

## Piaget의 의미로서 무게와 무거움의 차이에 대하여

유 윤 재 (경북대학교)

### I. 서론

Piaget의 연구는 매우 방대하고 초기 연구와 후기 연구에서 많은 수정이 있었고 복잡한 동시에 모호함이 나타나기 때문에 Piaget를 이해한다는 것은 매우 어려운 일이다. 이 결과 Piaget의 이론을 이해하기 위한 몇몇 특징적 개념들의 범주 관계가 모호하게 진술되고 있는 것을 볼 수 있는데 예를 들면 우정호, (2000, p. 244)와 황혜정 외(2001, p. 142)는 무게를 모두 경험적 추상화의 사례로서 제시되고 있으며 두 문헌의 진술에서 무거움과 무게에 대하여 개념적 차이를 구분하지 않고 있다.

본 연구의 목적은 위에 언급한 무거움이라는 다양한 관찰 개념들을 모아서 만든 무게라는 개념이 Piaget가 말하는 두 가지 추상화, 즉 경험적 추상화와 반성적 추상화의 두 개념 중에 어느 편에 속하는가를 논구하는 작업인데 이 문제를 여기서는 편의상 간단하게 '무게의 문제'라고 하겠다. 결론적으로 무게라는 개념은 무거움이라는 관찰 개념으로 부터 논리/수학적으로 추상된 이차적 개념임을 밝힌다.

무게의 문제를 논구하는 방법은 Piaget의 원전(Piaget 1971,1980)으로부터 근거로 출발하는 방법, 여러 후속 연구서를 상호 비교하는 방법, 문제를 직접 논리적으로 접근 방법 등, 3 가지 방법을 제시할 수 있겠다. Piaget의 원전으로부터 출발하는 방법이라면 좋겠지만 실제로 '무게는 경험적 추상화이다.'라는 명제를 그의 원전에서 직접적으로 찾을 수 없기 때문에 이 방법에 의한 규명 자체가 궁극적으로 불가능한 것은 아니지만 모호함을 해소하기 위한 결정적인 방법은 아니라고 본다. 한편 대부분

의 교사들은 Piaget 이론의 후속 연구서 또는 해설서를 통하여 Piaget에 관한 지식을 얻는다고 판단되기 때문에 이에 따라 원전보다는 교사들이 많이 참고하는 관련 연구서(박영배, 2004; 우정호 & 홍진곤, 2002, Driscoll, 2000; Dubinsky, 1999; Kamii, 1994)를 상호 참조하는 것도 실질적인 의미는 있다고 본다.

그러나 이 두 가지 방법보다는 논리적 방법에 의한 접근이 보다 직접적이고 명확한 결과를 도출할 수 있기에 본 연구에서는 논리적 방법에 의하여 무게의 문제를 다루었다. 실제로 본 연구에서 사용된 방법은 Kant가 그의 비판 철학에서 사용된 유명한 명제 "물체는 연장을 가진다."에서 드러난 논리적 결함을 논증하기 위하여 Wittgenstein(1978)이 사용한 논법을 적용하였는데 그 논법이란 '연장을 가지지 않는 물체'의 논리성을 의미한다.

마지막으로 경험적 추상화와 반성적 추상화를 구별할 수 있는 수학적 모형을 사용하여 두 추상화가 가진 논리적 차이를 보다 분명하게 제시한다. 이 집합론적 방법은 NBG 공리계(Dugundji, 1966)에 나타난 집합(set)과 족(class)의 개념적 차이와 유사한데 이 공리계에 의하면 집합은 어떤 족의 원소인 족으로 정의되어 있다.

### II. 본론

무게의 문제를 다루기 위해서 먼저 경험주의자의 방법론이 적용되는 상황을 제시하여 사고실험을 통하여 문제를 구체화하겠다. 다음 상황을 보자.

한 아이가 돌을 가지고 집에 와서 저울에 올려놓았더니 저울의 바늘이 움직이다가 어느 위치에 섰다는 것을 관찰했다. 그 장난이 신기해서 이 실험을 몇 회 반복하였는데 계속해서 어느 일정한 위치에 멈춘다는 것을 발견했다. 이번에는 돌을 두 개 올려놓았더니 바늘이 한 개

\* 2008년 2월 투고, 2008년 5월 심사 완료.

\* ZDM 분류 : E29

\* MSC2000 분류 : 97B50

\* 주제어 : 무게, 경험적 추상화, 반성적 추상화, 인식론

를 올려놓았을 때와는 전혀 다른 곳에 멈춘다는 것을 알았다. 그 아이는 이러한 현상이 신기해서 그 관찰 결과들을 모두 기록하기로 하였다. 그러나 기록할 수단이 없었기 때문에 바늘이 멈춘 곳에 있는 이상한 도형을 보고 그것을 기록하였다. 한 개의 돌인 경우는 여러 번 시행해본 결과 대략 2부근에서 멈추었고 두 개의 돌인 경우는 대략 4의 부근에서 멈추었기 때문에 그 아이는 각각을 2와 4로 기록하였다.

이 상황은 전형적인 관찰 상황이며 이 아이는 이 상황을 충실하게 기록하고 있을 뿐이다. 아마 다른 사람이 이런 실험을 하더라도 이 상황은 유사한 결과가 나올 것이다. 이런 상황이 경험주의가 표방하는 전형적인 상황이다. 돌에 대한 지식은 돌에 있으며 관찰자는 대상을 기록할 뿐이며, 2와 4는 그 아이에게는 수가 아니라 그 관찰 결과를 단순히 표상한 것에 지나지 않는다. 따라서 그 아이가 2와 4를 각각 '가벼움1'과 '가벼움2'라고 부르던지 아니면 각각을 '가벼움'과 '무거움'으로 부르던 간에 2와 4는 위의 두 실험으로부터 얻은 관찰 자료일 뿐이기 때문에 그것들을 표상하는 방법은 관찰 결과가 나타내는 본질을 하등 변화시키지 않는다. 이와 같이 2와 4는 주어진 돌에 대한 경험적 추상화이다. 경험적 추상화는 개인과 실험조건에 따라 관찰 결과는 달라질 수 있으나 본질은 돌에 있다.

돌에 대한 경험으로는 무게에 관한 것 말고도 부피에 관한 것, 색채에 관한 것, 온도에 관한 것, 등 여러 가지 관찰 결과들이 있을 것이다. 그런데 이와 같이 많은 관찰 자료 중에서 아이가 무게에 관련된 자료들만 모아서 하나의 집합을 만들고 그것을 무게라고 정의한다면 이때 무게라는 개념은 단순 관찰의 결과가 아니라 관찰 결과를 주체가 범주화 한 논리-수학적 개념이다. 그 이유는 무거움이라는 개념은 돌로 부터 나오지만 그런 개념들이 수집된 무게라는 개념은 돌로 부터 나오는 것이 아니라 주체의 내면에서 나온, 즉 논리-수학적 성질이기 때문이다. 만약 무게가 논리-수학적 성질이라는 것을 보다 명확하게 논증한다면 무거움과 무게라는 두 개념의 차이를 보다 분명하게 구별되므로 다음과 같은 논리적 분석을 시도하는 것이 보다 바람직하다.<sup>1)</sup> 다음과 같은 두 명제

$P$ 와  $Q$ 를 생각해보자.

$P$ : 이 돌은 무겁다.

$Q$ : 이 돌은 무게를 가진다.

여기서  $P$ 의 부정명제, 즉 '이 돌은 무겁지 않다.'는 '더 무거운 돌', '더 가벼운 돌', '아주 많이 가벼운 돌', '무겁지 않는 돌' 등과 같은 다양한 사례들을 가지는데 이 사례들은 여전히 관찰 의존적이다. 그러나  $Q$ 의 부정 즉 '이 돌은 무게를 가지지 않는다.'는 이상하다. '무게를 가지지 않는 돌'은 생각할 수 있는가?  $Q$ 의 부정은 문법적으로는 타당하지만 무의미한 문장이다. 무게라는 개념은 주체가 돌이 가진 다양한 속성 중에서 무게와 관련된 것을 수집하고 범주화하면서 생긴 논리-수학적 판단의 결과인데, 모든 논리-수학적 구조는 반영적 추상화에 의하여 구성되며 또는 반영적 추상화만이 논리-수학적 구성이라고 주장하는 Piaget(1971, p. 342; 1980, p.92)의 견해를 따르면, 무게라는 개념은 그의 분류법에 의하면 반영적 추상화의 결과에 해당되어야 한다.

무게를 저울에 표시된 수치로 대응시키면 무게라는 개념이 수의 개념과 동등하다고 할 수 있을지도 모른다. 그러나 무게라는 개념이 수의 개념과 동등하기 위해서는 보다 더 높은 반영적 추상화가 필요한데 이 점을 분명하게 하기 위하여 아동이 저울 놀이를 계속한다고 하고 다음과 같은 물음에 대하여 생각해보자. 보다 많은 회수의 관찰의 결과, 예를 들면  $n$ 개의 돌을 올려놓았을 때 바늘이 지시하는 곳이  $2n$ 이란 것을 알고 아동이 그 각각의 경우를 2, 4, 6, 8, 10, ...로 기록했다고 할 때 이 아동은 자연수의 개념을 구성했다고 주장할 수 있을까? 이 주장은 무게의 개념 구성이 자연수의 개념 구성과 동일한 것인가를 묻는 다른 방식의 질문이다. 2, 4, 6, 8, 10, ... 과 같은 관찰 자료를 단순히 범주화하였다고 그 결과가 자연수의 개념이 되는 것은 아니며 2, 4, 6, 8, 10, ... 이 자연수의 집합이 되기 위해서는 각각의 관찰 자료 간의 상호 관계에 대하여 주의 집중하는 인지적 과정이 필요한데 이것은 무거움이라는 개념의 단

는 연장을 가진다."가 분석명제가 아님을 증명하는데 적용되었다.

1) 이 논증은 Wittgenstein(1978)이 Kant의 유명한 명제 "물체

순한 모임인 무게라는 개념을 구성하는 방식과는 다르다.<sup>2)</sup> 그 이유는 자연수를 구성하기 위해서는 한 개의 돌과 두 개의 돌과의 관계, 두 개의 돌과 세 개의 돌과의 관계 등과 같은 무게라는 집합의 원소 간의 관계가 도출되고 그것들이 적어도 순서수의 개념을 도출할 수 있는 지향적 의식에 의한 주의집중이 개입되어야 하기 때문이다. 여기서 말하는 지향적 의식은 Piaget가 말하는 반성적 추상화의 주제화에 해당한다.

위에서는 무게라는 개념이 논리-수학적이라는 것을 규명함으로써 무거움이라는 경험적 개념과 다르다는 것을 밝혔는데 집합론의 언어를 사용하여 무거움과 무게의 개념적 차이를 논리적으로 구별할 수 있는 모형을 만들 수 있다. 먼저 주어진 관찰 대상을  $O_1, \dots, O_n$ 이라고 하고 무거움에 대한 관찰 자료를  $h_1, \dots, h_n$ 이라고 하자. 예를 들면 ' $O_k$ 는  $h_k$ 라는 무거움을 가진다' 또는 ' $O_k$ 는  $h_k$ -무겁다.' 등으로 표현할 수 있겠다. 이 관찰 자료를 <표 1>로 만들면 다음과 같이 되겠다.

관찰대상	$O_1$	....	$O_k$	....	$O_n$
관찰자료	$h_k$	....	$h_k$	....	$h_n$

<표 1> 저울의 돌의 무게를 측정한 관찰 자료

여기서 집합

$$H_k = \{x : h_k(x)\}$$

라고 하자. 즉  $H_k$ 의 원소  $x$ 는  $h_k$ 의 무거움을 가지는 것으로서<sup>3)</sup> 관찰자가 저울눈  $h_k$ 에 대응하는 관찰 대상  $O_k$ 를 경험한다는 것 또는  $O_k$ 로부터  $h_k$  정도의 무거움을 경험했다는 의미이다. 여기서

$$H = H_1 \cup \dots \cup H_n$$

이라고 두면  $H$ 는 다양한 무거움들  $H_k$ 의 합이므로  $H$ 에 속하는 ' $x$ 는 무겁다'라고 해석되며 따라서  $H$ 는

여러 가지 무거움에 공통으로 표상되는 무거움이라는 개념에 대응된다. 동시에 앞에서 보인  $H$ 의 정의는  $H_k$ 들이 주는 경험적 다양성에 의존하는데 이것을 무거움이라는 개념이 관찰자의 경험에 의존한다는 것을 의미한다. 여기서  $H$ 는 각각의  $H_k$ 와 같은 유형(type)의 집합이므로 여전히  $H_k$ 와 같은 경험적 추상화이다. 반면에 무게의 개념을  $W$ 라고 하면  $W$ 는 관찰자가 경험한 무거움에 대한 다양한 인식의 결과의 독립적 합이 되므로

$$W = \{H_1, \dots, H_n\}$$

이 반성적 추상화의 적절한 표상 모형이 된다. 동시에  $H$ 와  $W$ 는 집합으로서 다른 유형(type)을 가짐으로써 무거움과 무게의 논리적 구분을 집합의 언어에서도 그대로 반영되어 있다.

이런 예로서 자연수와 유리수의 관계가 있다. 즉 자연수의 어떤 동치류로부터 유리수를 만드는데 위의 논증에 따르면 유리수는 자연수의 반성적 추상화이다.

### III. 결론과 제언

이상의 논의에서 볼 때 무게와 무거움은 모두 일상 용어로 부터 나온 것이기 때문에 단순한 개념같이 보인다. 그러나 위의 논의에서 무게와 무거움 간의 개념적 차이는 분명히 다르다는 것을 알았으며 무게와 무거움과 같은 자생적 개념을 논리적으로 구별하기 위하여 수학적 모형을 사용하였다.

그러면 왜 이 두 개념을 혼동하게 되었을까? 하나의 답은 무게의 하위 개념인 무거움에 대한 다양한 사례들을 경험적으로 판단할 수 있는 일상 언어의 부족에 기인한다고 판단된다. 예로서 빨강, 노랑, 초록, 파랑, 연두, 분홍 등과 같이 색에 대한 하위 개념들은 매우 풍부한 어휘 체계를 가지고 있지만 무게에 대한 하위 개념은 무거움과 가벼움 등이며 이 때문에 무거움을 구별하기 위하여 사용되는 언어도 '더 무겁다' '매우 무겁다' 등, 독립된 수식어를 사용하여 표현한다. 그러므로 경험적 추상화와 반성적 추상화의 차이점을 설명하기 위한 교육적 상황인 경우에는 무게와 무거움이란 개념으로 설명하는 것 보다는 색과 그 하위 개념인 빨강, 노랑, 파랑 등으로 설명하는 것이 바람직하다.

2) 이러한 관찰 자료 2와 4로부터 두 자료 사이의 관계를 고찰한다면 무게라는 개념을 얻는 것이 된다(von Glasersfeld, 1991, p.46).  
3) 여기서 무거움이 과학적으로 정의되어 있지 않았기 때문에  $H_k$ 가 집합이 되지 않는다는 의의 제기는 관찰자 개인의 판단에 관한 것이기 때문에 본질적인 문제는 아니다.

## 참 고 문 헌

- 박영배 (2004). 수학 교수 학습의 구성주의적 전개. 서울: 경문사.
- 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.
- 우정호·홍진곤 (2002). 반영적 추상화와 조작적 구성 수학 학습-지도. 수학교육학의 지평(우정호 편). 서울: 경문사.
- 황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.
- Driscoll, M. P. (2000). *Psychology of Learning for Instruction*. Allyn & Bacon. [학습심리학, 양용철 옮김, 교육과학사, 2002]
- Dubinsky, E. (1991). In D. Tall(Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. [고등수학적 사고, 류희찬 외 옮김. 서울: 경문사. 2003]
- Dugundji, J. (1966). *Topology*, MA: Allyn & Bacon.
- Kamii, C.(1994). *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic. 3rd Grade*. New York: Columbia University Press. [Piaget의 발생론적 인식론을 적용한 수학수업-3학년- 강완 외 옮김 경문사. 2004]
- Piaget, J. (1971). *Biology and Knowledge*.(B. Walsh, trans.) Ill: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1980). *Adaptation and Intelligence*.(S. Eames, trans.) Ill: University of Chicago Press.
- von Glasersfeld, E. (1991). *Abstraction, Representation, and Reflection: An Interpretation of experience and Piaget's Approach*. In L. P. Steffe(Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. New York: Springer Verlag.
- Wittgenstein, L.(1978). *Philosophical investigation*, (G. E. M. Anscombe, trans.) Oxford: Basil Blackwell.

## On the difference between 'weight' and "heaviness" in the sense of Piaget

Yoo, Yoon Jae

Kyungpook National University, Daegu, Korea

E-mail: yjyoo@knu.ac.kr

The article shows that the concept 'weight' and the concept 'heaviness' give rise to different abstractions in the sense of Piaget and that these two concepts are differentiated by set-theoretic devices.

The failure of differentiation of these two concepts 'weight' and the 'heaviness' can cause the failure of learning of the difference between reflective abstraction and empirical reflective abstraction. To explain the Piagetian abstraction in a classroom, the author suggests to use the concept 'color' instead of the concept 'weight'

\* ZDM classification : E29

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50

\* Key Words : weight, empirical abstraction, reflective abstraction, epistemology