을 탐색할 수 있었고 실제 교실에서 개인차를 고려한 교육이 실현될 것을 기대한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 2007년 개정 교육과정 개요, 서울 : 교육인적자원부.

권영인 · 서보억 (2005). 수열단원을 중심으로 개인차를 고려한 교과서에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(1)**, pp.137-149.

김환희 (2006). 개인차를 고려한 수준별 이동식수업의 실태분석, 부산외국어대학교 교육대학원 석사학위논문.

서보억 (2008). 중학교 기하교육에서 개인차에 기반한 교수-학습에 대한 연구, 경상대학교 대학원 박사학위논문.

이성헌 · 이지흠 (1960). 기하대전, 서울 : 정문사.

오세길 (2005). 인지능력의 개인차를 고려한 수학지도 방법 연구, 조선대학교 교육대학원 석사학위논문.

조윤동 (2002). 비고츠키이론의 수학교육적 적용에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

한국교육과정평가원 (2004). PISA2003 결과 분석 연구, 연구보고 RRE 2004-2-1, 서울 : KICE.

한글학회 (1992). 우리말 큰 사전, 서울 : (주) 어문각.

한인기 (1998). 깔야긴의 수학 문제 분류, 대한수학회 뉴스레터, **62**, pp.20-25.

한인기 (2001). 콜모고로프와 수학적 재능에 관한 그의 이론, 한국수학사학회지, **14(1)**, pp.73-82.

한인기 (2003). 한 가지 수학문제의 교육적 분석 및 관련된 문제의 체계화에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, **24(1)**, pp.57-67.

한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, **7(1)**, pp.37-48.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남 : 경상대학교출판부.

Bransford, J. D., Zech, L., Daniel, S. & Vye, N. (1996). Fostering mathematical thinking in middle school students : Lessons from research. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp.203-250). Lawrence Erlbaum Associates.

Carroll, J. B. (1996). Mathematical abilities : Some results from factor analysis. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.),*The Nature of Mathematical Thinking* (pp.3-25). Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*(pp.253-284).Lawrence Erlbaum Associates.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton : Princeton University Press.

Gusev, B. A. (1995). *Geometiya-6*. Moskva: Avangrad.

Gusev, B. A. (2005). *Sbornik zadach po Geometrii 5-9 Klassii*. Moskva : Oniks21vek.

Kloosterman, P. & Gainey, P. H. (1993). Students' thinking : Middle grades mathematics. In D. T. Owens(Ed.), *Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics*(pp.3-21). Macmillan Publishing Company.

Krippendorff, K. (1980). *Content analysis : An introduction to its methodology*. California : SAGE Publication Inc.

Krutetskii, V. A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren. In J. Kilpatrick, & I. Wirszup(Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (pp.59-104). University of Chicago Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago : University of Chicago Press.

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp.29-53). Lawrence Erlbaum Associates.

Petrovsky, A. V.(김정택 역) (1993). 인간행동의 심리학. 서울 : 사상사.

Poincaré, H. (김형보 역) (1983). 과학의 방법. 서울 : 단국대학교출판부.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotsky, L. S. (조희숙 · 황해익 · 허정선 · 김선욱 역) (2000). 비고츠키 사회 속의 정신. 서울 : 양서원.

Werdelin, I. (1958). *The mathematical ability*. Lund : Gleerups.

Wicett, M., Ohanian, S. & Burns, M. (김진호 · 홍은숙 · 황혜진 역) (2007). 구성주의 수학교실. 서울 : 경문사.

A Study on Teaching Methods of Geometry Based on Individual Differences in Middle School

Kwon, Young-In
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University
E-mail : yikwon@gnu.ac.kr

Suh, Bo-Euk
A lecturer at Department of Mathematics Education, Kyungpook National University
E-mail : eukeuk@hanmail.net

This study is to develop the methods of specifying teaching that can consider individual differences in middle school geometry education. The purpose of this study is to decide the variations causing individual differences and to find the proper learning methods considering the variations. Through literature review, this study made it clear that the matter of individual difference is just the matter of talent and examined what factors make up mathematical talents. On the basis of the result, five important variations and fourteen subordinate factors were determined. I researched into the learning methods that consider the determined subordinate factors using the 'congruence' unit of middle school textbooks and developed specific learning methods for each of the subordinate factors through specific congruence problem solving situations.

This study can be summarized as follows :

I researched the studies of mathematical ability conducted by several educators and psychologists. This research is divided into the early study and the developed study of mathematical ability. Through this study five specific variations were determined. And fourteen subordinate factors have been made from the determined variations.

The specific learning methods based on individual differences was developed according to the fourteen subordinate factors on the basis of middle school textbooks of Korea, Gusev's textbook, problem books of Russia, and etc.

* ZDM Classification : G13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Geometry Education, Individual Difference, Factor of Individual Difference, Mathematical Ability