

초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 교사의 인식과 오류

최 근 배 (제주대학교)

오 속 경 (제주도남초등학교)

I. 서론

학교수학에서의 상황은 일상의 상황과는 달리 정의가 매우 중요한 역할을 하며 수학적 개념은 주로 주어진 정의에 의해 획득된다.

Vinner(1991)는 수학에서의 정의의 역할과 가정을 다음과 같이 제시하고 있다(Tall, 1991, p. 88에서 재인용).

첫째, 수학적 개념은 주로 정의에 의하여 획득된다.

둘째, 학생들은 정의를 이용해서 문제를 해결하고 정리를 증명한다.

셋째, 정의는 최소한으로 서술되어야 한다. 즉, 정의는 그 정의의 일부분으로부터 수학적으로 추론 가능해서는 안 된다. 예를 들어, 직사각형을 정의할 때, '네 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의 보다는 '세 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의가 바람직하다.

넷째, 세련된 정의가 바람직하다. 이를테면, 소수(prime number)를 정의할 때, '1보다 큰 수로 1과 그 자신에 의해서만 나누어지는 수' 보다는 '두 개의 서로 다른 약수만을 갖는 수'로 정의하는 것이 더 우아한 것이라고 여긴다.

다섯째, 정의의 임의적이다. 즉, 정의는 '사람이 만든' 것으로 수학적 개념들은 정의에 따라 개념들 사이의 관계 또는 구조가 형성된다.

이러한 다섯 가지의 가정은 학생들의 일반적인 인지적 능력(단계)을 염두에 두지 않은 수학적 입장의 측면만을 고려한 것이다. 즉, 순수수학적 상황에서의 정의는 엄밀하게 제시되나 학교수학에서는 덜 엄밀한 형태로 제

시된다.

인지수준에 따른 교육적 의도를 가진 지식의 변형은 어느 것이나 교수학적 변환이라고 할 수 있다(강완, 1991, p. 72). 특히, 학교현장에서 교수학적 변환(didactic transposition)의 주된 주체는 교과서와 교사라는 점을 상기한다면, 수학적 개념의 오류는 상존한다. 실제로 많은 경우, 학교수학에서는 순수수학에서 사용하는 정의의 방법으로 그대로 사용하기 보다는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 교과서에 제시(우정호·조영미, 2001)되며 또한 교사에 의한 변환과정이 있을 수 있다.

이러한 이유로, 덜 엄밀하게 제시된 학교수학에서의 용어 및 정의의 내용에 따른, 교사와 학생들의 오개념을 형성할 가능성에 대한 연구가 필요하다.

또한, 제 7차 교육과정 초등수학교과서에서의 정의(약속하기)의 도입방법은 최근의 학교수학에서의 경향에 편승하여 실생활과 관련되어 있다. 따라서 수학화 활동이 강조되면서 정의를 활동으로 지도하는 방안에 대한 교수학적 연구가 있어왔다(Freudenthal, 1973). 학교수학 수업에서 사용하는 주된 텍스트는 교과서라는 우리의 현실을 살펴볼 때 수학 교과서에 실린 도형의 정의 방법이 얼마나 수학화의 활동을 강조하고 있는지 살펴보는 것도 의미 있는 일일 것이다.

따라서 본 연구에서는 제 7차 초등수학교과서의 도형 영역에 제시된 정의(약속하기)에 대하여 현행 초등수학교과서가 채택하고 있는 수학적 정의의 관점을 살펴보고, 현행 수학교과서의 관점을 채택했을 시 초등 교사들에게 나타날 수 있는 수학적 개념에 대한 인식과 오류에 대하여 조사 분석하였다.

* 2008년 2월 투고, 2008년 5월 심사 완료.

* ZDM분류 : D12, U22

* MSC2000분류 : 97D10, 97U20

* 주제어 : 정의, 교수학적 변환, 정의수준, 맥락 의존적 정의

II. 초등수학에서 도형의 정의 분석

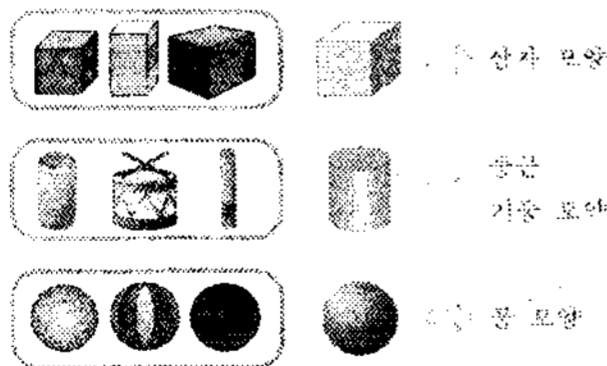
1. 초등수학에서 용어의 정의 수준

학교수학에 제시된 정의와 관련된 우정호·조영미(2001) 및 조영미(2001, 2002) 연구에서 van Hiele의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어수준 이론을 바탕으로 정의의 수준을 전(前)수학적 수준, 기술적 수준, 대상기호를 사용하는 수준, 관계기호를 사용하는 수준, 함수언어를 사용하는 수준의 5수준으로 설정하고 있다. 이 중에서 초등학교 수학과 관련된 수준은 0수준과 1수준에 해당한다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 0수준과 1수준에 해당되는 내용을 중심으로 초등학교에서의 용어의 정의 수준에 대해 살펴보았다.

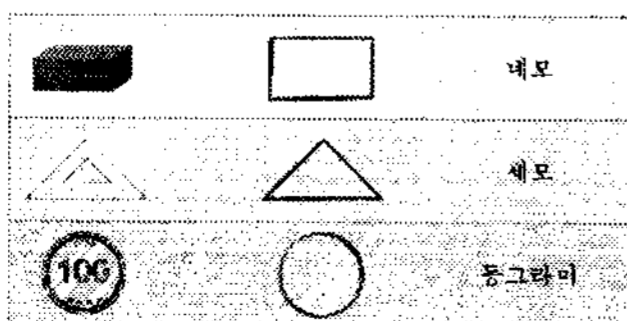
가. 제 0수준: 전(前)수학적 수준

수학적 성격의 의미보다 일상적 의미를 대응시키는 단계로, 외형을 지시, 동의어 사용, 이미지나 행동을 연상하도록 묘사하는 방법이다.

초등학교 수학교과서에서 도형을 도입하는 시기에 해당하는 수준으로 볼 수 있다. 구체물 또는 반구체물들의 시각적 외형의 모양(shape)으로부터 공통적인 특징을 인식한 후 일상의 언어로 그 용어를 도입하고 있으며, 용어를 언어적인 방법으로는 기술하지 않는다(<그림 1>, <그림 2> 참조).



<그림 1> 입체모양(교육부, 2004, <1-가>, p. 33)



<그림 2> 평면모양(교육부, 2004, <1-나>, p. 23)

이 수준에서는 학생들의 생활 주변에서 흔히 접할 수 있는 여러 가지 물건들의 외형으로부터 시각적인 공통점을 추상화한다. 이것은 van Hiele의 기하적 사고의 제 0수준인 '시각적 인식' 수준에 해당된다. 즉, 학생들은 도형의 성질에 주목하지 않고 단지 시각적인 이미지로 표상한다. 이는 Piaget의 세 가지의 추상화 중에서, 인식 주체가 여러 가지의 관찰 가능한 재료들을 조작하면서 보이는 행동과 같이 대상에서 정보를 얻는 경험적 추상화(empirical abstraction)에 해당된다고 볼 수 있다(Beth & Piaget, 1961, Piaget et al., 1977).

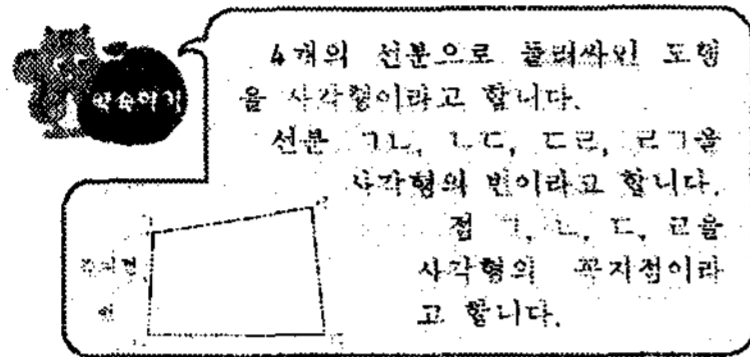
나. 제 1수준: 기술적 수준

용어를 정의하는 데 성질이나 관계를 기술하는 성격의 문장을 사용한다. 이를테면 제 0수준에서는 삼각형을 '△' 또는 '세모'로 정의한다면, 이 수준에서는 삼각형을 그 구성요소인 선분을 사용하여 '세 선분으로 둘러싸인 도형'으로 정의하는 것이다. 이 수준은 van Hiele의 기하 학습 수준 중에서 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 제 1수준에 대응하는 것이다. 즉, 이 수준의 학생들은 도형의 성질에 주목하여 도형의 구성요소에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악한다.

제 7차 교육과정 초등수학 교과서에서는 2단계부터의 정의(약속하기)가 이 수준에 해당되며, 비로소 도형에 대한 일반적인 수학적용어가 도입된다. 즉, 도형과 관련된 용어가 「~모양(shape)」에서 「~형(figure)」으로 바뀌며, 사고의 대상이 되는 수학적 추상화가 일어난다.

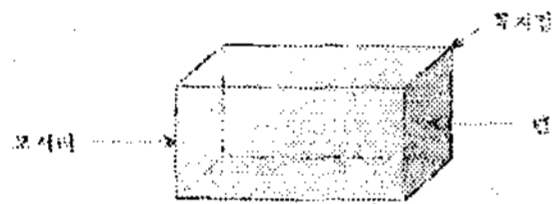
조영미(2001)에 따르면 제 1수준은 다시 두 단계로 구분할 수 있다. 먼저, 제 0수준의 시각적 특성이, 기술된 성질과 관계가 동시에 사용되어 정의되는 단계로, 이를 1a수준으로 보기로 한다. 다음으로 순전히 기술된 성질과 관계만으로 정의하는 단계로, 이를 1b수준으로 보기로 한다. 이 때, 1a수준에 해당하는 정의는 제 0수준과 1b수준의 가교 역할을 한다고 볼 수 있다. 분석적인 성질이나 관계를 사용하여 정의를 하는 상황이지만, 순전히 이러한 방식으로만 정의하는 것은 학습자에게 부담이 될 우려가 있으므로, 제 0수준에 해당하는 성격의 의미를 첨가하여 학생들의 부담을 줄이려는 의도가 있다고 볼 수 있다.

현행 초등수학교과서에서는 <그림 3>, <그림 4>와 같이 분석적인 성질이나 관계를 기술함과 동시에 제 0수에 해당하는 예시를 함께 제시하고 있다.



<그림 3> 사각형(교육부, 2004, <2-가>, p. 38)

그림과 같이 직사각형 6개로 둘러싸인 도형을 직육면체라고 합니다. 직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형을 직육면체의 면이라고 하고, 직육면체의 면과 면이 만나는 선분을 모서리라고 합니다. 또, 직육면체의 세 모서리가 만나는 점을 꼭지점이라고 합니다.



<그림 4> 직육면체(교육부, 2004, <5-가>, p. 53)

초등학교 수학에서는 수학적 성격의 의미보다는 일상적인 의미를 사용하여 외형을 지시하거나 동의어를 사용하는 개념 정의 방법을 주로 사용하며 도형의 구성요소에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하고 있는데 이는 다른 도형으로의 일반화, 도형이 속한 범주의 모호함 등과 같은 문제를 야기한다. 학년에 따라 도형의 개념 정의가 상이하거나 교사는 도형의 개념 정의를 다룰 때에는 상위 수준의 도형의 개념 정의도 염두에 두고 있어야 한다. 초등학교에서 다루지는 용어 및 정의들이 중·고등학교에서는 수준이 상향 조정됨에 따라 정의를 수정, 개선해 가는 방식으로 교육과정과 교과서가 구성되는 경우가 많다. 예를 들어, 원은 초등학교에서는 ‘동그란 모양의 도형’으로, 중학교나 고등학교에서는 ‘한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합’으로 정의되는데 비록 동그란 모양의 도형을 원으로 가르치고 있더라도 교사들은 원이 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합임을 염두에 두고 있어야 한다.¹⁾

2. 도형의 도입 시기 및 순서

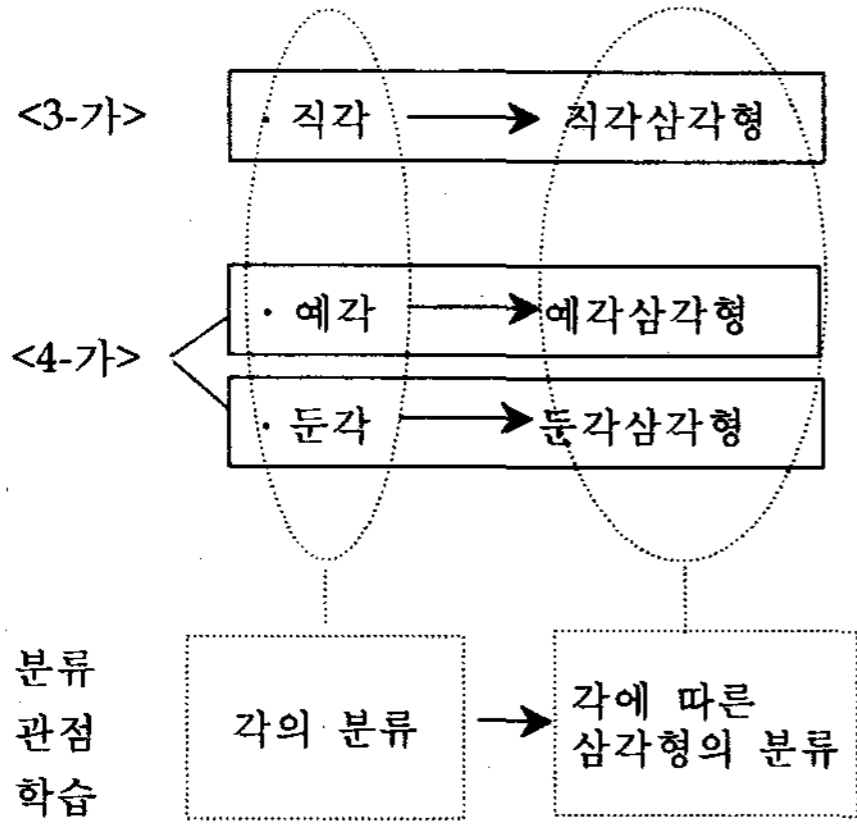
제 7차 교육과정 초등수학교과서의 도형영역에서는 1단계에서 4단계까지는 주로 평면도형, 5-6단계는 주로 입체도형으로 구성되어 있다. 1단계에서는 언어적 기술 없이 시각적으로 외형을 지시하는 방법으로 도입되며 2단계부터 외형을 지시하는 방법을 사용한다. 2단계부터 실제적인 수학적 용어의 사용과 용어의 설명이 예시와 함께 제시된다. 평면도형은, <2-가>에서 기하학적인 정의에 바탕이 되는 용어와 기초적인 도형이, <3-가> 단계에서 <4-나> 단계까지는 변에 따른 또는 각에 따른 평면도형을 분류하는 관점으로, 도입된다. 입체도형의 경우는 <5-가> 단계에서 직육면체로부터 도입되기 시작하여, <6-가> 단계에 각기둥과 각뿔, <6-나> 단계에 원기둥, 원뿔, 구와 관련된 내용이 나타난다.

현행 초등학교 도형영역의 일반적인 특징은 평면도형과 입체도형을 단계별로 분리하거나 각 소주제별(차시별)로 도형을 다루고 있다는 것이다. 물론 이러한 관점을 채택할 때 각 차시별로 도입되는 용어를 익히는 데 유용하다. 또한 초등학교 수학에서는 어느 수준에 이르기 전까지는 용어를 익히는데 초점이 맞춰질 수밖에 없다는 것에 동의하는 바이다. 그러나 초등수학교실에서 사용하는 용어가 논리적 사고 수준이나 개념형성의 효율성의 측면이 고려되어야 함을 생각해본다면 현행 교과서에서 소홀히 다루지고 있는 도형의 관계적인 이해부분이 강조되어야 할 필요가 있다.

삼각형을 각에 따른 도입시기로 예를 들어 본다면, <3-가> 단계에서 직각삼각형, <4-가> 단계에서 예각삼각형, 둔각삼각형이 약속되고 있다. 교과서상에 삼각형의 각에 따른 분류의 관점에서의 개념 도입이 아닐지라도 <4-가> 단계에서 예각삼각형, 둔각삼각형 지도 시에는 각에 따른 분류를 하는 활동을 하고, 예각삼각형, 둔각삼각형을 약속할 뿐 아니라 직각삼각형의 개념을 다시 생각해 보는 기회를 제공해야 한다. 도입되는 도형의 개념 및 용어가 많아질수록 이해되어져야 하는 도형의 관계역

1) 유클리드 기하학에서는 ‘원이란 그 도형의 내부에 있는 한 정점으로부터 곡선에 이르는 거리가 똑같은 하나의 곡선에 의해 둘러싸인 평면도형’으로 약속하나, 현재 1899년 D. Hilbert(1862~1943)에 의하여 발표된 『기하학기초론』 공리계에 의하여 재구성된 정의를 현재 받아들이고 있다.

시 늘어남을 인식하고, 도형의 개념 정의(약속하기)를 할 때에는 전에 학습했던 도형과의 관계를 염두에 두고 교사는 지도해야 한다.



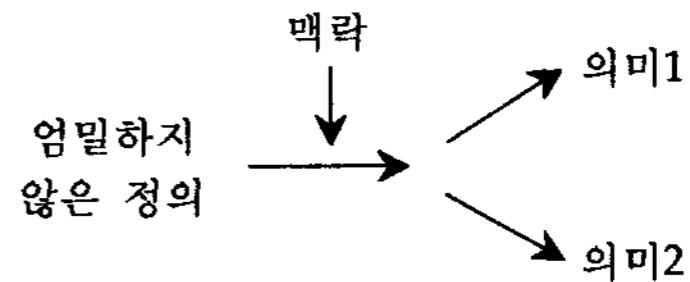
<그림 5> 분류의 관점의 교수-학습

현행 초등학교 수학교과서에서는 약속할 용어를 일방적으로 제시하고 익히도록 하는 경우가 있다. <4-나> 단계에서 사각형의 지도를 예로 들어 본다면 도형의 약속하기에 사용될 속성을 미리 제시한 후 그 관점에 따라 도형을 분류하게 하고, 다시 분류된 도형의 공통점을 찾아 이름을 약속하고 있다. 그러나 이러한 속성을 처음 접하는 학습자는 예시에 고착되어 있을 수 있고, 이러한 기술순서에 따라 학습하면 학생들이 도형을 약속하기 위해 사용한 속성과 도형의 정의를 우연적인 것으로 받아들이기 쉽다. 즉, 학생들이 마름모라는 용어를 기억하는 만큼, '네 변의 길이가 같은 도형'이라는 성질을 기억하지는 못할 것이라는 점이다. 따라서 이러한 문제를 줄이기 위해서는 교사는 마름모의 의미에 대해 정확한 개념을 가지고 다른 사각형과의 관계를 파악한 후, 마름모라는 개념을 익힐 수 있는 다양한 예를 담고 있는 상황을 제시해주고 아동은 교사가 제시한 상황에 도형의 개념(약속하기)과 관계된 내용에 주의를 기울여 활동을 해야 할 것이다. 학생들에게 도형의 개념에 주의를 기울이도록 하는 것은 한 차시에 이루어지지 않는다. 관계적 이해를 위한 분류하기 활동을 많이 하도록 하는 것은 도형의 후속학습에서 학생들의 수학적 이해력을 증진시키고 개념형성에서 지적활동을 강화하는데 도움을 줄 것이다.

도형영역(기하영역)은 분류의 문제가 주된 관점이라는 것을 항상 상기하여야 한다.

3. 맥락 의존적 정의

현재 학교수학에서는 순수 수학적인 입장과는 달리 용어를 엄밀하게 정의하지 않은 채 맥락에 따라 상의한 의미로 해석하는 것을 허용하는 방식으로 다루고 있다(박교식·임재훈, 2004). 박교식·임재훈(2004)은 이러한 학교수학에서의 정의의 고유한 특성을 '중의적인 정의' 또는 '맥락 의존적 정의'라고 부르고 있다(<그림 6> 참조).



<그림 6> 맥락 의존적 정의 (박교식, 임재훈, 2004, p. 24)

한편, 학교현장에서 비교적 엄밀한 정의를 사용하고 있는 경우에도 문제의 상황에 따라서 주의를 요하는 문제점은 발생한다. 이를테면, <2-가> 단계에 있는 원의 정의 '본을 떠 그런 동그란 모양'과 <3-나> 단계에 있는 원과 관련된 활동을 보면, 원은 그 내부를 포함하고 있지 않음을 알 수 있다(<그림 8>과 <그림 21> 참조). 이러한 맥락에서 '다음에 주어진 원의 넓이를 구하시오'와 같은 유형의 문제에서의 답은 0이다. 그러나 일반적으로 이러한 문제는 '다음에 주어진 '원판(원에 의하여 둘러싸인 영역)'의 넓이를 구하시오'라는 의미를 뜻한다. 만일 실제적 학교현장에서 이러한 문제가 발생했다면 (0이라고 답한 소수의 학생이 있다면) 어떻게 처리해야 할까? 교사는 딜레마에 빠질 수 있다. 이러한 점에서 교사의 도형을 보는 교수학적 분석이 요구된다. 이와 같은 경우의 정의도 '맥락 의존적 정의'라고 볼 수 있다. 또한 수학적 정의가 특정한 성질을 지니는 경우에는 정의와 특정한 성질이 동일시되는 경우가 흔히 있다. 이를테면, 원의 반지름은 '선분'으로 정의되지만 맥락에 따라서 그 '선분의 길이'를 의미하기도 한다.

초등수학에서 '맥락 의존적 정의'에 제기될 수 있는 문제의 본질은 다음과 같이 분류할 수 있다.

(C1) 엄밀하지 않은 정의 사용에 따른 문제이다. 예를 들어, 다각형이나 다면체(각기둥)의 용어에서 나타나고 있는 '둘러싸인'과 관련된 해석의 문제, 즉 내부를 포함하고 있느냐? 아니냐?

(C2) 비교적 엄밀한 정의를 사용하고 있지만, 상황에 따라서 정의가 왜곡되는 문제이다. 예를 들어, 원에 의해서 파생되는 입체도형(원기둥, 원뿔)에서의 제반문제

실제로, 초등수학의 경우 위에서 제기된 문제는 도형의 측정과 관련된 (겉)넓이, 부피의 문제와 입체도형의 전개도의 문제와 관련된다.

가. (C1)의 문제

도형의 도입시기인 1단계에서는 시각적인 외형의 모양(shape)을 중시하고 있는 데, 이 경우에는 모양의 외형에 의존하므로 <그림 1>과 <그림 2>와 같이 내부를 포함하고 있지 않은 것으로 볼 수 있다. 그러나 2단계부터는 도형과 관련된 수학적 추상화가 일어나면서 약속하기(정의)가 도형의 구성요소의 분석적 성질에 의존하게 된다(<그림 3>, <그림 4> 참조).

초등수학 교과서에서의 다각형과 관련된 약속하기에서 '둘러싸인'의 원래 의도는, 교과서에 도입된 다각형과 관련된 활동에 비추어 볼 때, 내부를 포함하고 있다고 생각된다.

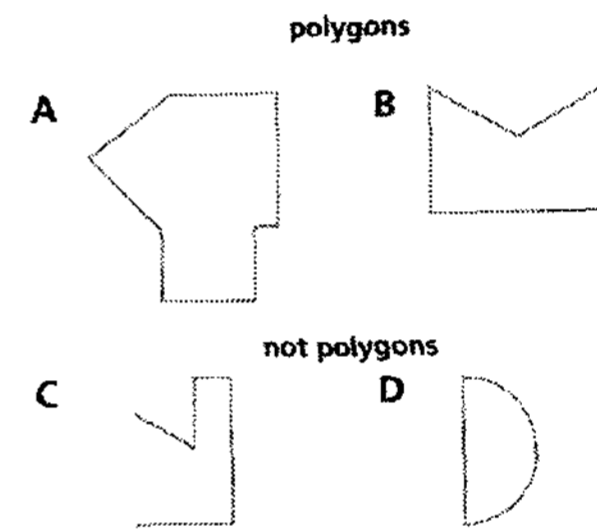
박교식·임재훈(2004)은 '둘러싸인'과 관련된 분석을 다음과 같이 논의하고 있다.

학교수학에서 다각형이 본질적으로 closed라는 것을 알기 쉽도록 나타내기 위해 '둘러싸인'이라는 표현을 사용한 것으로 보이지만, '둘러싸인'으로부터 closed를 연상하기는 쉽지 않다. closed의 우리말 표현인 '닫힌'이 있으나 이를 초등학교 저학년에서부터 사용하는 것이 적절한지 등에 대해서는 별도의 연구와 논의가 필요하다. 다각형의 정의에서 closed와 '둘러싸인'의 거리를 좁히는 방편으로 '완전히 둘러싸인' 또는 '빈틈 없이 둘러싸인'과 같이 수식어를 넣어 주는 것도 고려할 수 있다. (p. 25)

'둘러싸인'과 관련하여, 박교식·임재훈(2004)의 분석을 다른 관점에서 논의해 보자. 이를 위해, 먼저, 다각형의 정의와 관련된 하나의 영어표현을 참조하자(Rich, 1963).

A polygon is a closed plane figure bounded by straight line segments as sides

위에서 밑줄 친 부분에 따르면 다각형은 내부를 포함하고 있음을 알 수 있다. 즉, 여기서 '둘러싸인'은 'bounded by'와 대응된다. 또한 closed는 '닫힌'의 의미를 뜻하며, 이는 도형의 경계(가장자리, 변)와 관련됨을 알 수 있다(<그림 7> 참조).



<그림 7> 닫힌 도형과 열린 도형(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 3, p. 314)

실제로, 미국 교과서(Maletsky et al., 2002)에서는 '닫힌 도형'과 '열린 도형'이라는 용어를 먼저 도입한 후, 「꼭은 변(side)을 가지는 닫힌 평면도형」으로 '다각형'의 용어를 도입하고 있다. 여기서도 내부의 포함여부는 명확하게 진술된 것은 아니지만 'side²⁾'의 의미(변, 가장자리)로부터 유추할 수 있다. 참으로, 미국(Maletsky et al., 2002)의 경우를 살펴보면, 용어의 설명이 우리의 경우보다는 좀더 구체적으로 진술됨을 알 수 있다. 초등수학에서 학생들의 인지적 수준의 이유로 맥락 의존적 정의를 사용한다면, 오개념을 줄이기 위해서라도 인지수준을 벗어나지 않은 범위 내에서 어느 정도의 진술의 구체성은 고려되어야 한다.

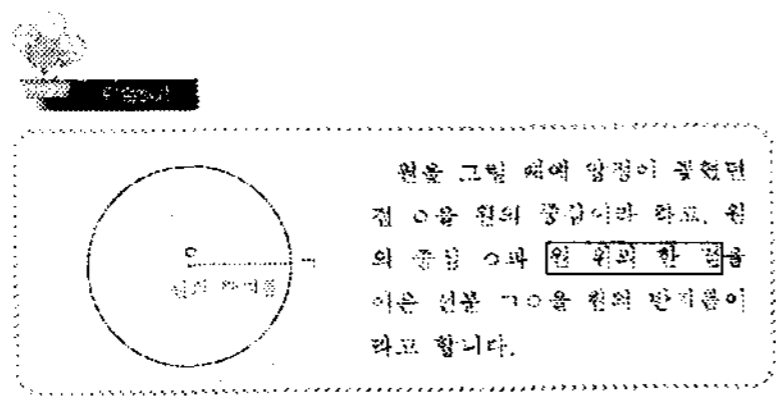
입체도형은 영어로 solid figure이다. 여기서, 'solid'의

2) any of the lines or surfaces that bound something (Webster's New World Dictionary).

일반적인 의미는 '속이 찬'이다. 이러한 점과 다각형에서 '둘러싸인'의 의미를 내부와 그 경계를 포함하고 있다고 본다면, <그림 3>에서의 「...'둘러싸고'있는 ...」 진술로부터 또한 일관성의 관점에서 입체도형도 그 내부를 포함하고 있다는 입장에 타당성이 있다. 그러나 이러한 경우 입체도형의 전개도에서 문제가 발생한다. 이를 위한 방안으로 전개도의 정의에 약간의 수정을 요하는 것인데, 이를테면 '입체도형 표면의 평면패턴' 또는 '접어서 각기둥이나 각뿔을 만들 수 있는 평면패턴'등을 생각할 수 있다. 물론 적절성에 대한 수학적 논의가 필요하다.

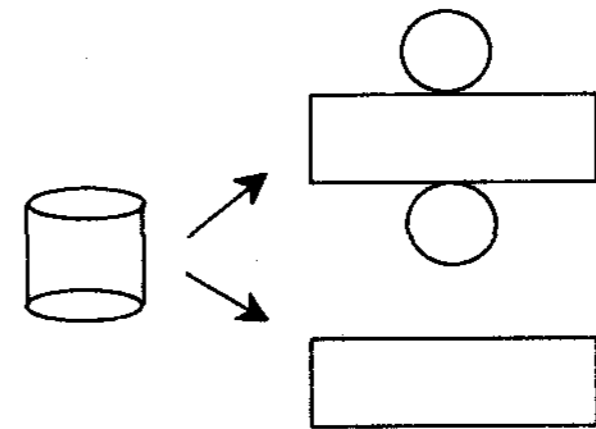
나. (C2)의 문제

학생들에게 (C2)의 문제는 (C1)의 문제보다 좀더 심각한 문제를 야기할 수 있다. 왜냐하면, 엄밀한 정의를 사용하고 있지만 상황에 따라서 엄밀한 정의가 왜곡될 수 있다는 점이다. 이를테면, (C1)의 경우에는 '둘러싸인'의 의미에서 내부를 포함하는 뜻으로 취급할 가능성이 많지만 (C2)의 경우에는 내부를 포함하고 있지 않다는 점이다. 예를 들어, 원의 정의와 이와 관련된 활동(<그림 8>에서 네모 친 부분과 <그림 19> 참조)으로부터 의도하는 바를 유추하면, 원의 경우에는 내부를 포함하고 있지 않음을 유추할 수 있다. 따라서 (C2)의 경우는 측정이나 이 정의로부터 파생되는 입체도형을 다룰 경우에 좀더 신중을 기해야 한다.



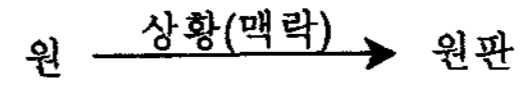
<그림 8> 원(교육부, 2004, <3-나>, p. 31)

예를 들어, 초등수학교과서에 제시되고 있는 원기둥의 정의는 「위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 원으로 되어 있는 입체도형」 이고, 이와 같은 원기둥의 정의로부터 원기둥의 겹넓이(전개도)를 구하는 문제를 다루는 경우이다(<그림 9> 참조).



<그림 9> 원기둥의 전개도

즉, 원래의 의도는 <그림 9>의 오른쪽 위에 있는 것이지만, 만일 원의 정의에 충실하다면 오른쪽 아래의 그림이다.



<그림 10> 원의 맥락에 따른 의미

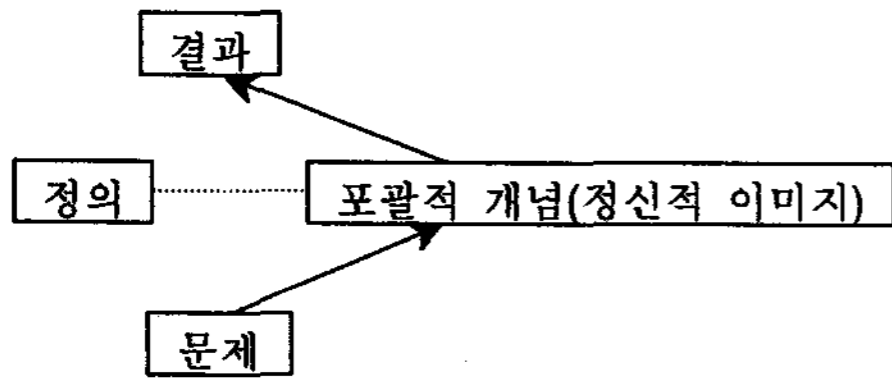
<그림 10>과 같은 현상은 학생들의 인지적인 측면에서도 나타날 수 있다. 초등수학에서 수학적 개념의 형성은 주로 활동을 통해서 형성되며 또한 활동에 사용된 대상(구체물 또는 반구체물)들은 학생들의 개념 이미지 형성에 많은 영향을 준다. 여기서 소위 '포괄적 확장'의 원리(generic extension principle)가 생성될 수 있다.

특수한 상황에서 자신이 생각했던 모든 예들이 갖는 어떤 성질이 다른 상황에서도 의미 있을 것이라고 가정한다.(Tall, 1986, 1991)

즉, 활동을 통해서 수학적 개념에 대한 정신적 이미지를 형성하게 되며, 이 정신적 이미지는 반드시 수학적 의미의 개념일 필요는 없으며, 특수한 사항에서 추출한 결과인 각자의 마음속에서 생각하게 된 수학적 개념이다.

예를 들어, 원과 관련된 수학활동의 소재는 실제적으로는 '원판(closed disc)'이 많다. 따라서 학생은 수학적 의미에서의 원과는 별개로 경험적 사실로부터 원은 내부를 포함하고 있다는 함축적인 신념(포괄적 원)이 형성된다. 또한 이러한 포괄적 원의 개념은 평면도형인 다각형(삼각형, 사각형 등)은 내부를 포함하고 있다는 사실로부터 나타날 수도 있다.

일반적으로, 교사들은 정의를 통하여 주어진 문제의 답을 산출하도록 이상적인 과정을 요구한다. 그러나 학생에게서 일어나는 실제의 문제해결과정은 <그림 11>과 같은 과정이 흔하다.



<그림 11> 학생의 직관적 문제해결 과정

초등학교에 주어지는 문제의 대부분은 포괄적으로 획득한 정신적 이미지만을 적용해도 성공할 수 있고, 교사들은 학생들이 개념을 잘 형성했다고 오판할 가능성이 있다.

4. 세부적인 분석

도형의 도입시기에서는 시각적 외형의 모양(shape)의 특징으로 도형을 인식하며, 이로부터 수학적 도형으로의 수학적 추상화가 일어난다. 수학적 추상화의 단계에서는 도형을 이루는 구성요소 및 구성요소 사이의 관계가 그 도형을 특징짓는 주요한 역할을 한다.

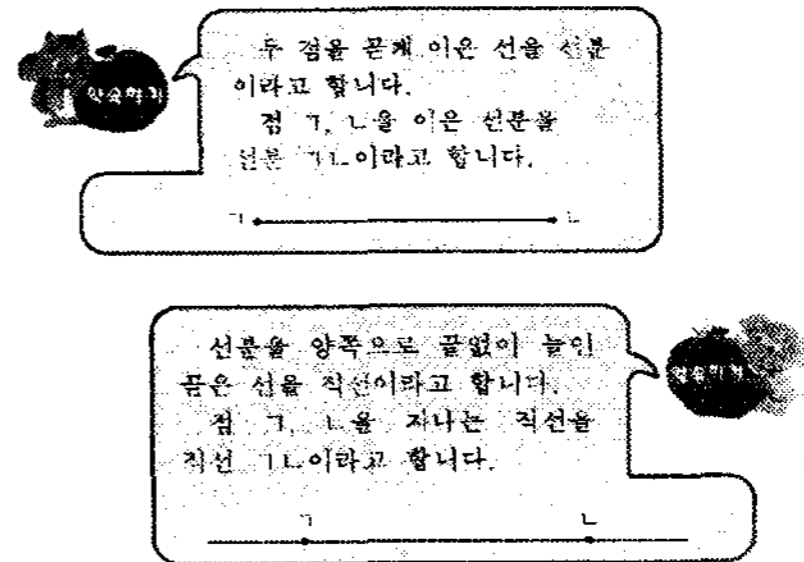
가. 점, 선 및 면

모든 기하적인 정의에 바탕이 되는 용어는 점(point), 선(line), 면(plane)인데, 일반적으로 무정의 용어(undefined term)로 받아들이며, 정의(definition)가 아니라 설명(description)의 방식으로 그 의미를 전달한다. 이러한 용어를 도입할 때 생각해야 중요한 점은 설명과 '표현'의 문제이다.

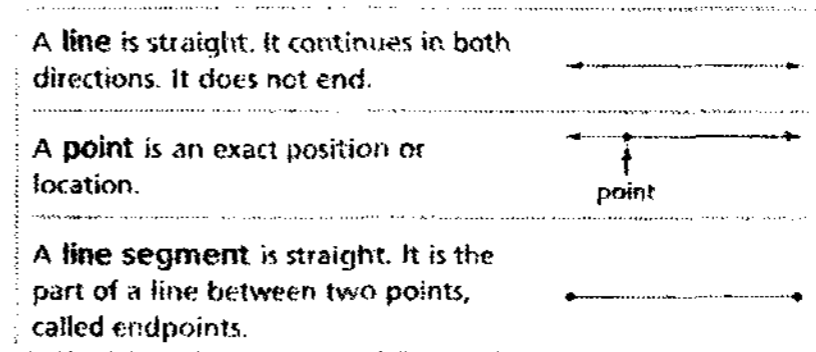
제 7차 초등수학교과서에서는 초등학생의 인식수준에 맞게 추상적인 개념의 일반적인 설명보다는 직관적 표현(시각적)을 중시하는 관점으로 그 용어를 도입하고 있다. 구체적으로, 점(point)은 용어에 대한 설명 없이 시각적 표현의 관점에서 점(dot; ·)으로 (미국 교과서의 도입방식 <그림 13>과 비교) 도입하고, 이로부터 선분을 그 후 직선을 도입하고 있다 (<그림 12> 참조). 그러나 면(plane)에 대한 설명이나 표현은 도입하지 않고 있다. 미

국 초등교과서(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 4)에서는 다음과 같은 설명의 방식으로 평면에 대한 용어를 도입하고 있다:

A plane is a flat surface of points, with no end.



<그림 12> 선분과 직선(교육부, 2004, <2-가>, p. 37)



<그림 13> 점, 선과 선분(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 3, p. 300)

우리는 일상에서 어떤 장소를 묻거나 가르쳐주는 경험을 자주한다. 이 경우 장소의 크기는 관심의 대상이 아니다. 단지 그 장소의 위치가 주된 관심사이다. 이것에 대한 설명(표현)의 수단으로 점(dot)을 사용한다. 즉, 지도상에 있는 점은 장소를 표현한 것이지 그 장소가 아닌 것처럼, 점(dot)은 점(point)을 표현한 것이지 점(point)인 것은 아니다. 점(dot)은 점(point)과는 다르게 크기를 가진다.

우리의 경우는 수학적 개념의 용어인 'point'와 그 표현(기호)의 용어 'dot'을 모두 '점'이라는 용어로 혼용하고 있음을 교수학적 관점에서 상기할 필요가 있다. 특히, 우리의 경우에는 점이라는 용어를 많이 사용하고 있지만 이와 관련된 개념적 설명 없이 이에 대한 표현만 사용하고 있음을 염두에 두어야 한다.

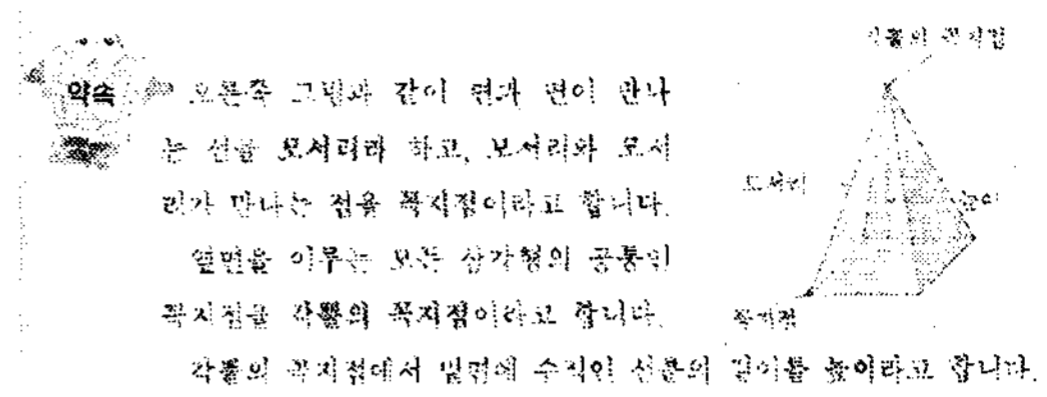
직선과 선분의 도입방식(순서)을 보면 용어의 '의미'

보다는 초등학생의 '인식수준'을 따르고 있다(<그림 12> 참조). 즉, 논리적으로는 선분이라는 용어는 사전적으로 직선의 부분을 의미하고 있으므로 직선이 먼저 도입되고 그 후 선분의 용어가 약속되어야 한다(<그림 13> 참조). 수학적 용어와 그 개념(이미지)을 생각한다면 우리의 경우에는 「선분 → 직선 → 선분(용어)의 의미」의 순서로 가르치는 방식을 고려해 봄직하다. 즉, 개념 정의와 개념이미지의 상호작용의 중요성을 고려한 관점이다. <그림 13>과 같이 미국(Maletsky et al., 2002)의 경우는 '선(line)'은 '직선(straight line)'을 의미하고, 따라서 직선분(straight line segment)이라는 용어 대신에 선분(line segment)의 용어를 사용하고 있다. 그런데 우리의 경우는 생활에서 알아보기를 통해서 '곧은 선'과 '굽은 선'을 구별하는 활동을 하고 직선과 선분을 도입하고 있다. 따라서 우리의 경우 직선의 부분이라는 관점에서 본다면 선분의 실제적 용어는 직(곧은)선분(straight line segment)이 타당할 수 있다.

현행 초등학교 수학교과서에서는 평면의 용어를 약속하기 형태로는 도입하지 않고 있다. 이러한 이유는 도형의 도입시기의 방법에 기인하다고 볼 수 있다. 만일, 도형의 도입시기인 1단계에 보다 다양한 형태의 입체도형을 경험케 한다면, 입체도형의 평평한 표면이라는 의미에서 면(face)에 대한 개념이 보다 일찍 형성될 수 있고, 선분으로부터 직선을 도입하듯이, 면(face)의 확장된 개념으로 평면(plane)을 도입하는 하나의 방법을 고려할 수 있다.

나. 평면도형과 입체도형의 구성성분과 관련된 용어

일반적으로 평면도형과 입체도형의 구성성분과 관련하여 초등수학에 도입된 용어에는 꼭지점(vertex), 변(side), 면(face), 모서리(edge), 밑면(base), 옆면(lateral face) 등이 있다. 이러한 용어는 주로 구체적인 예시를 통하여 지시적 관점에서 제시하고, 일반화하려는 경향을 보인다. 이 경우 구성성분에 대한 용어의 제시는 크게 두 가지의 방식을 따르고 있다. 이를테면, 특수한 도형의 구성성분을 강조하는 형태의 용어로 '...의 성분(변, 꼭지점, 밑면 등)' 또는 예시를 통한 약간의 일반적인 형태의 용어로 '성분(변, 꼭지점, 밑면 등)'이다(<그림 3>), <그림 4> 및 <그림 14> 참조).



<그림 14> 각뿔의 구성성분 (교육부, 2004, <6-가>, p. 27)

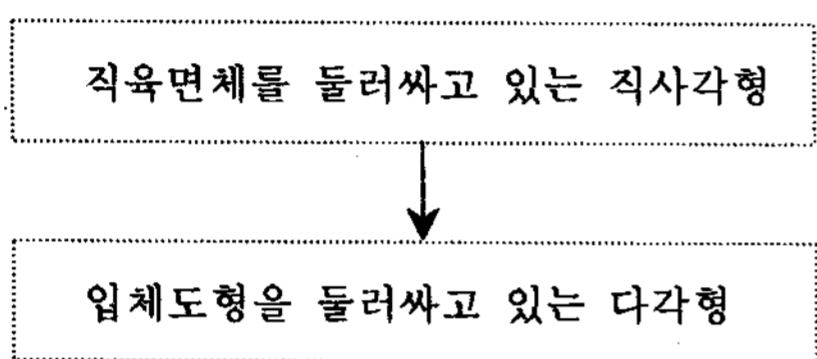
· 꼭지점: 평면도형의 경우에는 예시를 통한 지시적으로, 입체도형의 경우에는 모서리가 만나는 점으로 용어 설명을 하고 있다. 미국(Maletsky et al., 2002)의 경우는 저학년의 경우에 코너(corner)라는 용어를 도입하고 그 후의 단계에서 모서리가 만나는 코너의 관점으로 꼭지점을 도입한다. 수학적 용어선택의 이러한 접근방식에서 우리는 교수학적 시사점을 얻을 수 있다.

각·원뿔의 경우는 '각·원뿔의 꼭지점'이라는 용어도 도입하고 있다. 이 용어는 뿔의 높이와 모선(원뿔의 경우)을 설명하기 위한 수단으로만 사용된다. 단지, 몇 개의 용어를 설명하기 위한 방편으로서 용어의 사용은 생각해 볼 문제이다. 다시 말해서, 새로운 용어의 도입은 편의성뿐만 아니라 효용성을 동시에 고려해야 한다.

· 변: 주로 평면도형의 구성성분을 다룰 때 사용되는 용어로 예시를 통한 지시적 방식으로 도입하고 있다. 평면도형에서 변이라는 용어로 번역된 영문용어인 'side'의

미(<각주 2>)를 (C1) 문제의 관점에서 재음미해볼 필요가 있다.

· 면: 면이라는 용어는 직육면체(<5-가> 단계)를 다룰 때 「직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형」으로 '직육면체의 면'이라는 용어가 제한적 관점으로 도입되고 그 후에 나타나는 일반적인 입체도형의 경우에는 면에 대한 용어는 사용하고 있지만 직육면체와 같은 구체적인 용어설명은 없다. 여기서 일반화의 문제(<그림 15> 참조)가 발생할 수 있다.

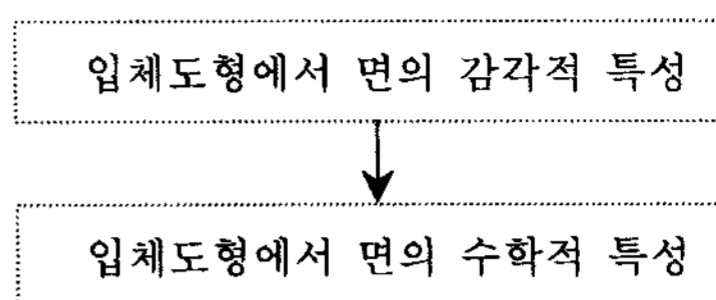


<그림 15> 일반화

또 한 가지의 문제는 면을 보는 관점의 문제이다. 즉, 선을 곧은 선과 굽은 선으로 구별하듯이, 면을 평평한 면과 곡면으로 구별하여 다루고 있다는 것이다. 실제로, 입체도형에서의 면을 세분화한 용어인 '밑면'과 '옆면'을 취급할 때, 밑면은 평평한 면만을, 옆면은 곡면(원기둥의 경우)까지도 취급하고 있다. 미국(Maletsky et al., 2002)의 경우는 '선(line)'은 '직선(straight line)'을 의미하듯이 '면(face)'도 우리와는 달리 '평평한' 경우만을 취급한다. 따라서 미국의 경우는 면의 용어설명이 우리보다 용이한 점이 있고, 우리의 경우는 실제로 면에 대한 설명 없이 예시를 통한 지시적 성격이 강하다.

이러한 문제와 관련하여, 입체도형을 다루는 감각적 단계(초등 저학년)에서 반구체물(수학적 모형)을 이용한 활동을 통해서 입체도형의 표면과 관련된 특성(평평하다, 둥글다 등)³⁾을 파악한 후 초등고학년에서 면과 관련된 수학적 특성을 파악하는 방식을 인지적 측면에서 고려할 만하다 (<그림 16> 참조). 여기서 평면도형의 도입 시 입체도형의 표면의 관점과 관련된 활동도 필요하다.⁴⁾

3) 입체도형상의 표면(surface)의 특성과 관련된 활동 (Maletsky, et al., 2002; Harcourt Math, Math Grade 1).



<그림 16> 면(face)의 도입

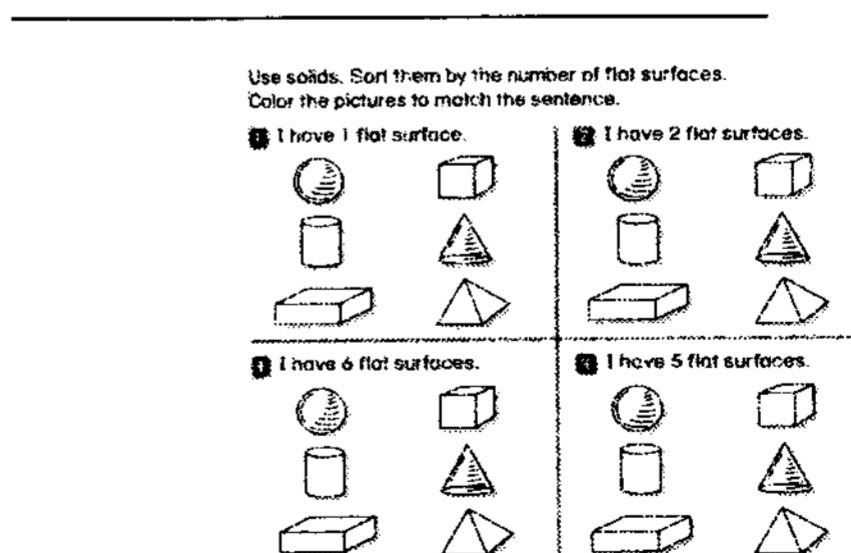
· 모서리: 입체도형의 구성성분을 다룰 때 사용되는 용어로 「면과 면이 만나는 선(분)」으로 도입되며, '면과 면이 만나는 선'으로 도입되는 경우가 흔하다. 여기서 초등학생의 입장에서는 포괄적 의미의 '선'(곧은 선, 굽은 선)보다는 '선분'으로 구체적인 용어로 진술하는 것이 바람직하다고 생각된다(<그림 4>, <그림 14>).

· 밑면: 밑면과 관련된 영문용어는 'base'이다. 즉, 입체도형의 토대(기초, 바탕)가 되는 면이라 뜻이다. 밑면이라는 용어에는 '밑'이라는 방향과 관련된 용어로 인하여 가끔씩 학생들이 오인할 수 있다는 점에서 개념형성에 주의가 요구된다.

· 옆면: 우리의 경우는 입체도형에서 「옆으로 둘러싸인 면」으로 용어설명을 하고 있는 데, 밑면과 마찬가지로 '옆'이라는 방향과 관련된 모호한 용어를 사용하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위한 하나의 방안은 먼저 주어진 입체도형에서 밑면을 결정하고, 그 후 「밑면이 아닌 면」이라는 관점에서 옆면을 설명할 수 있다.

다. 평면도형과 입체도형

앞서 언급한 것처럼 평면(plane)에 대한 설명이나 표현은 도입하지 않고 있음으로 인하여 평면도형의 설명이



4) 입체도형의 표면으로서의 평면도형(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 1)



나 약속하기는 초등학교 수학교과서에는 없다. 그러나 <6-가> 단계에서 입체도형의 정의를 도입할 때, 분류의 관점에서 평면도형이라는 용어를 사용하고 있음을 알 수 있다(<그림 17> 참조).

활동 1 평면도형이 아닌 도형을 찾아보시오.

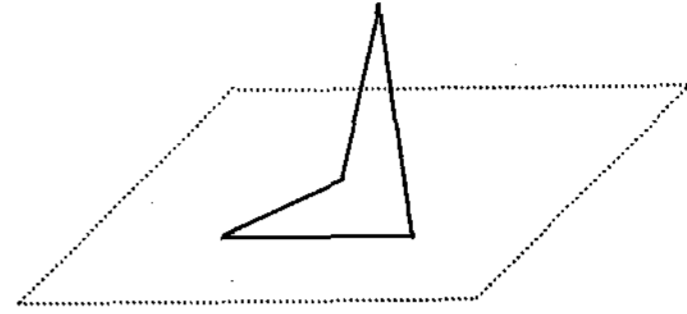
<그림 17> 입체도형과 관련된 활동
(교육부, 2004, <6-가>, p. 18)

따라서 평면도형의 도입시기인 <2-가> 단계에서 그 용어를 도입하는 것을 고려해야 한다. 이 경우에 입체도형의 용어도 동시에 도입하는 것이 학생들의 도형인식에 도움을 줄 수 있다. 이러한 문제는 평면(plane)이라는 무정의 용어의 도입과도 연관이 된 것이기는 하지만, 학생들의 여러 가지 도형에서 평면도형과 입체도형을 분류하는 직관적 활동을 통해서 해결 할 수 있다고 생각된다. 이러한 점은 결국 평면도형과 입체도형을 단계별로 분류해서 다루는(1단계에서 4단계까지는 주로 평면도형, 5단계 및 6단계는 주로 입체도형) 교과서 구성의 문제와도 연관이 되는 문제이다.

또한 평면도형이나 입체도형 및 그 구성성분과 관련된 용어를 설명할 때 '둘러싸다'와 같은 수학적으로 엄밀하지 않은 용어(설명)의 사용으로 인해서 앞에서 언급한 (C1)의 문제가 항상 발생할 수 있음을 상기해야 하며, 비교적 엄밀한 정의를 하더라도 활동의 과정에서 그 정의가 다른 의미로 사용되는 (C2)의 문제도 주의해야 한다.

라. 다각형과 이와 관련된 용어

평면도형이라는 용어가 교과서에서 약속하기 형태로 도입되지 않아서 그런지는 모르지만, 초등학교 수학교과서 다각형의 정의에 그 다각형이 놓여진 범주가 항상 생략된다. 예를 들어, 「4개의 선분으로 둘러싸인 도형」으로 사각형을 정의하고 있는 데, 이 도형이 놓여진 공간의 설명이 없다. 이 때문에 <그림 18>과 같은 도형을 4각형이라고 학생들이 인식할 수도 있다.



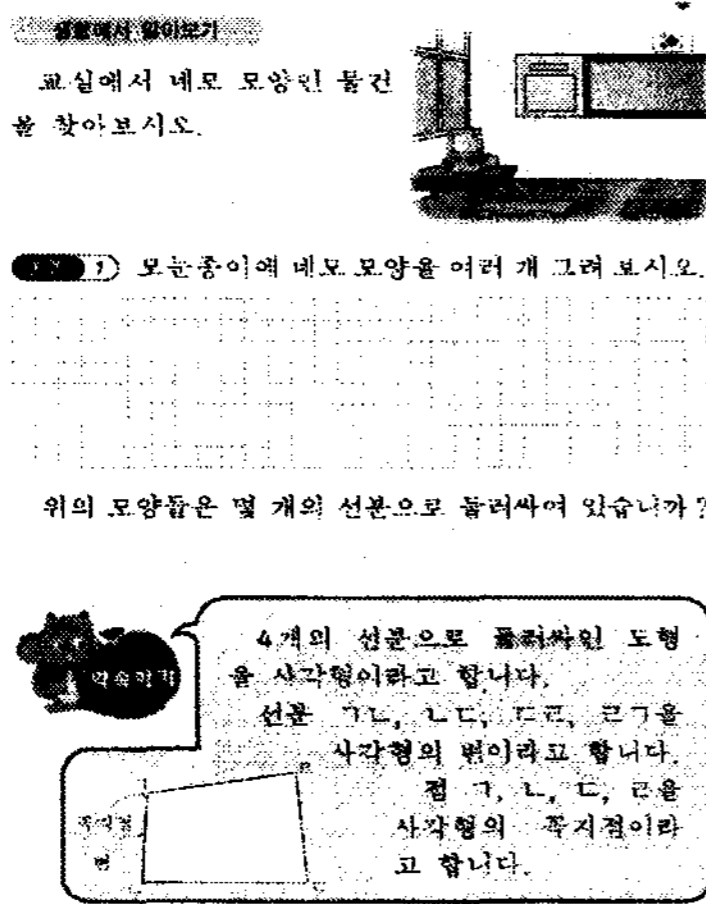
<그림 18> 4개의 변을 가지는 도형

이러한 오류를 해결하기 위한 하나의 방안으로 다각형의 정의에 「선분들로 둘러싸인 평면도형」으로 구체화 하는 방안을 생각할 수 있다. 또는 입체도형(초등에서는 볼록인 경우만 다룬다)의 2차원 패턴(평평한 표면)의 관점에서 설명하는 방안도 생각해 볼 수 있다.

또 다른 문제는 다각형과 관련된 용어 선택의 문제이다. 구체적으로, 다각형의 용어 설명은 「선분의 수」로서 결정되는 데, 용어 자체는 「각의 수」로 조어가 되어 있다는 것이다. 이 경우 다각형의 약속하기를 하기 이전에 학생 스스로 용어를 만들어 보는 활동도 유용할 수 있다. 예를 들어, 삼변형과 삼각형, 사변형과 사각형 등. 실제로, 우리의 경우 사각형이라는 용어의 도입과 관련된 활동은 네모 모양인 물건 찾아보기, 그려보기를 통해서 불변량(선분의 개수)을 추상화 한다. '위의 모양들은 몇 개의 선분으로 둘러싸여 있습니까?'라고 묻고, 바로 사각형의 약속하기가 도입된다(<그림 19> 참조).

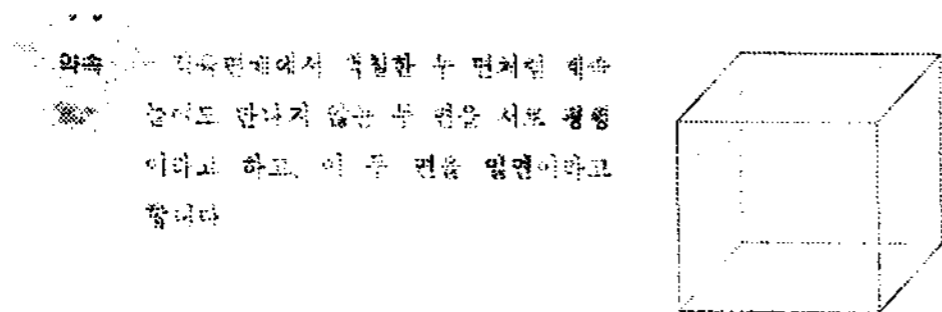
여기서 교수학적 관점에서 생각해 볼 점은 사각형이라는 용어가 우리에게 관습적인 수학적 용어이지만, 처음 도형을 배우는 학생들에게는 다소 생소한 용어일 수 있다. 따라서 학생들에 스스로 용어를 만드는 활동을 도입한다면 개념이미지 형성의 측면에서 유용하다고 생각된다.

평면도형인 다각형의 용어를 사용해서 설명되어지는 입체도형의 용어에는 각기둥과 각뿔이 있다. 각기둥의 경우는 그림과 함께 「위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형」으로, 미국의 경우(Maletsky, et al., 2002)는 다면체를 「다각형인 면을 가지는 입체도형」으로 도입하고, 그 후 다면체의 범주에서 각 기둥을 설명하고 있다. 각뿔의 경우는 몇 개의 그림으로 제시, 미국의 경우(Maletsky, et al., 2002)는 단지 하나의 밑면을 가지는 다면체로 설명한다.



<그림 19> 사각형의 용어 도입 (교육부, 2004, <2-가>, p. 38)

각기둥의 정의와 관련하여, 입체도형에서 '두 면의 평행'과 관련된 개념은 직육면체를 다룰 때 처음 도입되고 (<그림 20> 참조), 이 개념을 각 기둥에 직관적 일반화를 하고 있다. 즉, 두 다각형의 평행개념을 별다른 설명 없이 기술하고 있다. 실제로, 직육면체 후에 나타나는 입체도형에서의 면의 평행 개념을 별다른 설명 없이 기술 일반화하고 있다.



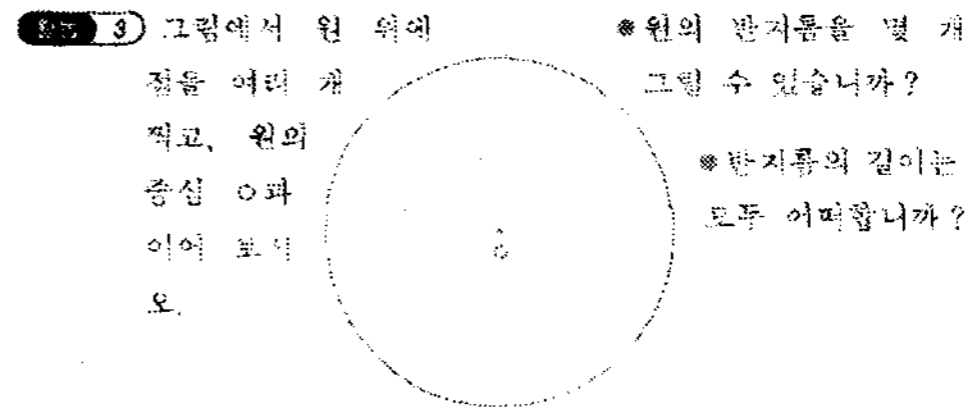
<그림 20> 면의 평행(교육부, 2004, <5-가>, p. 56)

또한 용어설명을 살펴보면 밑면의 특징만을 기준으로 삼고 있다. 즉, 각 기둥이 속한 범주가 단지 입체도형(미국의 경우 다면체가 범주)이기 때문에(옆면에 대한 설명이 없음), 만일, 그림의 제시가 없다면 인식의 문제가 제기될 수 있다.

마. 원과 이와 관련된 용어

원과 관련된 초등수학교과서의 내용을 살펴보면, 먼저 <2-가> 단계에서 「본을 떠 그린 동그란 모양의 도

형」으로 도입하고, 원의 구성성분과 관련된 용어는 <3-나> 단계에 나타나고 있다. 여기서 <그림 8>과 <그림 21>를 살펴보면 원은 그 내부를 포함하고 있지 않은 도형이다.



<그림 21> 원의 반지름 활동 (교육부, 2004, <3-나>, p. 32)

그러나 원과 관련된 대부분의 활동(모양 만들기, 분수 개념지도 등)은 실제로 원판을 이용하고 있다는 점에서 원과 그 내부를 포함하고 있는 원판을 동일시하는 경향이 형성될 수 있다(앞에서 논의한 (C2)의 문제). 구체적인 조작기의 학생들에게는 실제적인 활동을 통해 획득한 개념 이미지가 개념 정의보다 앞설 가능성이 있다는 점을 염두에 두어야 한다.

평면도형인 원이라는 용어를 사용해서 설명되어지는 입체도형의 용어에는 원기둥, 원뿔, 구가 있다.

원기둥의 정의와 관련하여, 입체도형에서의 '두 면의 평행'과 관련된 개념은 각기둥과 마찬가지로 직육면체로부터 직관적 일반화를 하고 있다. 또한 원기둥과 원뿔의 정의의 설명('...합동인 원'과 '...밑면이 원')에 있는 '원'을 실제로 '원판'을 의미한다. 이 경우에 앞에서 논의한 (C2)의 문제가 발생할 수 있다. 그리고 원기둥과 원뿔의 정의 설명에서 '꼭면'이라는 용어는 이전에 배운 입체도형의 경험으로부터 형성된 관념인 면은 '평평하다'라는 이미지가 혼돈을 겪을 수 있다. 이와 같은 문제는 초등학교 수학교과서에서 '면'에 대한 용어의 설명이 없이 도입 사용되고 있다는 점에서 기인하다고 볼 수 있다. 여기서 고려해야 할 관점의 문제는 '다면체'의 범주를 어디까지 볼 것인가의 문제와 관련된다. 즉, 우리의 경우는 원기둥과 원뿔을 일반적인 관점과는 다르게 다면체의 범주에 속하다고 해석할 수 있고, 중등과정과의 연계적 측면을 고려하지 않은 문제점이 있다.

III. 도형영역 개념정의에 대한 교사 인식도 분석

본 연구를 수행하면서 현재 재직하고 있는 제주도내 교사 80명에게 오류의 가능성이 있는 개념 문제인 점, 평면, 다각형, 원에 대해 교사들의 수학적 지식과 교수학적인 관점에 대해 물었으며, 설문지의 구체적인 내용은 <부록>을 참조한다. 설문 조사 시 경력별(5년미만, 5-10년, 10년-20년, 20년 이상 각 20명씩)로 설문 대상을 선정하여 경력별로 생각의 차이가 있는지 살펴보고자 하였으나, 설문결과를 분석해 본 결과 경력대별로 유의미한 차이가 없었다.

설문에 대한 80명의 회신에 대한 내용을 분석하여 기본도형, 다각형, 원, 도형영역의 지도로 나누어 분석 정리한 내용은 아래와 같다.

1. 기본도형(점, 평면)에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 도형의 정의에 바탕이 되는 용어인 점(point), 선(line), 면(plane) 등의 무정의 용어 중에서도 초등학교에서 약속되고 있지 않은 점과 평면에 대한 교사 인식을 알아보기 위해 실시되었다. (<부록>의 2. 3. 참조)

<표 1> 기본도형에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈도					계
	①	②	③	④	⑤	
2.“점”을 설명 없이 시각적 표현으로만 도입하는 데 대한 생각	12	26	30	11	1	80
3. 학생이 평면이 무엇인가라고 묻는다면 어떻게 설명할 것인가?	50	3	25	2	0	80

‘점’이라는 수학용어에 대하여, 초등교사들은 현행(용어 설명 없이 사용하고 있음) 보다는 시각적 표현(·; dot)과 본래 의미(point)를 알 수 있도록 점에 대해서 교과서에 실리거나 설명해주어야 한다는 의견을 가지고 있었다(56명). 아동들이 상식적으로 알고 있는 점은 직관적

표현인 점(·; dot)인 것만을 생각할 때 위치적 의미의 설명이 필요하다. 점에 대한 위치적 의미를 설명하는 방법으로 교수학습 도구로 흔히 사용하는 레이저 포인터를 활용하는 것을 생각할 수 있다.

그러나 점에 대한 설문에서 12명의 교사는 점에 대하여 본래의 의미보다는 직관적으로 접근하는 경향을 보이고 있으며, 또한 11명의 교사는 이 용어에 대하여 깊이 생각해 본적이 없다는 반응을 보였다. 이러한 반응은 어느 정도는 현재의 경험주의적 수학교육론의 영향이라고 생각된다.

‘평면’이라는 수학용어에 대해서는 시각적 표현, 직선이 움직인 자취의 의미 모두를 설명한다는 의견도 많았으나 50명의 교사가 구체물을 활용한 시각적인 학습이 적합하다는 응답을 했다.

학교 현장에서는 기본도형인 점, 평면의 의미에 대해서 교과서에 지도 내용을 구성해야 할 필요성이 있음을 이야기하고 있으며, 3번 설문의 답변을 보면 많은 교사들이 교과서에는 실리지 않았지만 학생들의 이해 수준에 맞게 실생활에서 구체물을 활용하여 개념을 지도함을 알 수 있다. 초등학교학생들의 인식수준을 생각해본다면 다양한 구체물 및 예시를 통한 학습은 도형의 개념 학습에 도움을 줄 것이다. 다만, 활용하고 있는 구체물 및 전형적 모델이 지니는 ‘포괄적 확장의 원리’를 생각해 볼 때 개념 지도에 문제가 없는지 또는 학교 학년의 상승에 따라 어떻게 다른 맥락으로 재정의가 되고 있는지 교사들은 인식하고 있어야 한다.

2. 다각형에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 다각형의 정의에 사용된 맥락 의존적인 정의에 대한 교사들의 생각과 직관적 수준과 개념적 수준의 갈등의 문제, 관계적 이해(분류)의 관점에 따른 용어 도입의 문제에 대해 다루었다. (<부록>의 4. 5. 6. 7. 8. 9. 참조)

제 7차 교육과정 교과서 <2-가>단계에서는 사각형을 “4개의 선분으로 둘러싸인 도형”이라고 정의하면서 ‘둘러싸인’이라는 용어가 처음 도입된다. 이에 대해 대부분의 교사는 ‘둘러싸인’의 의미를 내부와 선분 모두를 포함하고 있다고 인식하고 있으며 내부를 포함했을 때 학생

들의 지도에 더 유용하다고 생각하고 있었다. 후속학습인 둘레의 길이, 넓이, 입체도형의 전개도 등의 개념과 연계가 되어야 하고, 다각형 지도 시 색종이 오리기 내부 색칠하기 등 구체적 조작활동을 하므로 교사들은 학생들이 쉽게 이해할 것이라는 의견이었다. <1-나> 단계에서 구체물을 본뜨는 활동을 통해 세모, 네모의 형태를 인식하는 활동을 하는 것을 보면 저학년 시기에는 도형의 형태 즉, 선분만을 의미하는 것으로 지도하는 것이 유용하다고 여길 수 있다. 박교식·임재훈(2004)은 초등수학의 특징이 엄밀하지 않은 다소 애매한 표현을 사용하여 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성을 고려한다고 하였다. 입체도형의 전개도 지도시 자르는 맥락에서는 ‘속이 짝 차 있는 도형’이라는 의미를 선택하고, 펼치는 맥락에서는 ‘속이 빈 도형’이라는 의미를 선택하는 것처럼 수학적 엄밀성에서 보면 결함이 생긴다. 그러나 학교수학에서 어느 한 시점에서 모든 수학적 관점의 맥락이 등장할 수 없으므로 학년, 학교급이 올라감에 따라 점진적으로 보다 수학적인 맥락에서 정의가 등장하게 된다. 교사들은 초등학교에서 사용하는 수학적 개념들이 학교, 학년이 올라갈수록 보다 엄밀하고 수학적인 용어로 수정된다는 것을 알고 있다. 하지만, 학교, 학년이 올라갈수록 엄밀해지는 용어 및 개념 정의가 초등학교에서 배웠던 용어들의 토대위에서 얻어진 개념이라고 볼 때 초등학교 교과서에 등장하는 맥락의 의미를 통찰하여 보다 수학적으로 접근할 수 있는 방법에 대해 교사들은 숙고하여야 할 것이다. 특히 활동을 통해 얻어진 개념이 반드시 수학적인 개념이 아니라는 것을 교사는 인식하여 후속학습에서 다른 맥락이 등장할 때 발생하는 인식의 갈등의 문제를 줄이는 방법을 모색해야 한다. 3차원 공간에서 동일평면상에 놓여 있지 않은 “4개의 선분으로 둘러싸인 도형”이 사각형인가라는 질문에 대해 31명의 교사가 ‘사각형이다’라고 답변하였는데, 너무 넓은 류(類)를 제시함으로써 혼동을 줄 수 있는 개념으로 교사들조차도 평면도형이 아닌 도형을 사각형이라 인식하는 오류를 범하고 있었다. 조영미(2001)는 초등학교 도형 영역에서는 최근류를 제시할 수 있음에도 불구하고, 매우 넓은 류(類)를 제시하여 도형을 정의하는 경우가 적지 않다고 하였는데 사각형의 정의를 “4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형”이라 하는 방법에 대해서도 고려해야 한다.

또, 보다 엄밀한 의미의 도형의 정의에 대해 학습했던 교사들조차 직관적 수준과 개념적 수준의 혼동을 겪고 있는 것으로 보여지므로 전형적인 모델, 예시를 통한 사물의 정의를 가르칠 때 발생하는 문제점을 교사들도 인식해야 하는 설문결과로 보여 진다.

<표 2> 다각형에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈도					계
	①	②	③	④	⑤	
4. 다각형의 약속하기의 “선분으로 둘러싸인 도형”에서 “둘러싸인”의 의미	63	9	7	1		80
5. 다각형에서 내부를 포함하고 있는 것과 포함하지 않는 것 중 지도에 유용한 것	56	7	17 (무응답)			80
6. 공간상의 도형으로 4개의 선분으로 둘러싸인 도형은 사각형인가?	31	37	8	4		80
7. 수업시간에 오목다각형을 제시한 경험	21	55	4			80
8. 다각형의 정의의 관점은 ‘변의수’이면서도 ‘각의 관점’인 용어를 사용하는 문제에 대한 의견	12	43	23	1	1	80
9. ‘관계적 이해’에 따른 용어도입에 대한 의견	17	45	16	0	2	80

교사가 명확한 개념과 다양한 예들을 가지고 있다는 것을 전제로 할 때 학습자가 예시를 통한 정의 방법을 제대로 활용할 능력을 갖추게 되는데, 이를 위한 방안으로 Fischbein은 다음과 같은 제안을 하고 있다(강홍규·조영미, 2002, p. 100).

가능한 일찌감치 수학적인 정의가 의미하는 바를 학습해야 한다. 가능한 구체적 조작기에 시작해서 형식적 조작기에 정의의 개념을 확실히 고착시키는 경험을 하는 것이 필요하다. 해당하는 용어를 사용함에 있어 개념을 명확히 정의하는 활동이 갖는 결정적인 역할을 배워야만 한다. 개념에 비추어 전형적인 모델을 분석하고 개념에 따라 예인 것과 아닌 것을 찾는 학

습을 하면서, 학습자는 어떤 개념을 이해하는 단계에 이를 수 있을 것이다. 이때 도달한 개념은 의미 없는 것이 아니며 또한 건전하게 사용될 예시와 관련되어 있을 것이다.

Fischbein의 제안의 구체적인 방안에 대해서는 많은 연구가 필요하겠지만 현재 수학교과서에서 제시되고 있는 도형의 개념에 대한 교사들의 명확한 개념 정의가 전제되어야 아동들이 개념을 이해하는 수학적 활동이 이루어질 수 있음을 강조하는 논의이다.

학습자가 어떤 도형의 개념을 이해하는 단계에서 유용한 활동은 분류하기 활동이다. <설문 9>를 분석해보면 도형영역에서는 평면도형과 입체도형을 단계별로 분리하거나 각 소주제별(차시별)로 도형을 다루고 있는 부분에 대해 많은 교사들이 문제 인식을 하고 있었다. 최병훈·방정숙·송근영·황현미·구미진·이성미(2006)의 도형과 측정영역을 중심으로 한 싱가포르 교과서와 우리나라 교과서의 비교 연구에 따르면 학생 스스로 짚어보고 구별하여 분류하는 활동은 도형 영역에서 강조되는 활동 중의 하나이나 우리나라 교과서의 경우 도형의 개념 도입 시 분류하기의 사고 기능을 찾아 볼 수 없다는 것이 아쉽다고 하였다. 현행 7차 수학과 교육과정이 수학적 사고력과 문제 해결력을 강조하는 방향인 점을 생각해 본다면 분류하기 활동을 통한 개념 도입의 문제는 우리 교과서에서도 다뤄져야 할 내용이다.

또, 우리나라의 초등수학 교과서의 도형 영역이 분류하기 활동을 통한 개념 도입보다는 학습할 도형의 개념에 관한 내용을 찾는 활동을 통해 정의를 내리는 과정으로 학습이 이루어지는 까닭에 우리나라 교과서에 제시된 도형들은 매우 제한적이다. 수업 시간에 오목다각형을 제시한 경험이 있다고 답한 교사가 21명으로 많지 않았으며 교사용 지도서에 초등학교에서는 볼록다각형만을 다룬다는 제한점이 제시되어 있다. 그러나, 다양한 도형을 분류, 조작하는 활동을 하는 기회가 자주 주어진다면 학생들은 개념을 기억하는 차원에 머무르는 것이 아니라 개념에 대한 이해를 이끌어낼 수 있을 것이다.

정의와 용어가 일치하지 않는 관점에 대한 설문에 대한 응답으로는 기존에 사용하던 용어를 그대로 사용하는 의견이 43명으로 가장 많았고, 삼각형과 삼변형, 사각형과 사변형 등과 같이 용어 정의를 다양하게 수용하자

는 의견에도 23명이 응답하였다. 오랫동안 사용해온 용어를 바꾸는 것에 따른 많은 문제가 파생되며 논의도 필요하나 교사는 교과서의 내용을 재구성할 수 있으므로 도형의 용어 지도 시 분류의 관점에 따라 아동들이 도형의 이름을 붙여보는 활동을 하면 도형의 관계적 이해에도 도움을 주고 수학적 사고력을 향상시키는데도 유용한 활동이 될 것이다. 예를 들어 삼각형을 변을 기준으로 분류한 후 부등변 삼각형, 이등변 삼각형, 삼등변 삼각형이라 할 수도 있고 또는 변이 같지 않은 삼각형, 두변 같은 삼각형, 세변이 같은 삼각형처럼 용어를 풀어 이름을 만드는 학생도 있을 것이다. 단, 용어 소통의 문제 역시 수학에서 중요한 문제이므로 반드시 이러한 활동 후 도형의 정확한 이름을 지도해야 한다.

3. 원에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 초등학교 수학 교과서에 실린 원과 원기둥의 정의에 사용된 원의 용어에 대한 교사들의 이해 정도와 지도관점에 대해 다루었다. (설문의 내용은 <부록>의 10. 11. 12. 13. 참조)

<표 3> 원에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈도					계
	①	②	③	④	⑤	
10. 학생이 원이 내부를 포함하고 있다는 오류를 범할 가능성	5	70	3	2		80
11. 원은 내부를 포함하고 있는가의 문제	44	30	6			80
12. 원의 면적을 '0'이라고 한 학생에 대한 정답 처리 문제	20	1	20	9		50
13. 원기둥의 정의에서 사용된 원의 용어 문제	29	12	9			50

다각형이 내부를 포함하는 것으로 취급하는 인식이 많은 것처럼 <그림 8>에서 원이 내부를 포함하고 있는가를 묻는 질문에 대해 44명의 교사들이 원이 내부를 포함하고 있다고 답하였다. 원과 관련된 대부분의 활동이

원판을 이용하고 있다는 점에서 내부를 포함하고 있는 원판을 원과 동일시하여 원을 맥락에 따라 내부를 포함한다고 생각하는 오류를 범하고 있다.

설문의 12, 13번 문항은 11번 문항에서 원이 내부를 포함하고 있지 않다고 답한 교사들만 응답하도록 되어 있었으나 내부를 포함하고 있지 않다고 답한 교사가 30명에 지나지 않으며 내부를 포함하고 있다고 답한 교사 중에서도 설문에 응한 교사가 있어 설문에 응한 교사 50명의 응답을 분석하였다.

<그림 8>의 관점은 원이 내부를 포함하고 있지 않고 있으나 원 위의 점을 찍을 때 내부에 점을 찍을 수 있는 가능성에 대해서는 70명의 교사가 가능성이 있다고 답하였다. 교사는 원은 내부를 포함하고 있지 않다는 것을 분명히 인식하여 학생들이 오류를 범하지 않도록 해야 할 것이다.

원이 내부를 포함하고 있지 않다고 생각한 아동이 원의 넓이를 계산하는 문제에서 '0'이라고 답할 가능성에 대해서는 20명의 교사가 가능성에 대해 생각해 본 적이 없다고 하였으며 20명의 교사는 틀렸다고 하겠다는 것으로 보아 원의 넓이를 구하는 경우는 맥락에 따라 내부를 포함한 넓이를 구하는 것으로 인식하는 것으로 보인다. 왜 '0'이라는 답을 했는지 물어보고 정답으로 처리하겠다는 것과 원의 넓이를 구하는 것은 원 내부의 넓이를 구하는 것으로 다시 설명해주겠다는 기타 의견이 있었다.

초등수학교과서에서 제시되고 있는 원기둥의 정의에 대한 교사의 반응을 분석해보면 29명의 교사가 틀린 답으로 하겠으며 12명의 교사는 이와 같은 관점으로 생각해 본 적이 없다는 것으로 보아 원기둥의 정의에 사용된 원의 개념 역시 맥락에 따라 원판으로 해석하고 있음을 알 수 있다. 이러한 오류를 줄이는 방법에 대해 평면과 입체에 대한 개념 설명이 선행되어야 하며 입체도형은 겹을 둘러싼 면이 있는 도형이라고 정의해주고 각기둥에서 배운 내용을 상기하도록 하겠다는 의견과 원의 넓이를 내부의 넓이를 구하는 것으로 원기둥에 사용된 원은 내부를 포함하고 있음을 알리는 방향으로 교과서에 설명되어야 한다고 하는 의견이 있었다.

이와 같이 맥락에 따른 해석은 초등학생들이 원을 내부를 포함하고 있는 도형으로 생각할 가능성을 높인다. 물론 초등학교에서 다루지는 도형의 개념과 관련된 내용

들이 초등학생의 인식 수준에 알맞은 맥락에서 다루어져야 하므로 교과서의 내용이 크게 문제가 되지 않는다. 교사들은 학생들의 인식수준이 높아질수록 새로운 맥락이 등장하고 그 맥락에서는 원을 원판으로 해석하는 내용이 수정될 수 있을 것으로 기대하기 때문이다. 이러한 교사의 기대대로라면 학교급이 올라갈수록 고등의 수학교육을 받게 된다면 원을 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합으로, '부등식의 영역'이라는 맥락에서 지금 논의하고 있는 도형과 도형의 영역에 대한 의미를 예전보다 명확하게 이해할 수 있을 것이다.

그러나 설문12의 답변에 대한 많은 오류의 원인이 초등수학교육의 관점에서 문제를 해석하여 접근한 것이었는지, 정말로 원의 개념에 대한 오개념을 지니고 있는지는 불분명하나 초등학교 교사들이 초등학교 수준의 수학개념 정의에 대한 이해에만 머무른다면 교사들의 기대대로 학교급이 올라가는 과정에서 새로 적용되는 맥락을 학생들이 이해하지 못하고, 개념 수정 시 어려움을 겪을 것이다. 이는 중등교사들이 초등수학이 지니는 도형 용어들의 불분명함(실생활과 관련된 활동, 맥락 의존적인 정의, 예시적 정의 등)에 대해 이해해야 하는 것과 같은 맥락이라 여겨진다. 원에 대한 교사 인식도를 분석한 결과 교사들은 다루고 있는 도형 개념의 본질에 대해 정확한 개념을 지녀야하며 이 정의로부터 파생되는 입체도형의 맥락에 대해서도 분명히 이해하여야 할 것이다.

4. 도형지도의 전반적인 사항에 대한 교사들의 인식도 분석

설문의 내용은 도형영역 지도 시 수학적 정의에 대한 생각과 학교수학에 사용되는 용어에 대한 지도관점에 대해 물었다. (설문의 내용은 <부록>의 15, 16. 참조)

63명의 교사가 도형영역 지도 시 수학적 정의에 대한 생각을 하고 있다고 답하였으나 본 설문에 대한 관점에 대해서 생각해보지 않은 교사도 16명이나 되었다. 학교수학에서 사용하고 있는 교과서에 실린 정의에 대해서 많은 교사들이 오류의 가능성을 염두에 두고 지도한다고 하였으며, 경력이 있는 교사 중 엄밀한 정의의 방법을 채택해야 한다고 인식한다고 답한 교사가 많았다.

<표 4> 도형지도의 전반적인 사항에 대한 교사인식도 설문결과

설문내용	빈도					계
	①	②	③	④	⑤	
15. 도형 영역 지도시 수학의 정의에 대한 생각의 빈도	20	43	16	1		80
16. 학교수학에서 사용되는 용어에 대한 인식	22	50	5	3		80

인지 발달단계에 맞는 교육이 이루어져야 하므로 너무 엄밀한 정의를 초등수학에서 다루는 것은 힘이 들고 학습자에게 이러한 관점으로 모두 안내할 필요는 없다는 생각과 엄밀한 수학 정의를 채택하되 약속하기 상에 제시하는 것이 아니라 다양한 예나 구체적 조작활동을 통해 교사들이 학생들이 접근할 수 있도록 돕는 역할을 해야 한다는 기타 의견이 있었다.

IV. 결론 및 제언

학교수학에서의 상황은 일상의 상황과는 다르다. 이 두 가지의 상황사이의 거리감을 좁히기 위하여, 현행 수학교과서에서는 실생활 문제를 많이 도입하고 있으며, 이로부터 많은 수학적 개념을 추출한다. 일반적으로 수학적 개념은 수학적 정의로부터 만들어지며 출발점이 된다는 점에서, 정의의 중요성을 엿볼 수 있다.

정의는 전문적 상황인 순수수학적 측면과 학생들의 인지수준을 고려한 학교수학적 측면이 있다. 학교수학적 측면에서의 정의는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 제시된다. 이러한 점에서 항상 학생들의 수학적 오개념이 형성될 소지가 있다.

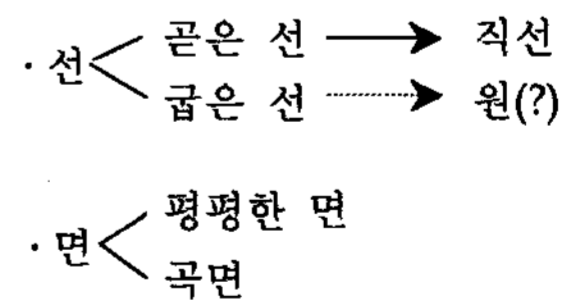
장혜원(1997)은 개념 형성 과정에서 학생들의 표상에 가장 결정적인 영향을 미치는 것은 교사와 교과서 요인일 것이라고 하면서 새로운 개념이 소개될 때 교사나 교재가 사용한 표현이 학생이 구성하는 개념 표상의 근거가 되며 그것에 국한된 표상만을 갖기도 한다고 하였다. 이 말의 의미는 교사의 수학적 내용에 대한 이해 정도나 교과서에 소개된 수학적 내용의 수준이 아동들의 개념

형성의 근간이 되며, 새로운 개념의 형성을 위해서는 교사의 접근 방법과 수학 교재에 내재된 수학적 개념을 향한 적극적 접근이 필수적이라는 것이다. 그러므로 수학의 도형 영역의 개념 지도 시에는 교사들의 수학적 개념에 대한 좀 더 신중한 접근이 필요하며, 교과서에 소개된 정의의 관점을 이해하고 덜 엄밀한 형태로 제시된 학교수학의 교수학적인 측면에서 오개념이 형성될 가능성이 있음을 항상 염두에 두고 도형개념을 지도해야 한다.

앞선 분석을 통해 초등수학의 도형영역에서 수학적 오개념이 형성될 수 있는 가능성을 살펴보고 교사 인식을 알아보았다. 이에 따른 도형교육에서의 유의점을 개략적으로 요약하면 다음과 같다.

첫째, 교사들은 가르치고자 하는 개념 이미지의 문제를 항상 생각해 보아야 한다. 구체적 조작기의 범주에 속한 초등학생들은 두 가지 상황의 개념이미지가 나타날 수 있다. 약속하기(정의)를 추출하기 위한 활동으로부터 획득된 이미지와 약속하기를 통해 형성된 이미지 사이의 충돌이 나타날 수 있다. 예를 들어, 원의 개념과 관련하여 원판의 이미지(활동으로 획득된 이미지)와 원의 이미지(약속하기를 통한 이미지)가 있을 수 있다. 이 두 가지 개념이미지 사이에 수학적 오개념이 형성될 수 있으며, 그 간극을 좁히는 교수방법이 요구된다. 즉, 개념정의와 개념이미지 사이의 의사소통이 필요하다.

둘째, 기하적인 정의에 바탕이 되는 기초용어와 관련된 영향을 생각해 봐야 한다. 예를 들어, 선과 면의 개념설정문제(<그림 22> 참조)는 모든 평면도형과 입체도형의 약속하기에 영향을 준다. 우리의 경우는 이와 관련하여, 두 가지로 세분화하여 다루고 있다. 즉,



<그림 22> 선과 면의 개념설정 문제

우리의 방식에서는 도형용어의 설명 중에 자주 나타나는 '선'과 '면'의 용어를 구체화해서 설명할 필요가 있다. 이를테면, 모서리를 정의할 때 「면과 면이 만나는 선」으로 용어 설명을 하고 있는데 이 경우 '선'을 '선분'

으로 구체화하자는 것이다.

한편, 초등수학교과서에서 다루고 있는 원과 관련된 도형(원, 원기둥, 원뿔, 구)을 제외하고는 대부분의 다른 도형의 경우에는 '선'은 '직선'을, '면'은 '평평한 면'을 의미하므로, 입체도형의 범주를 다면체인 경우와 아닌 경우로 나누어 다루는 것도 생각해 볼 수 있다. 이유는 입체도형의 도입순서를 보면 다면체를 먼저 다루고 나중 (<6-나> 단계)에서 비로소 원기둥, 원뿔과 구와 같은 일반적 의미에서의 다면체가 아닌 도형을 취급하고 있다는 점이다.

셋째, 도형을 취급하는 일관성의 문제를 생각할 수 있다. 직육면체와 관련된 용어의 경우는 비교적 상세하게 다루고 있지만, 그 외의 다른 입체도형의 구성성분과 관련된 용어는 소홀히 다루어지는 경향이 있다. 여기서 생각할 문제는 과연 일반화가 이루어수 있느냐는 점이다.

넷째, 도형과 관련된 조어의 문제를 생각할 수 있다. 오랫동안 사용해온 용어를 바꾸는 것에 따른 많은 문제가 파생되며 논의도 필요하나 교사는 교과서의 내용을 재구성할 수 있으므로 도형의 용어 지도 시 분류의 관점에 따라 아동들이 도형의 이름을 붙여보는 활동을 하면 도형의 관계적 이해에도 도움을 주고 수학적 사고력을 향상시키는데도 유용한 활동이 될 것이다.

끝으로, 도형의 도입시기와 방법을 생각할 수 있다. 관계적 이해의 관점에서 범주별로 도형을 도입하는 것이 교과서에 보다 강조되어야 할 것이다. 이것은 하나의 범주 안에서의 여러 가지 도형을 비교의 관점으로 파악하게 함으로, 도형이 지닌 용어의 수학적 개념을 좀더 쉽게 인식할 수 있다.

참 고 문 헌

- 강완 (1991). 수학적 지식의 교수학적 변환, 한국수학교육학회 시리지 A <수학교육>, 30(1), pp.71-89.
- 강홍규·조영미 (2002). 학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의, 수학교육학연구, 12(1), pp.95-107. 서울: 대한수학교육학회.
- 교육부 (2004). 수학 <1-가> 단계 ~ <6-나> 단계 교과서, 서울: (주)대한교과서.
- 박교식·임재훈 (2004). 다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석, 수학교육학연구, 14(1), pp.19-37. 서울: 대한수학교육학회.
- 우정호·조영미 (2001). 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구, 수학교육학연구, 11(2), pp.363-384. 서울: 대한수학교육학회.
- 장혜원 (1997). 수학학습에서 표현 및 표상에 관한 연구: 표상모델 개발을 중심으로, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문
- 조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성분석과 수준탐구, 학교수학, 4(1), pp.15-27.
- 최병훈·방정숙·송근영·황현미·구미진·이성미(2006). 한국과 싱가포르 수학 교과서 비교 분석:도형과 측정 영역을 중심으로, 학교수학, 8(1), pp.45-67.
- Beth, E. & Piaget, J. (1961), W. Mays(trans.) (1966), *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht: D. Reidel.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Maletsky, Evan M. et al. (2002). *Harcourt Math* (Math-Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6), Harcourt, Inc.
- Piaget, J. et al. (1977), *Recherches sur l'abstraction réfléchiante*, Paris: Presses Universitaires de France.
- Rich, B. (1963) (revised by Philip A. Schmidt) (2000). *Schaum's outlines Geometry* (3rd Edition), McGraw-Hill Companies, Inc.
- Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Computer Graphics*, Ph.D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.
- Tall, D. (1991). 고등수학적사고, (류희찬·조완영·김인수 역). 서울: 경문사.

Teachers' conceptual errors related to the definitions in the area of geometry of elementary school mathematics

Choi, Keunbae

Dept. of Math. Edu., Teachers College, Cheju National University, Jeju 690-781, Korea

E-mail: kbchoe@cheju.ac.kr

Oh, Suk kyong

Donam elementary school, 845-1, Donam-dong, Jeju Special Self-Governing Province 690-806, Korea

E-mail: goodend77@hanmail.net

Unlike ordinary situations, definitions play a very important role in mathematics education in schools. Mathematical concepts have been mainly acquired by given definitions. However, according to didactical intentions, mathematics education in schools has employed mathematical concepts and definitions with less strict forms than those in pure mathematics. This research mainly discusses definitions used in geometry (promising) course in primary schools to cope with possibilities of creating misconception due to this didactical transformation.

After analyzing problems with potential misconceptions, a survey was conducted with 80 primary school teachers in Jeju to investigate their recognitions in meaning of mathematical concepts in geometry and attitudes toward teaching. Most of the respondents answered they taught their students while they knew well about mathematical definitions in geometry but the respondents sometimes confused mathematical concepts of polygons and circles. Also, they were aware of problems in current mathematics textbooks which have explained figures in small topics (classes).

Here, several suggestions are proposed as follows from analyzing teachers' recognitions and researches in mathematical viewpoints of definitions (promising) in geometric figures which have been adopted by current mathematics textbooks in primary schools from the seventh educational curriculum.

First, when primary school students in their detailed operational stage studying figures, they tend to experience a collision between concept images acquired from activities to find out promising and concept images formed through promising. Therefore, a teaching method is required to lessen possibility of misconceptions. That is, there should be a communication method between defining conceptual definitions and images.

Second, we need to consider how geometric figures and their elements in primary school textbooks are connected with fundamental terminologies laying the foundation for geometrical definitions and more logical approaches should be adopted.

Third, the consistency with studying geometric figures should be considered.

Fourth, sorting activities about problems in coined words related to figures and way and time of their

introductions should be emphasized. In primary schools mathematics curriculum, geometry has played a crucial role in increasing mathematical ways of thoughts. Hence, being introduced by parts from viewpoints of relational understanding should be emphasized more in textbooks and teachers should teach students after restructuring this.

Mathematics teachers should help their students not only learn conceptual definitions of geometric figures in their courses well but also advance to rigid mathematical definitions. Therefore, that's why mathematics teachers should know meanings of concepts clearly and accurately.

* ZDM classification : D12, U22
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10, 97U20
* Key Words : definition, didactic transposition, levels of definition, context-dependent definition

<부 록>

기본도형(점, 평면) 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

2. 초등수학교과서에서는 “점”이라는 용어를 설명 없이 시각적 표현(dot; •)으로만 도입하고 있습니다. 이에 대해 어떻게 생각하십니까?

- ① ____ 지금처럼 시각적 표현으로만 도입해도 별 문제가 없다.
- ② ____ 점의 본래 의미인 공간에서의 장소 또는 위치의 의미(point, position, location)도 설명해주어야 한다.
- ③ ____ 시각적 표현과 위치적 의미를 알 수 있도록 점에 대해서 교과서에 설명되어야 한다.
- ④ ____ 깊이 생각해 본적이 없다.
- ⑤ ____ 기타()

3. 초등수학교과서에서는 “평면”이라는 용어를 설명 없이 도입하여 사용하고 있습니다. 만일 학생이 “평면이 무엇인가요?”라는 질문을 한다면 어떻게 설명하시겠습니까?

- ① ____ 구체물(철판, 박스 등)을 활용하여 시각적 표현으로 설명한다.
- ② ____ 직선이 움직인 자취의 의미로 설명한다.
- ③ ____ 시각적 표현, 직선이 움직인 자취의 의미 모두를 설명한다.
- ④ ____ 이와 관련하여 깊이 생각해 본적이 없다.
- ⑤ ____ 기타()

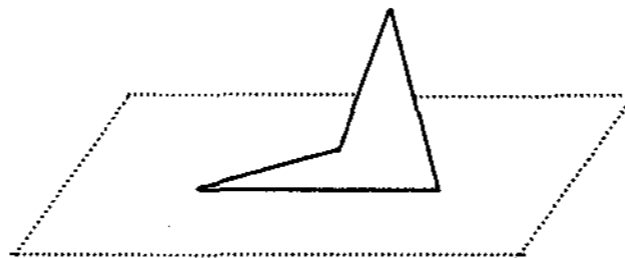
다각형 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

4. 초등수학교과서에서는 “선분으로만 둘러싸인 도형”으로 다각형의 약속하기로 도입하고 있습니다. “둘러싸인”의 의미와 관련하여 어떻게 생각하십니까?

- ① ____ 다각형은 내부와 선분 모두를 포함하고 있다.
- ② ____ 다각형은 선분만을 의미한다.
- ③ ____ 깊이 생각해 본적이 없다.
- ④ ____ 기타 ()

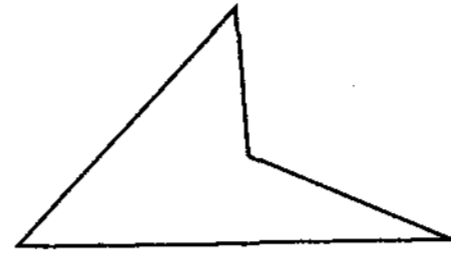
5. 4번 문항의 ①, ② 중에서, 초등학생에서 어느 것이 더 유용하다고 생각되니까? 그렇게 생각한 이유는 무엇입니까?

6. 초등수학교과서에서 사각형의 약속하기는 “4개의 선분으로 둘러싸인 도형”으로 되어 있습니다. 공간상에 위치한 아래의 도형도 사각형의 약속하기를 만족하고 있습니다. 아래의 도형도 사각형이라고 생각하니까?



- ① ____ 사각형이다.
- ② ____ 사각형이 아니다.
- ③ ____ 이러한 문제를 생각해 본적이 없다.
- ④ ____ 기타 ()

7. 초등수학교과서에서는 다각형의 예로 볼록다각형만을 다루는 경향이 있습니다. 수업시간에 오목다각형을 제시한 경험이 있습니까?

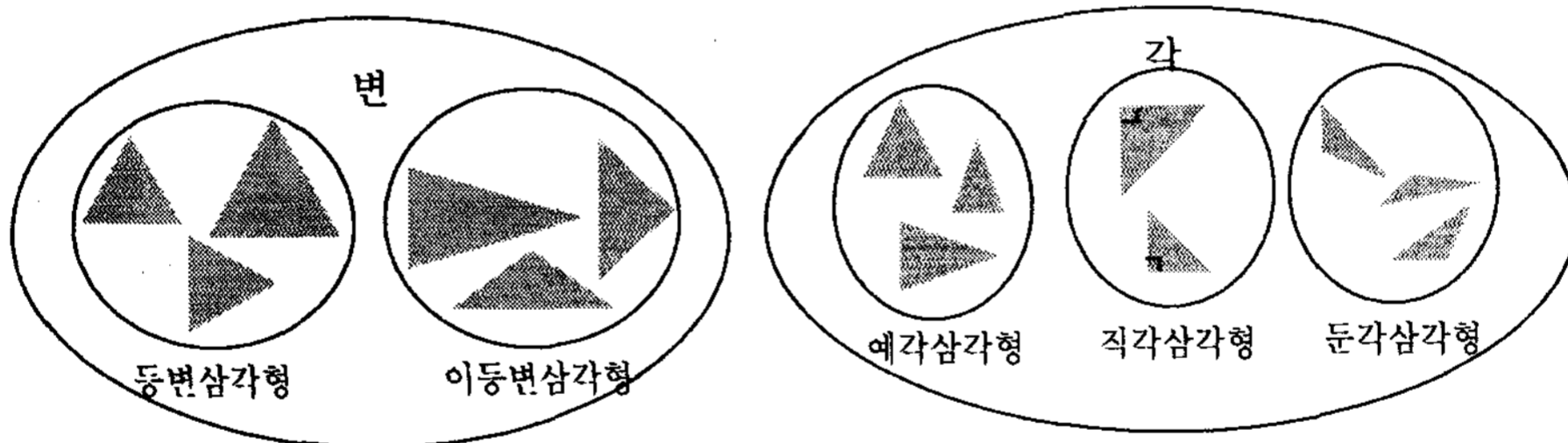


- ① ___ 있다
- ② ___ 없다
- ③ ___ 생각해 본적이 없다.

8. “다각형은 변의 수에 따라 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 등으로 부른다.”에서 다각형 정의의 관점은 ‘변의 수’이면서도 삼각형, 사각형 등의 ‘각의 관점’인 용어를 사용하고 있습니다. 이에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?

- ① ___ 일관성을 생각해 볼 때 변의 관점에서 삼변형, 사변형 등으로 이름을 약속하는 것이 좋을 것 같다.
- ② ___ 오랫동안 사용해온 약속이므로 그대로 사용한다.
- ③ ___ 삼각형과 삼변형, 사각형과 사변형 등과 같이 용어 정의를 다양하게 수용한다.
- ④ ___ 이러한 관점으로 생각해 본적이 없다.
- ⑤ ___ 기타 ()

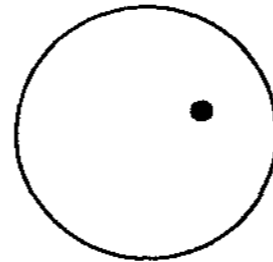
9. 삼각형, 사각형의 종류를 도입할 때 차시별로 약속하기(예, 정삼각형, 이등변 삼각형에 대해 알아보자)를 하고 있습니다. 만약 아래 그림처럼 각 또는 변에 따라 분류를 한 후 관점에 따라 용어를 동시에 도입하는 것에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?



- ① ___ 교과서처럼 차시별로 도입하는 것이 아동이 용어를 확실히 알 수 있는 것 같다.
- ② ___ 위의 활동을 통해야 아동이 용어를 확실히 알 수 있을 것 같다.(관계적 이해)
- ③ ___ 위와 같은 활동은 한번에 너무 많은 용어가 도입되므로 아동들에게 어려울 것 같다.
- ④ ___ 깊이 생각해 본적이 없다.
- ⑤ ___ 기타()

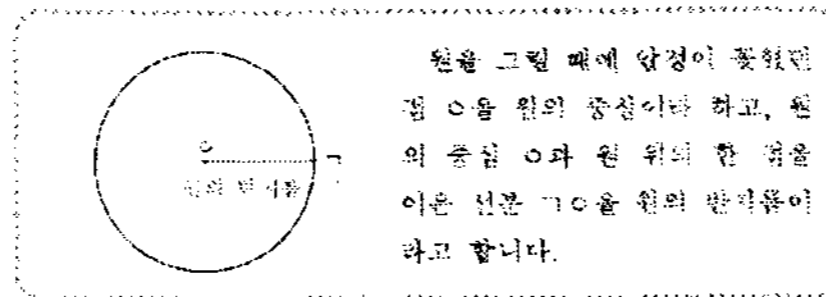
원 사항(해당 사항에 표시하여 주시기 바랍니다)

10. 초등수학교과서에서 원의 약속하기와 관련된 여러 가지 활동을 통한 학생들의 원의 인식에 대하여, '원 위의 한 점을 찍어라'라는 문제의 상황에서 아래의 그림과 같은 현상이 발생할 수 있는 가능성에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?



- ① ___ 가능성이 없다.
- ② ___ 가능성이 있다.
- ③ ___ 깊이 생각해 본적이 없다.
- ④ ___ 기타()

11. 아래와 같은 초등수학교과서의 약속하기에서 원은 내부를 포함하고 있습니까?

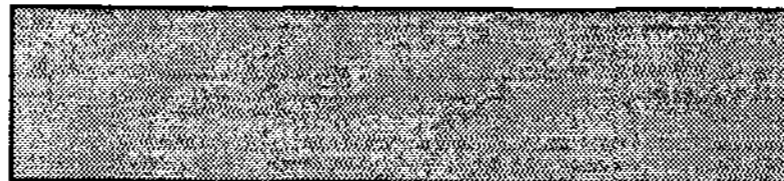


- ① ___ 내부를 포함하고 있다.
- ② ___ 내부를 포함하지 않는다. (이 경우 12, 13 문항으로)
- ③ ___ 깊이 생각해 본적이 없다.

12. 어떤 학급에서 '원의 면적을 구하라'라는 문제에서 답을 '0'이라고 한 학생이 있다면 어떻게 처리하겠습니까?

- ① ___ 그 학생의 답이 틀린 경우로 취급한다.
- ② ___ 그 학생의 답이 맞은 것으로 취급한다.
- ③ ___ 이와 같은 가능성에 대하여 생각해 본적이 없다.
- ④ ___ 기타()

13. 교과서에 원기둥을 "위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 원으로 되어있는 입체도형"으로 약속하고 있습니다. 만약 이 정의를 생각하여 원기둥의 전개도를 아래와 같이 그린 아동이 있다면 어떻게 지도하시겠습니까?



- ① ___ 그 학생이 틀린 경우로 취급한다.
- ② ___ 깊이 생각해 본적이 없다.
- ③ ___ 기타()

14. 문항 12와 13과 같은 오류를 배제하기 위한 선생님의 아이디어가 있으시면 기술해 주십시오.

전반적인 사항(해당 사항에 표시하여 주시기 바랍니다)

15. 도형영역을 지도할 때, 앞에서와 같은 수학정의에 대하여 숙고한 적이 있습니까?

- ① ___ 자주
- ② ___ 가끔씩
- ③ ___ 이와 같은 관점으로 생각해 본적이 없다.
- ④ ___ 기타()

16. 학교수학에서는 비교적 덜 엄밀한 방법으로 수학용어를 정의하고 있습니다. 이로부터 학생들에게 나타날 수 있는 수학적 개념의 오류에 대한 선생님의 관점은?

- ① ___ 엄밀한 정의의 방법을 택해야 한다.
- ② ___ 오류의 가능성을 항상 염두에 두고 가르친다.
- ③ ___ 이에 대하여 깊이 생각해 본적이 없다.
- ④ ___ 기타()