韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2008. 05. 제 47권, 제 2호, 155-168

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2008, Vol. 47, No. 2, 155-168

수학적 표현의 교수학적 의의

김 영 국 (서원대학교)

Ⅰ. 서 론

수학적 개념의 인식과 그의 표현에 관한 능력을 기르는 것은 수학 교육의 출발인 동시에 중요한 목표 중의 하나이다. 그러나 수학교과의 특성상 이를 효과적으로 교육하는 것은 결코 수월한 문제가 아니다. 이것은 많은 학생들이 수학적 문장을 이해하는데 곤란을 겪고 있다고 생각하는 것만 보아도 분명히 알 수 있는 사실이다(김영국, 박기양, 박규홍, 박혜숙, 박윤범, 유현주 등, 2001). 수학적 개념의 인식과 그의 표현 능력은 수학적 의사소통 능력과도 직결되어 있는 요소이다. 그리고 수학의 교수·학습에서 교사와 학생, 학생 상호간의 원활한 수학적 의사소통은 성공적인 교육을 위한 필수적인 요소이다. 수학적 의사소통이 가능하기 위해서는 수학 내용에 대한 문장이나 기호, 수식, 도표, 그래프 등 다양한 수학적 표현의 의미를 해득할 수 있어야 하는 한편 인식된 수학적 내용에 대한 자신의 생각을 표현할 수 이어야 한다. 그래서 어떤 대상을 인지구조 속에 인식하거나 인지된 개념을 언어, 그림, 기호 등의 수단을 써서 외부로 나타내는 활동은 수학적 의사소통을 가능하게 해주는 필수적 활동으로서 수학의 교수학습에서 중시해서 다루어야 할 과제이다. 수학적 개념의 인지 및 그의 표현에 대한 주제는 인식론의 과제로서 오랜 역사를 가지고 있다 (Seeger, Voigt & Waschesio, 1998). 이들 주제는 수학적 표현론(mathematical representation)이란 명칭으로 학교수학의 교수에 대한 중요한 이론으로 인식되어 있으며, 미국의 NCTM에서 발행한 "교육과정과 평가의 규준"에서는 다음과 같이 권고하고 있다(NCTM, 1989).

- 학생들은 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 교환하기 위하여 수학적으로 표현할 수 있고 표현을 활용할 수 있어야 한다.
- 학생들은 문제를 해결하기 위하여 수학적 표현을 선택하고, 적용하고, 변형시킬 수 있어야 한다.
- 학생들은 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하기 위하여 표현을 활용할 수 있어야 한다.

이 권고가 보여주듯이 수학적 표현은 수학적 아이디어의 창조와 문제해결을 위하여 다양한 수학적 표현을 시도하고 그들을 활용하는 것과 밀접하게 관련되어있다. 다시 말하면, 수학적 표현은 학생들로 하여금 수학적 사고와 개념 및 이들의 활용에 대해서 더욱 적극적이고 창의적으로 접근하도록 유도하기 위한 전략과 관계된 내용이라는 것이다. 그래서 수학적 표현은 새로운 개념의 이해와 같은 인지적인 활동뿐만 아니라, 다양한 수학적 표현을 궁리하고, 물리·사회적 현상을 모델링하고, 토의하는 등의 활동을 통하여 수학에 대한 자신감과 긍정적인 성향을 기르는 정의적 활동까지도 내포하고 있는 내용이다. 수학적 표현이 가지고 있는 이와 같은 특성으로 볼 때, 표현에 대한 효율적인 훈련은 TIMSS 2003 보고서(Mullis et. al., 2003)에 발표된 바와 같이 "수학에 대한 흥미", "수학에 대한 태도" 등과 같은 항목에 대한 국제비교에서 상대적으로 약한 것으로 밝혀진 우리학생들의 정의적 태도를 개선하기 위한 방책으로서도 충분한 의의가 있다. 이 밖에도 수학적 표현에 관한 훈련은 수학적 발견 및 문제해결과 직접적으로 관련되어 있어서 학교수학의 교수·학습에서 높은 관심을 가지고 다루어야 할 중요한 영역이다. 김영국(2006)은 한국과 미국의 15세 학생들을 대상으로 인지적 영역의 수학적 성취도에 대한 특성을 비교하는 연구를 수행한 바가 있는데, 그에 의하면 우리 학생들은 문장제 문제나 적용, 분석·종합과 같이 수학적 표현 능력이 중요하게 관계되어 있는 문

* 2008년 2월 투고, 2008년 5월 심사 완료.
* ZDM 분류 : C33
* MSC2000 분류: 97C50
* 주제어 : 수학적 표현, 내적표현, 외적표현, 수학적 표현의 의의, 수학적 표현 관련 수학기피 원인.

항에서는 지식, 이해 단계[2]의 정신 능력을 요하는 문항에 비해서 수월성이 약한 것으로 나타났다(<표 1> 참조). 이상의 사실로 미루어 보더라도 학교수학의 교수에서 수학적 표현에 대한 교육을 더욱 강화해야 할 필요가 있음을 알 수 있다.

<표 1> 한국 (K), 미국 오하이오주(A) 10학년 학생들의 수학적 능력 특성 비교

K-A (정답률)	평균 정답률 차이의 단계별 요구되는 수학적 능력
41%이상	*일상적으로 쓰이는 친숙한 공식의 기억. (지식) *유리수의 대소 관계 및 소수 표현에 관한 지식 (지식) *유리식의 덧셈, 이차방정식의 근과 계수와의 관계 (낮은 정도의 이해)
31~40	*일차식의 동치변형과 같은 계산 기능 (이해) *표준형인 일차, 이차, 연립방정식의 해 구하기 (이해)
21~30	*여러 형태의 수식, 약분, 지수의 계산 능력 및 표준적인 지수방정식의 해를 구하는 절차를 수행하기 (이해)
11~20	*둘 이상의 구체적 단계가 포함된 상황을 수학적 모델로 표현하고, 단계 상호간의 관계성을 파악해서 문제 해결하기 (적용)
-9~10	*개념이나 원리를 다양한 표현과 응용에 적용하는 능력 (적용)
-10이하	*주어진 조건의 관계적 이해를 통한 응용문제 해결력(분석·종합)

수학적 표현 능력은 수학기피 원인과도 밀접하게 연관되어있다. 김영국 외(2001)등이 밝힌 수학기피 원이에 따르면 학생들은 중등학교 수학의 전반에 걸쳐서 '용어나 기호 등의 의미를 이해할 수 없어서', '교과서나 참고서를 읽어도 무슨 뜻인지 알 수 없어서', '응용문제를 수식으로 나타내는 것이 어려워서' 등과 같은 이유 때문에 수학을 싫어하는 것으로 드러났다. 이와 같은 이유는 어느 교수·학습의 현장에서나 피하기 어려운 공통적인 문제일 수는 있으나 수학적 표현의 관점에서 개선을 위한 효과적인 방안을 강구 할 것을 요구하는 이유들이다.

수학적 표현에 대한 관심은 근본적으로 '학생들은 어떻게 해서 수학을 배우나?'하는 학습이론과 연계되어 있다(Cuoco & Curcio, 2001). 그리고 이에 대한 연구는 역사적, 철학적 배경에 대한 이론적인 탐구에서부터 구체적인 표현 방안과 관련된 연구에 이르기까지 매우 다양한 양상이다(Janvier, 1993; Lamon, 2001; Seeger et al., 1998; Davis, 1997). 전미수학교사협의회(NCTM)는 "2001 Year Book"으로 "학교수학에서 표현의 역할(The Role of Representations in School mathematics)"을 통하여 교수·학습에서 표현의 역할에 대한 여러 연구결과를 분야별로 분류 발표하였다(Cuoco & Curcio, 2001).

국내의 연구로는 수학적 표현과 관계가 있는 수학적 의사소통에 대한 연구가 주류를 이루고 있다. 이종희, 김선희, 채미애(2001)는 수학적 의사소통 능력을 평가하기 위한 기준을 설정하는 것에 대한 연구를 수행하였고, 이미연, 오영열(2007)은 수학적 과제를 암기형, 절차형, 개념원리형, 탐구형으로 분류해서 각 유형에 따라서 학생들의 의사소통 참여, 수학적 정당화 유형, 수학적 합의과정이 어떻게 달라지는지에 대하여 탐구하였다. 이밖에 구체적인 수학적 기호의 활용에 대한 연구로는 이종희, 김선희(2003)의 등호(=)개념 분석 및 학생들의 이해에 관한 연구가 있다. 본 연구에서는 수학적 표현에 대하여 다음을 연구하였다.

첫째, 수학적 표현의 개념 고찰

둘째, 학교 수학의 교수에서 수학적 표현에 대한 지도가 가지는 교수학적 의의

셋째, 중등학교 수학의 각 영역별 수학적 표현 관련 기피요인 및 그의 지도 방향

이들에 대한 연구의 결과는 수학적 개념의 형성에 작용하는 인지활동을 분석적으로 고찰하기 위한 방안을 제시하는 의의가 있으며, 수학적 표현이 가지는 교수학적 의의를 살펴봄으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 함양하기 위한 전략을 수립하는데 유용할 수 있을 것이다. 또한, 학교수학의 각 영역에 대한 표현과 관련된 수학기피원인에 대처하기 위한 방안을 탐색하는 전략을 마련하는 데에도 도움이 될 것이다.

2) B. S. Bloom (1956)은 교육목적을 "지식, 이해, 적용, 분석·종합, 평가"의 5단계로 분류했다.

II. 수학적 표현의 의미

표현(Representation)은 마음속의 생각을 외부로 나타내어 보이는 행동 또는 나타낸 것 자체를 의미한다. 그러므로 표현이 일어나기 위해서는 먼저 표현하고자 하는 대상이 인지구조 속에 인식되어 있어야 한다. 그러나 인지구조에 새겨지는 인식은 사고의 결과일 수도 있으나 외부적인 자극을 인지해서 구성될 수도 있다. 일반적인 의미의 표현은 광범한 의미를 내포하고 있다. 그것은 인식론의 고전적인 주제로서 19~20세기에 들어서는 현상학과 언어철학에서까지 활용되어 왔다. 그것은 또한 심리학이나 인지과학의 주된 개념이며, 오늘날 지식의 표현에 관한 관심은 인공지능 관계분야의 주제로 되어있다(Pyke, 2003).

원래 초보적인 의미의 표현은 형상을 그려내는 그림이었다. 그런데 그림의 역할은 점차 상징성으로 발전되어 기호로 바뀌게 되었다. Seeger et al.(1998)는 표현의 의미가 '그림'의 역할, 즉, 나타내고자 하는 것과 나타내어진 것 사이의 유사성이라는 테두리를 벗어나, 더욱 자유로운 다양한 기법을 채용할 수 있게 된 것은 Leibniz가 상태나 개념을 나타내기 위하여 '기호'를 도입한 것에서부터라고 설명하고 있다.

표현의 개념이 '그림'의 의미에 '기호'의 의미가 첨가된 것은 수학의 발전이라는 관점에서도 매우 중요한 의미를 지니는 사건이었다. 수학은 인간 사유의 종합적 작품이다. 즉, 수학적 표현에는 사회·문화적인 요인에서부터 인식론, 심리학, 언어 철학 등 여러 영역에 걸친 다양한 영향이 개입될 수 있다. 이에 학자들은 대체로 수학적 표현에 대한 통일적인 정의를 하려 해도 결과적으로는 특정 분야에 연관된 한정된 내용을 주장하는 수준에서 벗어나기 어렵다고 생각하고 있다(Janvier, Girardon & Morand, 1993 재인용). 그래서 Janvier et al.(1993)는 표현의 의미에 대한 일의적인 정의를 도출하는 대신 구체적 표상은 사고 주체의 정신 가운데 대응하는 인식물의 존재성을 표하는 것이라는 사실에 착안하여, 표현의 두 가지 구성요소로서 일반적으로 인정되고 있는 내적 표현과 외적 표현의 특성을 밝히는 방식을 취했다.

"우리들은 수학적 표현에 있어서 핵심적 사항은 구체적인 기호(즉, 의미를 나타내는 표시, 인식의 표상)와 아이디어, 즉, 개념(나타내어진 의미)을 구분하는 것이라는 데 대해서 공감했다. 외부로 나타난 구체적인 표시(예를 들면 그래프 등)는 사고 주체의 정신 속에 새겨져 있는 인식과 대응되어 나타난 것이기 때문에 수학적 표현은 외적표현(external representation)과 내적표현(internal representation)이라는 개념으로 구별할 수 있다. 외적 표현이란 도표, 테이블, 그래프, 다이아그램, 모델, 컴퓨터그래픽, 정형화된 기호체계 등과 같이 감각기관에 자극을 주는 것을 의미하며, 종종 아이디어나 개념을 구상화 한 것이라는 의미를 갖는다. 이에 반해 내적 표현은 마음속에 존재하는 관계로 직접적인 관찰이 불가능해서 그 특성은 한결 애매할 수 있다. 그것은 인지적 또는 정신적인 것으로 간주되거나 쉐마(schema), 개념, 정신적 대상물이라고 불리기도 한다. 간단히 말해서, 내적 표현은 개념이나 추상적인 의미를 이해하여 마음에 새기는 것을 의미하고, 외적 표현은 마음속에 새겨진 인식물이나 개념을 기호나 적절한 수단을 써서 외부로 나타낸 것을 의미한다. ---중략--- 외적표현은 단순히 기호 자체만 활용한 구문론적인 입장이고, 내적표현은 의미론적인 입장이다."

이들의 견해는 표현자의 인지구조 속에 새겨져 있는 인식을 밖으로 표현해 내는 것뿐만 아니라 인식작용 자체도 표현의 과정이라는 입장이다. 이에 대해서 Cuoco & Curcio(2001)는 "외적 표현은 우리가 다른 사람들과 쉽게 의사소통을 하는 표현으로서, 예를 들면 종이 위에 나타낸 표시, 그림, 기하학적 스케치, 방정식 등과 같은 것이다. 그리고 내적 표현은 묘사하기가 훨씬 어려운데, 수학적 대상이나 과정에 대해서 마음가운데 새긴 이미지이다."라고 설명했다.

표현이 가지고 있는 이와 같은 이원적 구조의 관점은 인식 대상의 본질적 의미를 인식하는 것과 인식된 개념을 외부로 나타내는 것을 표현의 본질로 파악하려는 것이다. 예를 들어 아름다운 경치에 감탄해서 이를 표현하고자 하는 경우에도 경치의 아름다움에 대한 인식이 마음 가운데 형성되어야 시나 그림 등을 이용하여 외적으로 표현하는 것이 가능하게 되기 때문이다. 이와 같은 관점을 수학적 표현의 경우로 적용하면, 수학적 표현은 '어떤 수학적 원리나 개념을 인식했는가?'하는 것과 '인

식된 원리나 개념을 외부에 어떤 모습으로 나타내는가?' 하는 두 가지 요소가 상호 작용하는 것이라고 정의할 수 있다. 예를 들어 꾸불꾸불한 길에서 굴렁쇠를 굴리는 상황을 표현하는 경우를 가정한다면, 일반적 표현과는 달리 수학적 표현은 거리, 시간, 속도와 같은 추상적 개념의 관계적 상황 변화에 대한 인식이 선행되고 이들을 대응표, 그래프, 기호 등을 이용하여 외적으로 표현하는 방안을 강구하게 된다. 그리고 이런 과정을 거치면서 이들 내적·외적 표현과정이 상호 작용하여 문제 상황을 구성하고 있는 거리, 시간, 속도 등 수학적 개념들의 관계를 더욱 명료하게 인식할 수 있도록 상승작용이 일어날 수 있다.

이와 같이 수학적 표현은 수학적 대상을 인지구조에 인식하는 것과 인식된 개념의 외적 표현이 하나의 쌍으로서 대응을 이룸으로써 의미를 가지게 된다. 그래서 이미 일반적으로 알려진 단순히 '수학적으로 표현되어 있지 않은 상황을 기호나 용어, 문자 등을 사용해서 수학적인 표현으로 전환하는 것'을 수학적 표현으로 이해하는 것은 학교수학의 교수·학습 관점에서 보면 큰 의미를 부여하기가 어렵다. 이것은 수학적 표현의 외적 의미만을 고려한 좁은 의미의 표현으로서 개념 학습의 주 관심인 인식 행위에 대한 심리적인 고려가 제외되어 있기 때문이다. 이와 같은 정의는 다음과 같은 Cuoco & Curcio(2001)의 주장과도 매우 관련이 깊다.

"표현은 연계도와 같은 것이다. 표현은 결코 표현의 원천(이미 표현된 상태)도 아니고 목표(더 잘 이해되는 상태)도 아니다. 학생이 수를 수직선에 나타낸다고 할 때, 수직선위에 나타낸 점은 표현이 아니다. 표현은 수와 점사이의 대응을 구성하는 그 자체인 것이다. 또, 표현은 단지 대응만을 뜻하는 것이 아니다. 표현은 구조를 보존해야 한다. 계산기에 대수적인 식을 입력시키는 것은 그 것만으로는 표현이 아니다. 그러나 (외적)표현에 이용된 대수적 연산과 구체적 상황의 변화가 상호 대응한다면 그것은 진정한 표현이다. 즉, 표현이란 대상과 변환이라는 한 쌍을 타 대상과 그의 변환이라는 다른 쌍에 대응시키는 패키지(package)이다."

학교수학의 교수·학습은 주로 새로운 개념을 획득하고 이를 새로운 환경에 적용하는 경험을 통하여 수학적으로 문제를 해결하는 능력을 기르는 것과 관련된 행위로 이루어져 있다. 그리고 문제해결에서는 필연적으로 문제 상황의 인식과 함께 상황을 이루는 요소들의 관계적 표현을 요구한다. 따라서 표현의 수학 교수학적 의미는 표현자의 인지구조 속에 새겨져 있는 인식을 밖으로 표현해 내는 것만이 아닌 인식행위 자체와 함께 이 둘의 상호작용까지 포함하는 것이 되어야 한다. 수학적 표현에 대한 이와 같은 분석적 관점은 과학적 언어로서의 수학의 역할과 수학적 개념의 인식 원리 등을 밝히려는 노력에 더욱 효율적으로 활용될 수 있는 전략을 마련하는데 도움이 될 수 있다.

III. 수학적 표현의 교수학적 의의

수학적 표현은 수학적 개념의 인식과 표현에 관한 주제로서 수학적 의사소통의 근원이기도 하다. 그래서 수학적 표현은 수학의 교수·학습과 관련한 문화 · 역사적 요인, 학습 심리적 요인 등 여러 관점과 연계되어 있다(Seeger et al., 1998). 여기서는 앞에서 고찰한 의미의 수학적 표현, 즉, 내적 표현과 외적 표현의 상보작용이라는 관점의 수학적 표현이 학교 수학의 효율적인 교수·학습과 관련하여 어떤 의의를 지니는지에 대해서 알아보고자 한다. 한편 오늘날의 학교수학은 내용이나 이론전개에 있어서 20세기 초엽이후 확립된 현대수학의 학문적 특성과 밀접하게 연계되어있다. 그래서 현대 수학이 가지고 있는 추상성, 공리적 이론전개, 기호의 사용 등과 같은 특성은 학교수학의 교수에서 중요하게 고려해야 할 대표적인 특성인 것이다(박한식, 1982). 이와 같은 관점에서 수학적 표현이 가지는 교수학적 의의를 살펴보면 다음과 같은 사항을 들 수 있다.

1. 학교수학의 교수·학습을 위한 전략

현대수학의 가장 두드러진 특성은 내용이 추상적이라는 점과 공리적인 이론전개 방법을 따르고 있다는 점이라고 말할 수 있다. 이것은 유클리드 이래로 꾸준히 지켜온 특성이었는데 20세기에 접어들면서 힐버트가 수학을 '수학적 진리는 현실적 진리와 부합해야 한다.'는 속박으로부터 해방시킨 공리주의를 주창한 이래 확고하게 자리 잡은 현대수학의 특성이다(김응태, 김년식, 1980).

Russell(1903)은 수학에 대해 참과 거짓이 기본적인 논리적 개념을 이용해서 판단되는 연역적 체계라고 하면서 "순수수학이란 $p \rightarrow q$ 형태의 명제들의 클래스이다."라고 정의하기도 했다. 오늘날에는 수학을 '패턴이라고 불리는 추상적 성질을 공리적으로 체계화하고 그들 사이의 관계를 밝히는 학문'이라고 보는 관점이 일반화 되어있다(Stewart, 1995). 수학의 의미에 대한 이와 같은 관점은 수학교육의 영역에서도 기본적인 관점으로 간주되고 있으며, 수학의 발달 원리도 '현 단계의 패턴이 다음 단계의 패턴을 구성하기 위한 대상이 되는 방식', 즉, 메타인지적 과정을 밟아가는 것으로 되어있다. 이와 같은 관점은 교육과정 구성의 일반적 원리가 되어 있는 형편이다. 그래서 초등과정에서는 주로 현실 경험세계의 구체적 대상을 활용하여 직관적인 방법으로 교육과정의 각 영역을 다루다가 중등에서부터는 변수적 의미의 문자와 기호를 사용하여 초등에서 배운 원리나 결과를 추상화하는 방식으로 이론을 전개하는 경향을 띄고 있다. 수학은 이와 같이 전 단계에서 이룩한 수학적 지식들로부터 공통적 성질을 추상화하는 방식으로 일반화되어 나가기 때문에 고등수학으로 갈수록 다루는 개념은 더욱 추상적으로 되는 동시에 선·후의 개념사이의 관계가 깊어진다는 특성을 지닌다. 그 결과 수학은 상급으로 갈수록 상식만으로는 이해하기 힘든 전문적인 용어나 개념을 많이 사용하게 마련이어서 체계적으로 학습이 되어있지 않고서는 수학적 문장을 이해하는 것이 갈수록 어려워지게 마련이다. 따라서 성공적인 수학의 학습을 위해서는 필수적으로 개념의 의미와 개념들 사이의 관계를 이해하는 높은 수준의 능력이 요구되게 된다. 수학적 표현은 바로 이와 같은 수학적 이론 전개 과정이라고 말할 수 있다. 즉, 새로운 패턴을 찾고, 그 패턴의 추상적 의미인 개념을 인식하고, 이를 외적으로 표현하는 과정은 수학의 학습이나 발전과정인 것이다. 그래서 학년이 올라감에 따라 추상적 개념을 활용하여 메타 인지적인 방법으로 점차 고급·심화 되는 수학을 성공적으로 학습하려면 수학적 표현에 관한 훈련과 경험이 필수적으로 요구된다. 수학교과의 이와 같은 특성을 감안한 교수 방법과 관련해서 Meyer(2001)는 "개념이나 기능의 학습은 오랜 기간에 걸쳐서 그리고 다양한 수준의 추상화를 통해서 이루어진다. 그래서 초기의 비형식적 수학 활동은 점차 정교하고 고급화된 개념을 구성하고 추상이 일어나게 하기 위한 구체적인 기초가 될 수 있도록 이루어져야 한다. 학생들은 그들의 창의력과 수학적 모델, 그림, 다이어그램, 표, 또는 기호와 같은 수학적 표현수단을 이용하여 추상적 수준과 구체적 수준사이의 간극을 메울 수 있어야 한다."고 주장했다.

이상에서 본 바와 같이 수학적 표현에 대한 훈련과 경험은 추상적인 특성을 가지고 있는 수학적 지식의 교수·학습을 위한 효율적인 전략인 것이다.

2. 과학적 의사소통 수단

수학적 이론 전개에 있어서 정확성과 명료성은 필수적으로 요구되는 조건이다. 이를 위해서 현대수학은 기호의 사용과 공리적인 이론전개 방식을 채택하고 있다. 그래서 수학적 문장을 해득하기 위해서는 기호와 용어의 의미에 대한 지식이 필요하다. 그리고 수학적 표현방식은 점차 일상적인 의사소통의 수단으로 인식되는 추세이다. 실 예로 함수, 미분·적분, 변화율, 필요조건, 충분조건, 각종 통계적 용어 등과 같이 이미 일상적 용어가 되어버린 수학적 용어는 상당한 정도이다. 이 밖에도 컴퓨터, IT, 금융, 광고 등 일상생활과 밀접한 관련이 있는 새로운 제도의 등장 배경에는 반드시 수학적인 아이디어와 용어가 등장한다. 이처럼 사회가 발전해 갈수록 의사소통은 대상뿐만 아니라 매체와 기술면으로도 다양해지게 마련인데, 수학적 용어의 이해와 그의 활용에 대한 경험은 다양하고 창의적인 사고와 분명한 표현, 논리적 추론능력을 기르는 중요한 수단인 것이다. 그래서 수학적 표현의 능력은 수학의 발전이나 학습과 관련된 수학 자체적인 측면뿐만 아니라 그의 활용 측면에서도 그 중요성은 더욱 커지게 마련이다. 즉, 의사소통 수단으로써 수학적 표현의 중요성을 인식하고 일상에서도 수학적 표현을 효율적으로 활용할 수 있는 능력을 기르는 것은 살아 있는 수학 교육을 위한 필수적 요소인 것이다.

3. 수학적 표현은 문제해결의 기반

수학적 지식은 그의 활용 범위와 적용의 다양성에 있어서 거의 제한을 없다는 특성이 있다. 즉, 수학적 지식

은 장소나 시간을 초월하여 현재뿐만 아니라 미래에 있어서도 다양한 문제를 해결하기 위한 도구로서 활용될 수 있는 잠재성을 가지고 있다는 특성이 있다. 이와 같은 특징은 수학적 사실이 개체의 특성을 무시한 추상적 성질이기 때문에 가능한 것이다. 그러나 수학적 지식의 이와 같은 범용성을 효율적으로 이용할 수 있으려면 필수적으로 다양한 문제 상황을 적절한 수학적인 모델로 표현할 수 있어야 한다. 문제 상황을 수학적으로 표현해야만 수학적 지식을 적용하여 문제를 해결할 수 있기 때문이다. 그리고 수학적 표현과정을 통해서 문제를 완벽하게 이해할 수 있게 되기도 한다. 또, 새로운 문제에 대한 수학적 표현은 새로운 수학적 지식의 창조를 가능하게 해주는 바탕이 되기도 한다. 케플러가 타원의 수학적 표현을 통하여 행성운동의 법칙을 확립한 것이나 오일러가 쾨니스베르그 다리를 한번씩 만 건너는 방안을 연구해서 한붓그리기 원리를 구안한 것과 같은 것은 좋은 예이다.

이상과 같은 인지적 측면에 뿐만 아니라 수학적 표현은 정의적인 면에서도 중요한 의의를 지닌다. 그것은 수학적 표현의 수행을 위해서는 자기 주도적 태도, 더욱 합리적인 내적·외적 표현을 추구하기 위하여 여러 시행착오를 통한 창의적 사고능력 등이 자연스럽게 길러지기 때문이다.

결론적으로 수학적 표현은 수학적 개념을 학습하기 위한 효율적인 전략으로서 특히, 학생들로 하여금 학교수학에 대해서 부정적인 인식을 가지게 하는 추상성, 다양한 기호와 공리적 이론 전개, 난해한 수학적 표현과 같은 요인에 대한 합리적 대응방안으로서 의의가 있다. 수학적 표현과 수학적 사고의 상호작용에 대한 Goldin & Nina(2001)의 다음과 같은 주장은 학교 수학의 교수·학습에서 수학적 표현이 가지는 의의와 함께 그의 유용한 활용 전략에 대해서 많은 점을 시사하고 있다.

"효과적인 수학적 사고를 위해서는 표현방식들에 대한 구조적 유사성(또는 상이함)뿐만 아니라, "동일한"개념에 대한 상이한 표현들 사이의 관계에 대해서 이해하는 것이 유용하다. 즉, 학생들은 다양한 표현방식과 상호작용할 수 있도록 적절한 내적표현을 개발해야 한다는 것이다. 이것은 외적표현이나 구조적 표현과 상호작용을 함에 있어서 적절한 의미를 부여하거나 정신활동을 수행하는 것과 함께, 이런 과정에서 흔히 나타나는 애매한 점은 그것을 극복해내야 한다는 것까지도 의미한다."

IV. 수학적 표현의 지도 방향

1. 행동주의, 구성주의, 수학적 표현

수학적 표현은 내적표현과 외적표현의 상호 작용으로 이루어진다. 이때, 내적표현은 인지구조에 대상을 인식하는 것, 즉, 학생이 자신의 정신 속에 개념의 의미를 구성하는 것을 의미하고 외적 표현은 내적으로 인식된 대상을 표현하는 것을 의미하였다. 표현이 가지고 있는 이와 같은 이원적 구조는 궁극적으로 학습에 관한 심리학적 영역의 한 분야로서 지난 반세기 동안 수학의 학습이론에 지대한 영향을 미쳐온 행동주의 및 구성주의와 어떤 방식으로든 연계되어 있다는 것이 사실이다. 행동주의는 1950~60년대에 풍미했던 학습이론으로서 학습에 대해서 전적으로 외부적으로 관찰 가능한 변수, 즉, 의도적인 자극에 대한 반응, 바람직한 행동의 강화 등으로 설명하고자 한 이론이었다. 즉, 그들은 학습 원리로서 내적인 인지작용에 대해서는 관심을 갖지 않는 입장이었다. 그래서 수학적 표현을 수학적 개념의 인지 원리라고 볼 때, 행동주의는 외적 표현을 중시한 입장이라고 해석하는 것이 가능하다. 이에 반해서 1980년대 이래 유행되어온 구성주의는 기본적으로 학습은 '학생이 각자의 주관적 경험을 통하여 스스로 내적인 인지상태를 구성함으로써'이루어지는 것이라는 입장이다(Ernest, 1996). 이와 같은 생각은 수학적 표현의 내적 표현을 중시하는 입장이라고 볼 수 있다. 그래서 수학적 표현은 학습에 대한 이들 두 입장을 모두 반영한 학습이론이라는 측면이 있다. 이에 대해 Goldin & Nina(2001)는 다음과 같이 이들 세 입장 사이의 작용을 조정하는 관점을 피력하였다. "학생들의 내적표현은 학습의 장에서 만나는 구조화된 외적 표현과의 상호작용을 통해서 발전한다. 그리고 학생들은 그것으로부터 새로운 외적 표현을 생성할 수 있게 된다. 개념을 이해하기 위해서는 내적표현 능력이나 유연성뿐만 아니라 상이한 외적표현들 사이의 연관성을 얼마나 잘 파악하는가 하는 것이 중요하다. 그래서 수학적 표현에 관한 연구는 이들이 공헌한 바를 무시하지 않고 각각에

대한 최고의 통찰을 끌어냄으로써 이들 두 관점을 종합하고 있다."

이와 같은 종합적 관점은 우리의 수학교육 현장에서도 중요하게 고려해야 할 전략이라고 판단되어진다. 우리나라는 1970년대 초부터 학습목표를 기술할 때 내용과 행동을 동시에 표현하는 방식으로 할 것을 권장했는데 이는 행동주의적 학습이론의 영향으로서 당시 수학의 교수·학습에 큰 반향을 불러일으켰었다. 최근에는 구성주의적 관점이 크게 유행하는 것 같다. 그러나 수학의 학습 원리로서 어떤 생각이 전적으로 옳고 다른 생각은 전적으로 그르다는 식으로 판단하는 것은 매우 위험할 수 있다. 이것은 그동안 학습에 대한 여러 심리학적 이론들이 새로운 사조에 의해서 대치되며 명멸을 거듭해온 과정을 보더라도 분명히 알 수 있는 사실이다. 심리학적 이론의 발전 원리는 주장과 비판을 통해서 합리적인 방향으로 나아가는 것이다. 이런 의미에서 앞에서 Goldin & Nina(2001)가 주장한 수학적 표현의 원리와 같은 통합적 관점은 새로운 방안에 대한 가능성을 준비하기 위한 출발일 수도 있다. 또, 이중 코딩이론(Dual coding theory)과 정보처리 모델을 기반으로 하여 구성된 전략적 표현(Strategic representation)술의 적용에 대한 Pyke(2003)의 연구는 수학적 표현의 다양한 활용에 대한 가능성을 보여주는 사례이다.

2. 수학적 표현의 활용 원리

앞에서 살펴본 바와 같이 수학적 표현은 학습에 대한 행동주의와 구성주의의 주장을 연계하는 교량으로서의 역할을 수행하는 데에도 의미가 있다. 이것은 수학적 개념의 인식을 위해서는 내적 표현과 외적 표현의 상보작용이 긴요하다는 것을 의미하는 것으로서 실제 교육의 현장에서도 중요하게 고려해야 하는 요소이다. 이와 관련해서 Seeger 외(1998)는 "학습 관련 문제를 해결하기 위해서 수학적 표현이나 조작을 활용하는 것이 별 효과가 없는 학생들이 많다. 왜냐하면 그런 학생들에게는 연계관계도 모르는 채, 수학의 내용에 대한 이해 외에도 왜 그렇게 표현하는지 표현의 의도도 이해해야 하는 새로운 문제를 야기하기 때문이다. 즉, 해결책이라고 내 놓은 방안이 새로운 문제를 야기할 수 있다."고 했다 (Fingerhut(1984), Seeger et al., 1998 재인용).

교수 방안을 마련함에 있어서는 교과의 특성을 충분히 고려하는 것이 효율적이다. 여기서는 앞에서 살펴본 수학적 표현의 교수학적 의의와 관련하여 수학적 표현을 지도 원리에 대해서 고찰하였다.

첫째로, 수학교과의 가장 두드러진 특성은 수학적 지식이나 개념이 추상적이라는 사실이다. 그런데 추상적 개념은 인식하는데 있어서나 표현하는데 있어서 구체적 대상물의 경우보다 훨씬 곤란한 경우가 많다. 왜냐하면 구체물은 시각, 청각, 감각 등 감각기관을 통하여 직관적으로 대상을 분명하게 인식하는 것이 용이한데 반해서 추상적 개념은 관념적인 논리적 추론을 통할 수밖에 없어서 개념의 정확한 실체를 파악하는 것이 어렵기 때문이다. 그리고 추상적 개념은 감각기관을 통해서 감지할 수 있는 구체적 대상이 아니라서 이를 인식하고 외적으로 표현하는 데에는 주관적 판단을 배제할 수가 없다는 문제점도 있다. 그래서 추상적 개념을 인식하는 방법으로는 일단 형성된 개념을 여러 사례에 적용해 봄으로써 시행착오를 거치며 점차 객관적 개념으로 인식하는 과정을 거칠 것이 요구된다. 수학적 표현에 대한 이와 같은 원리는 Seeger et al.(1998)가 추상적 개념의 수학적 표현 전략을 다루기 위해서 채택한 Z. P Dienes의 '추상화와 일반화에 대한 논의', J. S. Bruner의 'enactive, iconic, symbolic 표현'에 잘 나타나 있다[2]. 한편, 이들과는 달리 V. V. Davydov는 '추상에서 구체적 대상으로 전략'을 주장하였다(Seeger et al., 1998, 재인용). 그에 의하면, "학교에서의 학습은, 학교에 입학하기 이전 학습의 연장이 아니라, 이론적 개념과 지식을 목적으로 하는 전혀 새로운 형태의 활동이다. 그래서 이론적 개념은 오랫동안의 나선적인 '구체적 경험'의 끝이 아니라 바로 학교학습의 출발점에 있는 것"이라고 했다. 이와 같이 추상성은 개념의 수학적 표현에서 극복하지 않으면 안 될 무거운 과제이다. Davydov는 앞의 두 사람과 상반된 주

2) Dienes는 'Dienes 블록'이라는 구체물을 이용한 추상적 개념의 지도방안을 강구하였고, Buruner는 인간의 발달과 학습의 진행과정은 행동적, 회화적, 기호적 표현의 단계를 밟아간다는 이론을 주장했으며, Davydov는 '추상적 개념으로부터 시작해서 구체적 대상에 이르는 방식'의 교수전략을 주장했다. 이들은 공통적으로 추상적인 수학적 개념을 형성하는 것과 관련한 주장이다.

장을 하고 있지만 수학적 표현에서 추상성을 극복하는 것의 중요성을 공통적으로 거론하였다.

둘째, 수학의 이론전개에서는 그 의미를 짐작하기 어려운 용어와 기호가 많이 사용된다는 특성이 있다. 이것은 수학적 지식의 특성 때문에 피할 수 없는 현상이다. 즉, 추상적 개념이 생성될 때마다 그의 외적 표현을 위한 새로운 용어가 정의되어야 하기 때문이다. 수학적 용어나 기호가 다양하게 되는 또 다른 이유는 수학적 현상이나 사실은 상황과 사람에 따라서 상이한 용어나 기호를 채택할 수 있기 때문이다. 실 예로 뉴턴과 라이프니츠는 동일한 미분개념을 창조했으나 그들은 상이한 기호나 용어를 사용했던 것이다. 이와 같이 수학적 표현은 외적 표현의 다양성뿐만 아니라 내적 인식의 다양성도 허용된다. 수학적 표현의 다양성은 다음과 같은 현상을 수반하기도 한다(Janvier et al., 1993).

(1) 동음이의(Homonym) 현상 ; 하나의 표현에 대해서 여러 가지로 인식하는 현상.

- (x, y)는 복소수 $x+iy$, 평면상의 점 (x, y), 분수 등의 의미로 해석될 수 있다.
- $2x+3=4$에서 x는 미지수의 의미도 있지만, $y=2x+3$에서 $y=4$인 경우를 나타내는 것으로 해석 할 수도 있다.

(2) 이음동의(Synonym) 현상 ; 상이한 표현이지만 동일한 의미를 나타내는 현상.

* 1/2 와 2/4는 같다.

* ★ ★ ★ ★ ★와 5는 같은 의미이다.

* Df, $\frac{dy}{dx}$, f' 은 모두 같은 의미이다."

여기서 동음이의 현상은 주어진 외적 표현으로부터 다양한 내적 표현을 구성하는 현상이고 이음동의 현상은 상이한 외적 표현으로부터 동일한 내적 표현을 구성하는 현상이다. 그러나 다양한 표현도 오랜 시간을 거치면서 더욱 효율적이고 편리한 형태로 수렴되고 다수가 사용함으로 인해서 객관화 되는 과정을 밟게 된다. 또, 이와 같은 수렴 과정을 통해서 수학적 개념은 더욱 분명해지고 정교하게 다듬어진다는 장점도 있다. 이것은 숫자의 표기법, 함수개념 등 오늘날 사용하고 있는 여러 수학적 개념과 표현이 오랜 세월에 거쳐서 다듬어져 온 것이라는 사실에서도 알 수 있는 일이다.

수학적 표현의 다양성은 교수·학습의 관점에서도 중요한 의미를 갖는다. 학생들에게 다양한 수학적 표현의 경험을 제공함으로써 수학은 자유롭고 창의적으로 사고하고 표현하는 것이 가능한 교과라는 것을 일깨워 줄 필요가 있다. 수학이 가지는 이와 같은 자율성은 수학교과에 대해 '수학은 딱딱한 과목'이라는 부정적 인식을 가진 학생들의 생각을 바꿔줄 수 있을 것임은 물론 수학에 대한 자신감을 높여줄 수 있을 것이기 때문이다.

V. 학교수학의 표현 관련 기피원인의 분석 및 지도 방향

수학적 표현의 지도 전략은 학습 환경이나 교재 등 나라마다 상이한 차이가 있을 수 있다. 그래서 수학적 표현의 효율적인 지도 원리를 강구함에 있어서는 학생 변인을 중요하게 고려해야 한다. 즉, 효율적인 지도 방향이란 학생들이 수학적 표현과 관련해서 겪고 있는 어려움에 효율적으로 대처하기 위해서 수학적 표현의 원리를 감안한 전략을 수립하기 위한 방향을 의미하는 것이다. 그래서 본 연구에서는 먼저 우리 학생들이 가지고 있는 수학적 표현과 관련된 기피원인을 파악하였다(<표 2>). 이 표는 김영국 외(2001)가 학생들이 수학을 기피하는 요인을 설정하기 위한 연구를 수행하기 위하여 2000년 9월부터 10월 사이에 고등학교 1학년 남·녀 160명 및 중학교 2학년 남·녀 160명 총 320명을 대상으로 조사한 수학기피원인 중 수학적 표현과 관련된 내용이라고 판단되는 것을 수학 전반에 걸친 이유와 학교수학의 각 영역에 대한 이유로 나누어 나타낸 것이다. 이 표에서 중, 고 공통인 항목은 칸을 구별하지 않고 나타내었다.

<표 2>가 보여주듯이 수학적 표현과 관련된 수학기피 원인은 학교수학의 모든 영역에 걸쳐서 고르게 분포되어 있다. 그러나 각 영역별 이유들 사이에는 상이한 특성이 존재하는 것을 관찰할 수 있다.

<표 2> 표현 관련 수학기피 원인

영 역	중2 학생	고1 학생
전반적 이유	★ 수학은 교과서나 문제집을 읽어도 무슨 뜻인지 알 수 없어서 ★ 생각한 것을 수식이나 기호를 사용해서 나타내는 것이 어려워서 수학이 싫어진다. ★ 수학공식을 외워도 무슨 뜻인지 의미가 통하지 않아서 공부하기 싫어진다. ★ 수학시간에 사용하는 용어, 정의, 기호 등의 뜻이 낯설고 이해가 잘 안되어 싫다 ☆ 문장으로 주어진 문제를 식이나 그림으로 나타내어 푸는 것이 어려워서 수학이 싫다. ☆ 문제를 풀 때 표, 그림, 그래프로 나타내는 것이 어려워서 수학이 싫다.	
문자와 식	* 문장을 수식으로 바꾸기가 어려워서 * 문자식을 배워야 할 필요성을 몰라서	
	* 문자식에서 사용하는 여러 용어의 뜻을 이해하기 어려워서	* 실수, 무리수, 복소수 등의 개념이 어려워서
방정식 · 부등식	* 미지수, 문자, 등호, 부등호, 용어를 잘 모르거나 헷갈려서 * 식을 세워 활용문제를 풀기 어려워서 * 방정식, 부등식과 함수의 그래프를 연결시키는 것이 어려워서	
함수	* 함수에서 사용되는 용어 기호의 뜻이나 정의를 잘 몰라서 * 함수를 배워야 할 필요성을 몰라서	
	*함수의 그래프를 그리는 것이 어려워서 * 함수는 함수 부분 이외의 방정식, 부등식 등 여러 다른 부분과 연결되어 있어서	* 여러 함수의 그래프를 그리고 이를 이용하는 것이 어려워서 * 함수를 방정식, 부등식 등과 같은 다른 여러 분야에 활용하는 것이 어려워서 * 삼각 · 지수 · 로그함수의 정의가 생소해서 * 그래프 그리는 것이 복잡하고 잘 몰라서
도형	* 도형에 대한 여러 용어, 정의가 복잡하고 이해하기 어려워서 * 복잡한 도형을 그리는 것이 싫어서 * 도형 이외에 수식, 함수, 방정식 등 여러 내용이 복합되어 있어서 복잡하므로	
도형	* 도형의 방정식이 이해가 안 되어	* 도형을 수식으로 나타낸 방정식을 이해하는 것이 어려워서 * 부등식의 영역을 나타내는 것을 이해하기 어려워서
통계, 확률	* 대표값, 평균, 도수분포표, 표준편차 등 여러 가지 용어의 뜻을 알지 못해서	

1. 수학 전반에 대한 표현관련 기피의 특성

여기에 속한 항목들은 대체로 '내적 표현을 구성과 그것을 외적으로 나타내는 것이 어렵다'는 것, 즉, '수학적 표현이 어렵다'는 의미이었다. 김영국(2007)은 이들 기피원인들 중 일부를 포함하여 30문항으로 이루어진 수학기피 원인을 가지고 요인분석(Factor analysis)을 통하여 5가지 유형의 수학기피요인을 정의하였다. 그 결과에 따르면 전반적 이유에 해당하는 이들 6개 이유는 기초실력 부족관련 기피요인(★표시 항목)과 자신감 관련기피요인(☆표시 항목)에 속하는 것으로 나타났다. 이로부터 수학적 표현 관련 수학기피 이유는 기초실력 및 수학교과에 대한 자신감과 밀접하게 관계되어 있었다. 그러므로 이의 지도 전략은 이와 같은 실상을 고려하는 방향에서 설정하는 것이 합리적이다.

2. 학교수학의 5개 영역별 표현관련 기피원인의 특성과 지도 방향

수학은 논리적 추론을 통하여 원리나 개념을 추상해내는 학문이다. 이것은 학교수학의 교수 · 학습에서도 궁극적으로 추구하는 목표 중 하나이다. 그래서 이런 활동과 밀접하게 관련된 수학적 표현은 교수학적으로도 중요한 의미를 지닌다. 학교수학을 5개의 영역으로 구분해서 살펴본 영역별 기피원인의 특성과 그에 따른 지도 방향은 다음과 같다.

(1) 수와 식

학생들은 일상적인 언어를 사용해서 표현된 문장으로 주어진 상황을 문자를 이용하여 대수적으로 표현하는 것

에 대한 어려움을 나타내었다. 그런데 문장제 문제를 수식으로 표현하여 해답을 구하는 과정을 어려워하는 것은 비단 우리나라 학생들만 그런 것은 아닌 형편이다(김영국, 2006; Brenner, Mayer, Moseley, Theresa, Duran, Reed et al., 1997). 현재 우리의 교육과정에서는 중학교 1학년부터 대수적 표현을 다루기 시작한다. 이를 위하여 문자의 사용을 도입하고 문자가 나타내는 미지수, 변수 등 여러 개념을 소개해서 대수적 표현의 본질적인 의의를 깨우칠 수 있도록 하고 있다.

이 영역에 대해서 중학생들이 겪는 어려움은 여러 용어, 즉, 단항식, 다항식, 항, 동류항, 차수, 문자 등의 개념에 숙달하는 것으로 조사되었다. 이에 반해서 고등학생들은 실수, 무리수, 복소수 등과 같은 수 개념을 이해하는데 어려워하고 있는 것으로 나타났다. 즉, 문자식의 표현에서 나타나는 어려움은 중·고별로 내용은 다르지만 학생들이 처음으로 접하게 되는 추상적인 개념의 이해와 관련되어 있다는 공통점이 있다. 특히 중학생들은 초등과정에서 산술을 다루다가 중학교 과정에서 문자를 사용하는 대수로 전환되는 과정에서 요구되는 이해와 활용 능력이 장벽으로 작용하고 있다.

문자식은 여러 수학적 표현 중 가장 강력한 무기이다. 그럼에도 불구하고 그의 유용성이나 편리함을 제대로 인식하지 못하는 학생들이 많다는 현실은 이의 지도에 대해서 반성을 요하는 것으로 인식해야 할 것이다. 문자와 식은 산술에서 대수로의 전환을 위한 필수불가결의 도구이다. 그러나 단지 문자와 기호를 사용하여 표현하는 것이 대수적 표현을 위한 충분조건이 되지는 않는다. 문제상황과 수학적 표현 사이에 의미와 관계적 구조가 동시에 유지되는 표현이라야 진정한 표현인 것이다. 문자식의 지도 방향은 이와 같은 점에 유념해서 이루어 질 필요가 있다. 이에 대해서 우정호, 김성준(2007)이 연구한 대수적인 사고의 지도 원리는 유용한 결과를 보여주고 있다.

(2) 방정식과 부등식

이 영역에 대한 수학적 표현과 관련된 장애와 유의사항은 문자와 식의 경우와 매우 유사하다. 그것은 수학적 표현과 결부된 방정식의 해법에 대한 장애는 앞에서 언급한 대로 주로 문장제의 대수적 표현에 있기 때문이다. 사실 방정식의 지도는 문자와 식 및 함수 영역과 밀접하게 관련을 맺고 있다. 그래서 많은 경우 방정식의 지도에 관한 문제점은 독립적인 것이라기보다는 이들 두 영역과 연계해서 파악하는 것이 효과적이다. 그래서 Brenner et al.(1997)는 이에 대해 "문자식의 교수방법이 문제의 의미가 무엇인지를 파악하는 것과 같은 문제의 표현 기술에 대해서는 관심을 보이지 않은 채, 방정식의 해법과 같은 문자식의 연산기능에만 초점을 맞추는 방식으로 진행되어왔기 때문에 산술에서 대수로 옮겨갈 때 학생들이 어려움을 겪는다. --중략--수학시간에 수학적 표현을 이해하는 것에 대해서는 직접 가르치는 법이 거의 없다. 그 결과 표현에 대한 이해의 부족으로 인해서 학생들은 개념의 의미를 오해하게 되거나 수학의 학습에 대해서 공포를 느끼게 된다."고 언급하였다. 이와 같은 상황은 우리의 경우와 큰 차이가 없는 현실로서 수학적 표현전략은 비단 이 영역에 국한된 것만은 아니다.

(3) 함수

함수는 수학의 다른 영역과 달리 정의역과 공역이라는 두 집합이 관계되고 있어서 매우 역동적이라는 특성을 가지고 있다. 즉, 함수에 대한 이해를 위해서는 정의역과 공역의 특성 및 이들의 원소사이의 관계를 동시에 고려해야 하기 때문에 이는 대수나 기하처럼 하나의 집합에 대해서 구조를 살피고 연산을 시행하는 것을 위주로 학습하는 것과는 근본적으로 큰 차이가 있다는 의미이다. 사실 함수개념은 학교수학의 가장 중심적인 개념이다. 이와 같은 생각은 일찍이 1920년대부터의 것으로 "함수적 사고 없이는 수학에 대한 진정한 이해나 가치를 알 수 없다." 함수적 관계는 "우리가 일상생활에서 부딪히게 되는 모든 양적인 것과 관련하여 나타난다." 고 했다 (Brenner et al., 1997, 재인용). 함수의 의미는 매우 추상적인 것이어서 학교수학에서 이를 도입하는 방법 및 교수와 관련해서는 논의가 매우 활발하다 (Dubinsky & Guershon, 1992). 현재 제 7차 교육과정에 의하면 함수 영역은 7-가 단계에서 정비례, 반비례 관계를 이용해서 도입하여 일차함수, 이차함수를 다루고 10-나 단계에서는 대응으로서의 함수 개념 및 유리함수, 삼각함수 등을 다루고 있다. 한편, <표 2>에 나타난 함수 영역에 대한 학생들의 표현 관련 기피원인은 용어, 기호와 관련한 것

과 그래프 관련으로 나누어 볼 수 있다. 그런데 용어, 기호와 관련한 기피원인에 대한 지도 방안은 문자와 식 및 방정식·부등식 영역에서 언급한 것과 유사하다. 그러나 그래프로 표현하는 것과 관련한 기피원인은 특별히 중요시해서 다룰 필요가 있다. 왜냐하면 함수에 대한 세 가지 표현인 그래프 표현, 대수적 표현, 대응 테이블 표현과 이들 사이의 상호 관계를 아는 것은 함수개념에 대한 완전한 이해 여부의 척도가 되기 때문이다. 즉, 이들 사이의 상호 연계성에 대한 이해는 함수에 대한 내적 표현과 외적 표현의 상보적 작용을 촉진하는데 가장 훌륭한 역할을 하기 때문이다. 이들 세 가지 표현은 더 나아가서 함수와 방정식·부등식의 관계 등 함수의 적용에 관한 여러 문제를 시각적으로 이해할 수 있도록 해주기도 한다. 따라서 함수의 지도방향으로는 함수의 다양한 표현과 그들 사이의 관계를 다양한 방법으로 경험할 수 있도록 배려할 필요가 있다.

(4) 도형

용어, 기호 등의 표현과 관련해서 제기되는 어려움은 다른 영역과 유사하다. 그러나 이 영역에서 다루는 도형은 수학의 여타 영역과는 달리 일상에서 흔하게 접하는 원, 삼각형, 사각형, 다각형 등은 시각적으로 익숙하게 인식되어온 대상물이다. 그런데 이런 시각적 대상을 대수적 표현으로 파악하는 것에 대해서 학생들이 어려워하고 있는 것으로 나타났다. 교수·학습과정에서 하나의 개념을 여러 형태로 표현해보도록 하는 것은 효율적인 표현법의 훈련을 위해서 대단히 중요한 의미를 갖는다. 특히 대수적 표현과 기하학적 표현 사이의 상호 교통은 내적 표현을 구성하는 능력을 강화하는데 매우 효과적인 방법이다. 대수 방정식의 해집합(순서쌍의 집합)을 좌표평면에 표시함으로써 도형을 그리는 것을 통하여 도형의 성질을 대수적으로 설명할 수 있다는 것을 지도하는 것은 학생들의 수학적 시야를 넓혀주고 수학의 유용성에 대한 확신을 심어줄 수 있는 효과적인 방향이다.

(5) 확률·통계 영역

이 영역은 학교수학의 여타 영역에 비해서 일상생활과 가장 밀접한 관계를 맺고 있는 소재로써 학생들이 친근감을 가지고 접근할 수 있다. 일상적 소재를 수학적으로 처리하기 위해서는 상황이나 자료를 체계적으로 표현할 필요가 있고, 용어도 일상적 의미가 아닌 수학적 의미로 분명하게 정의할 필요가 있으며, 학생들이 이들 용어의 의미를 일상적 의미와 혼돈하지 않도록 지도할 필요가 있다. 다시 말하면, 학생들은 일상적인 용어를 써서 일상적 대상이나 현상을 다루기 때문에 친근하고 쉽게 알 수 있다고 생각해서 무의식중에 용어의 의미나 수학적 표현에 관심을 집중하지 않는 경향이 있다는 점에 유념해서 지도할 필요가 있다.

VI. 결 어

수학적 표현은 인식론의 한 분야로서 오랜 역사와 함께 다양한 의미를 지니고 있다. 그래서 그의 정확한 의미를 간단하게 정의하려는 시도는 큰 의미가 없는 일로 되어있다. 본 연구에서는 수학적 표현의 의미를 '수학적 개념의 인식 활동으로서 내적 표현과 외적표현의 상보적 대응 작용'이라고 설정하였다. 이것은 일반적으로 알려진 좁은 의미, 즉, 인식된 개념이 외부로 표상된 것만을 의미하는 것이 아닌 인식활동의 구조로서 표현을 다루는 입장이다. 따라서 이에 의하면 학생들은 수학에 대해 '단지 이미 참이라고 밝혀진 확립된 지식의 체계'라고 생각하는 수동적 관점에서 벗어나 '현상의 본질에 대한 근원적 이해와 논리적 설명을 가능하게 해주는 도구'라고 생각하는 능동적 관점을 지녀야 한다는 것이다. 그래서 수학적 표현은 학습에 대한 행동주의와 구성주의의 통합적 관점에 서 있다.

수학적 표현의 교수학적 의의는 수학교과의 학문적 특성으로 인해서 학생들이 겪는 개념의 인식에 대한 장애를 극복하기 위한 전략을 제공해 준다는 데에 있다. 우선, 수학적 표현은 수학적 지식의 추상성으로 인해서 개념의 본질적인 의미를 파악하는 것이 어렵다는 난점을 극복하기 위한 전략이라는 점이다. 이것은 주어진 상황을 다양한 수학적 표현으로 나타내거나 인식된 개념의 외적 표현을 모색하는 훈련이나 경험을 통하여 취득하게 되는 능력이다. 다음으로, 수학적 표현은 과학적 의사소통의 기반을 이룬다는 점이다. 표현의 간결 명확성은 과학적 언어의 필수적 요건으로서 수학적 표현의 훈련은 과학적 언어의 구성과 직결되어있다. 셋째, 수학적 표현

은 수학적 문제해결에 있어서 필수적 전략이라는 점이다. 수학적 표현을 거치지 않고서는 수학적인 방법을 적용할 수 없기 때문이다. 이 밖에도 수학적 표현에는 언어와 개념의 형성과 관련해서 다양한 교수학적 의의가 있다.

우리 학생들의 수학교과에 대한 부정적인 인식의 정도는 국제적인 비교에서도 심각한 것으로 나타났다. 수학교과에 대한 부정적 인식은 학년이 높아짐에 따라서 심해지는 양상을 보이고 있는데, 그 원인 중 상당한 부분은 수학적 표현과 관련되어 있는 것으로 나타났다. 이들 이유를 학교수학의 각 영역별로 분류해본 결과 용어, 정의, 기호, 문장의 의미에 대한 이해나 수학적인 표현과 관련된 기피원인이 모든 영역에 걸쳐서 공통적인 현상으로 나타났다. 학생들은 특히 문장제를 수학적으로 나타내는 것을 어려워하고 있는데 이는 문자와 식, 방정식, 함수영역의 학습에 공통적으로 영향을 끼치고 있었다. 특히 함수 영역에서는 그래프의 표현을 어려워 한다는 반응을 보였다. 함수개념은 학교수학의 기저를 이루는 중요한 개념으로서 이의 다양한 표현 즉, 그래프, 대응표, 대수적 표현 사이의 연계관계에 대한 완벽한 이해가 매우 긴요하다. 이 밖에 도형에서는 대수적 표현과 기하학적 표현, 확률 통계에서는 자료의 정리를 통한 변수들 사이의 함수적 관계 파악이 장애 이유로 제시되었다. 이들 전반적 기피원인은 기초실력 및 자신감의 부족 요인에 속하는 것으로 나타났는데, 이는 다양한 표현의 훈련을 경험할 수 있는 상황이나 자료를 활용해서 학생들이 협동해서 문제를 해결하는 활동을 제공할 필요가 있다. 이 때, 수학적 표현을 통한 수학적 개념의 구성 원리는 내적·외적 표현의 상보적 작용을 중시하는 것으로써 하나의 개념에 대한 다양한 표현과 그 다양성을 관통하는 통일적 개념의 원리를 고려해야 한다는 점을 유념해야 한다.

참 고 문 헌

김영국 (2006). 우리나라 학생들의 수학 성취도에 관한 경향 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **20(2)**, pp.283-293.

김영국 (2007). 수학 기피유형의 분류 및 수학 성취수준과의 상관성 연구, 수학교육학연구, **17(1)**, pp.33-50. 서울: 대한수학교육학회.

김영국·박기양·박규홍·박혜숙·박윤범·유현주·권오한·이선아 (2001). 수학 기피요인의 설정 및 기피성향의 분석도구 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **40(2)**, pp.217-239.

김응태·김년식 (1980). 수학교육 교재론, 서울: 이우출판사.

박한식 (1982), 수학교육사, 서울: 교학사.

우정호·김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색, 수학교육연구 **17(4)**, pp.453-475. 서울: 대한수학교육학회.

이미연·오영열 (2007). 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향, 수학교육연구 **17(4)**, pp.395-418. 서울: 대한수학교육학회.

이종희·김선희·채미애 (2001). 수학적 의사소통 능력의 평가 기준 개발, 수학교육학연구 **11(1)**, pp.207-221. 서울: 대한수학교육학회.

이종희·김선희 (2003). 등호 개념의 분석 및 학생들의 등호 이해 조사, 수학교육연구 **13(3)**, pp.287-308. 서울: 대한수학교육학회.

Bloom, Benjamin S; Engelhart Max D; Hill Walter H.; Furst Edward J. & Krathwohl David R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain*, New York: Longman.

Brenner Mary E; Mayer Richard E.; Moseley Bryan; Brar Theresa; Duran Richard; Reed Barbra Smith & Webb Davis (1997). Learning by Understanding, The Role of Multiple Representations in Learning Algebra, *American Educational Research Journal*, **34(4), pp.663-689**

Cuoco Albert A. & Curcio Frances R. (Eds.) (2001). *The Role of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook.* Reston, VA.: NCTM.

Davis Robert B. & Maher Carolyn A. (1997), How students think: The role of representation, In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*(pp.93-116). Lawrence Erlbaum.

Dubinsky Ed & Guershon Harel (Eds.) (1992). *The concept of function*, MAA, Notes Series **25**.

Ernest Paul (1996). Varieties of Constructivism: A Framework for Comparison, In Leslie P. Steffe & Pearla Nesher(Eds.), *Theories of Mathematical Learning*(pp.335-349), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey.

Goldin Gerald & Nina Shteingold (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts, In A. A. Cuoco & F. R. Curcio(Eds.), *The Role of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, VA.: NCTM.

Janvier Claude; Girardon Catherine & Morand Jean-Charles (1993), Mathematical Symbols and Representations, In Wilson P. S.(Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*(pp. 79-101). Reston, VA. USA.

Lamon Susan J. (2001). Presenting and representing from fraction to rational numbers, In A. A. Cuoco. & F. R. Curcio (Eds.), *The Role of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 146-165), Reston, VA.: NCTM.

Meyer Margaret R. (2001). Representation in Realistic Mathematics Education, In A. A. Cuoco. & F. R. Curcio (Eds.), *The Role of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 238-250), Reston, VA.: NCTM.

Mullis Ina V. S. et al (2003). *TIMSS 2003 Assessment frameworks and specifications 2003*, 2nd Edition, International Study center, Lynch School of Education, Boston College.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation; Standard for School Mathematics*, Reston, VA.: NCTM.

Curtis L. (2003). The use of symbols, worlds, and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal for Research in Mathematics Education*, **34(5)**, pp.406-432.

Russell Bertrand (1903). *The principles of Mathematics*, W · W · Norton & Company, INC, New York.

Seeger Falk (1998). Representation in the mathematics classroom: Reflections and constructions. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschesio(Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom*(pp.308-343). Cambridge, UK., Cambridge University Press.

Stewart I. (김동광 역) (1996). <u>자연의 수학적 본성</u>, 서울: 동아출판사.

On the Pedagogical Significance of Mathematical Representations

Kim, Young Kuk
Dept. of Math Education, Seowon University, Mochungdong Cheongju Chungbuk, Korea
ykkim@seowon.ac.kr

The theory of representation, which has been an important topic of epistemology, has long history of study. But it has diverse meaning according to the fields of argument. In this paper the author set the meaning of mathematical representation as the interrelation of internal and external representations. With this concept, the following items were studied.

1. Survey on the concepts of mathematical representations.
2. Investigation of pedagogical significance of the mathematical representations, taking into account the characteristics of school mathematics.
3. Recommendation of principles for teaching representation to cope with the problems that are related with cause of disliking each domain of the secondary school mathematics.

This study is expected to enable the development of teaching methods to help students strengthening their ability to comprehend mathematical sentences.

* ZDM classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50
* Key Words : mathematical representation, internal representation, external representation. interrelation of internal and external representations. principles for teaching representations.