Communications of the Korean Statistical Society Vol. 15, No. 3, 2008, pp. 451–464

공정능력지수들과 6 시그마 품질수준에 대한 통계적 추론†

조중재[1)], 심규영[2)], 박병선[3)]

요 약

6 시그마는 백만 기회당 3.4개의 결점만을 갖는 최고의 품질수준을 의미한다. 일반적으로 높은 시그마 품질수준은 고객들에게 높은 만족도를 부여하는 것으로 알려져 있다. 공정능력지수들과 시그마 품질수준 Z_{st}는 6시그마 산업에서 공정능력을 평가하기 위하여 널리 이용되고 있다. 공정능력지수에 관한 대부분의 평가들은 공정능력분석에 대해 경우에 따라 믿기 어려운 상황을 초래할 수도 있는 점 추정에 초점을 두고 있다. 본 논문에서는 현장 실무자들이 공정능력 여부를 결정하기 위하여 사용하고 있는 6시그마 품질수준 Z_{st}와 공정능력지수들 C_p, C_{pk}와 C_{pm}에 대하여 몇 가지 통계적 추정문제를 기초로 보다 효율적인 검정 방법에 대하여 제안, 연구하였다. 제안된 붓스트랩 검정 방법에 근거한 모의실험 결과는 공정분포의 정규성 여부에 관계없이 그리고 복잡한 계산 과정없이 보다 효율적으로 적용될 수 있음을 입증하고 있다.

주요용어: 공정능력지수; 품질수준; 가설검정; 붓스트랩 방법; 유의확률; 몬테칼로 실험; 근사 정규분포.

1. 서론

6 시그마는 측정으로부터 시작해서 측정으로 끝난다고 해도 과언이 아니다. 제조업 분야든 서비스 산업분야이든 공정(Process)과 관련하여 측정된 자료로부터 품질변동이 작으면 그 공정의 공정능력은 좋다고 말하고, 품질변동이 크면 공정능력이 나쁘다고 말한다. 공정능력(Process Capability)이란 공정이 관리상태에 있을 때, 그 공정에서 생산되는 상품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 중요한 개념이라고 할 수 있는 바, 많은 기업 현장에서는 공정능력분석이 보다 적극적으로 활용되고 있다.

여러 가지 공정능력지수들에 대한 통계적 추정 문제 관련 연구는 공정능력분석의 중요성에 비추어 볼 때 대단히 활발한 편이다. 하지만 가설검정에 관한 연구는 상대적으로 미흡하다고 할 수 있다. Pearn 등 (2001)은 정규분포 가정 하에서 공정능력지수 C_{pmk}에 관한 검정방법과 응용사례를 곁들여 고찰하였고, Lin과 Pearn (2002)은 정규분포 가정 하에서 편측 규격한계를 갖는 공정능력지수 C_{pu}와 C_{pl}에 대하여 여러 가지 표본크기 n과 유의수준 α에 따른 임계치들을 실험하여 가설검정 연구결과를 제시하였다.

† 이 논문은 2006년도 충북대학교 학술연구 지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.
1) (361-763) 충북 청주시 흥덕구 성봉로 410, 충북대학교 정보통계학과, 교수.
교신저자: jjcho@chungbuk.ac.kr
2) (361-763) 충북 청주시 흥덕구 성봉로 410, 충북대학교 정보통계학과, 전 대학원생.
3) (302-701) 대전시 서구 선사로 139, 통계청 경제통계국 분석통계팀, 사무관.

하지만 이들 연구는 정규분포 하에서만 공정능력지수에 대한 가설검정 이론을 정립하다 보니 결과가 매우 제한된 내용이라 생각된다. 왜냐하면 간단한 공정능력지수에 대한 플러그-인 추정량의 정확한 확률분포함수를 유도하는 일이 매우 복잡할 뿐만 아니라, 경우에 따라 불가능하기도 하며 공정이 정규분포에 따르지 않는 경우엔 거의 연구결과가 없는 실정이기 때문이다.

한편 붓스트랩 방법은 컴퓨터가 널리 사용되면서 통계량의 표본분포와 추정이나 가설검정 문제에 효과적으로 활용될 수 있는 바, Efron (1979) 등이 여러 통계학 분야에 전반적으로 사용하기 시작하였다. Diciccio와 Tibshirani (1987)는 붓스트랩 신뢰구간과 붓스트랩 근사를 그리고 Hall (1988)은 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간들을 이론적으로 폭넓게 비교·연구하였다. 그리고 붓스트랩 관련 공정능력지수들에 대한 연구결과는 Franklin과 Wasserman (1992)을 시작으로, Cho 등 (1999)은 생산현장에서 가장 많이 사용되고 있는 공정능력지수 C_{pk}에 대하여 효율적인 붓스트랩 신뢰구간 추정 문제를 보다 심도 있게 연구하였다.

정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$을 갖는 공정분포 하에서는 공정능력지수 C_p와 C_{pk}에 대한 가설검정문제와 관련된 연구 결과가 있다 (Lin과 Pearn, 2002; Lin, 2005). 그러나 관심공정이 정규분포에 따르지 않는 경우나 관심 모수가 단순하지 않은 경우에 기존의 연구방법으로는 가설검정문제를 해결하기에는 어려움이 있을 것이다. 따라서 관심 모수 C_p, C_{pk}, C_{pmk} 등에 관한 가설검정 문제를 보다 효율적으로 연구하기 위한 방법으로 붓스트랩을 활용하는 방법이 좋은 대안이 될 수 있을 것이다. 또한 6 시그마 품질수준에 대하여 단기공정의 시그마 수준(Z_{st})으로 공정평균 μ의 치우침이 없을 경우에는 $Z_{st} = 3C_p$으로, 공정평균 μ의 치우침이 있을 경우에는 $Z_{st} = 3C_p + 1.5$로 적절하게 측정하여 활용하면 될 것이다.

본 논문에서는 1차원 공정능력지수인 C_p, C_{pk}와 C_{pm}에 대한 정의와 성질 그리고 극한분포이론을 기초로 통계적 가설검정에 대해 연구하였다. 기존의 연구 결과를 이용하여 정규공정 가정 하에서의 모의실험을 통하여 실제 현장에서 이용할 수 있는 임계치에 관한 연구결과를 살펴보고, 본 논문의 핵심적 내용인 붓스트랩 방법을 활용하여 여러 가지 공정분포 상황에 대한 유의확률들을 계산함으로써 공정능력지수와 시그마 수준을 중심으로 통계적 가설검정을 보다 효과적으로 할 수 있음을 연구·제시하였다. 정규성을 가정하지 않는 경우에도 다양한 컴퓨터 모의실험을 통하여 공정능력지수들에 대해 가설검정 문제를 연구한 바, 본 논문에서의 붓스트랩 검정방법이 이러한 형태의 가설검정 문제에 적용하여 보다 효율적인 방법이 될 수 있음을 입증하였다.

2. 지수 C_p와 시그마 수준 Z_{st}에 대한 통계적 추론

우선 공정능력지수 C_p와 시그마 품질수준 $Z_{st} = 3C_p$에 대한 가설은 다음과 같은 형태에 관심이 있을 것이다.

$$H_0: \; C_p \; \le \; c \qquad vs. \qquad H_1: \; C_p \; > \; c,$$
$$H_0: \; Z_{st} \; \le \; c_1 \qquad vs. \qquad H_1: \; Z_{st} \; > \; c_1,$$

표 2.1: c_1=4.0일 때, 임계치 c_0

n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.025$	$\alpha=0.05$	n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.025$	$\alpha=0.05$
30	5.7051	5.3772	5.1189	100	4.7832	4.6467	4.5342
40	5.3967	5.1363	4.9278	120	4.7034	4.5819	4.4814
50	5.2047	4.9845	4.8069	140	4.6428	4.5327	4.4412
60	5.0718	4.8786	4.7220	160	4.5954	4.4937	4.4094
70	4.9731	4.7997	4.6581	180	4.5567	4.4622	4.3833
80	4.8963	4.7379	4.6083	200	4.5243	4.4358	4.3617
90	4.8345	4.6881	4.5678				

단, $c_1 = 3c$, $C_p = d/(3\sigma)$, $d = (\mathrm{USL}-\mathrm{LSL})/2$. 물론 LSL과 USL은 각각 규격하한과 규격상한을 나타낸다.

상수 c_1과 표본크기 n, 다음의 확률 α에 대응하는 임계치 c_0를 결정하여 시그마 품질수준 Z_{st}에 대한 가설검정을 할 수 있게 될 것이다 (지수 C_p에 대한 내용은 유사).

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(\hat{Z}_{st} \geq c_0 \mid Z_{st} = c_1)\\ &= \Pr\left(\frac{d}{S} \geq c_0 \mid Z_{st} = c_1\right)\\ &= \Pr\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq (n-1)\frac{{c_1}^2}{{c_0}^2} \mid Z_{st} = c_1\right).\end{aligned}$$

부연설명하면 표 2.1은 품질수준이 4 시그마 수준 이상이라고 할 수 있는지에 대한 검정을 위해 정규성을 갖는 공정분포 하에서 $n = 30(10)200$, $\alpha = 0.01, 0.025, 0.05$에 대응하는 임계치 c_0들을 정리한 것으로, 유사한 방법으로 쉽게 응용할 수 있을 것이다.

한편 본 논문에서는 공정능력지수와 시그마 품질수준에 대한 가설검정 문제를 붓스트랩 방법을 적용하여 유의확률(p-value)을 보다 효율적으로 계산하여 유용하게 해결하고자 한다. 기존의 연구 결과는 주로 정규분포일 때에 가설검정 문제에 적용하였다. 붓스트랩 검정방법은 공정분포의 정규성을 가정하지 않는 경우에도 이러한 형태의 가설검정 문제에 활용할 수 있는 포괄적인 방법으로 보다 효과적이고 편리하게 응용할 수 있을 것이다.

공정능력지수 C_p에 대한 가설검정 연구결과 Cho와 Lim (2006)를 참고하면 단기공정의 시그마 품질수준 $Z_{st} = 3C_p$에 대한 검정결과는 거의 동일한 내용이 될 것이다. 부연 설명하면 주어진 공정표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 시그마 품질수준 추정량 $\hat{Z}_{st}$ 그리고 붓스트랩 추정량 $\hat{Z}^*_{st}$에 대해

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{Z}_{st} - Z_{st}) &\xrightarrow{D} N(0, \sigma^2_{zp}),\\ \sqrt{n}(\hat{Z}^*_{st} - \hat{Z}_{st})|\chi_n &\xrightarrow{D} N(0, \sigma^2_{zp}),\end{aligned}$$

단, $\sigma^2_{zp} = (\mu - \sigma^4)d^2/4\sigma^6$, $\chi_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

위에서 제시한 이론적 근거 (붓스트랩 일치성)로 적당한 붓스트랩 알고리즘 하에서 다음을 계산함으로써 시그마 품질수준 $Z_{st} = 3C_p$의 가설검정에 관련된 통계량 $t(X^{*b})$의 관측값 t_{obs}에 대한 유의확률을 계산하게 될 것이다.

$$\text{ASL}_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^{B} I(t(X^{*b}) \geq t_{obs})}{B},$$

단, $t(X^{*b}) = \sqrt{n}(\hat{Z}^*_{st} - \hat{Z}_{st})/\hat{\sigma}^*_{zp}$ 혹은 $\sqrt{n}(\hat{Z}^*_{st} - \hat{Z}_{st})/\hat{\sigma}_{zp}$. 그리고 ASL_{boot}은 붓스트랩 알고리즘에 의해 컴퓨터 실험으로 계산하여 얻게 될 유의확률을 뜻하는 achieved significance level의 약자로 사용될 것이다 (Efron과 Tibshirani, 1993).

예를 들어 공정분포를 $N(\mu, \sigma^2)$이라 가정하면, 유의확률은 다음과 같이 계산될 수 있을 것이다.

귀무가설 $H_0 : Z_{st} = c_1$ 조건 하에서,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{Z}^{*b}_{st} - \hat{Z}_{st})}{\hat{\sigma}_{zp}} \geq \frac{\sqrt{n}(\hat{Z}_{st} - Z_{st})}{\hat{\sigma}_{zp}}\right) \\ &= \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{Z}^{*b}_{st} - \hat{Z}_{st})}{\hat{\sigma}_{zp}} \geq \frac{\sqrt{2n}(\hat{Z}_{st} - Z_{st})}{c_1}\right), \end{aligned}$$

물론 분산 σ^2_{zp}의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}^2_{zp} = \frac{(\hat{\mu}_4 - S^4)d^2}{4S^6} = \frac{d^2}{2S^2}, \quad \text{단,}\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

왜냐하면, 4차 중심적률 μ_4가 공정 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$하에서 다음과 같기 때문이다.

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 \sigma^4 = 3\sigma^4,$$

하지만 공정분포에 대한 가정이 없으면, 위 식에서 4차 중심적률의 추정치 $\hat{\mu}_4$는 다음과 같음에 유의해야 할 것이다.

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4.$$

3. 지수 C_{pk}와 시그마 수준 Z_{st}에 대한 통계적 추론

공정능력지수 C_{pk}와 단기공정의 시그마 품질수준 $Z_{st} = 3C_{pk} + 1.5$에 대한 가설은 다음과 같은 형태에 관심이 있을 것이다.

$$\begin{aligned} H_0 &: C_{pk} \leq c \quad vs. \quad H_1 : C_{pk} > c, \\ H_0 &: Z_{st} \leq c_2 \quad vs. \quad H_1 : Z_{st} > c_2, \end{aligned}$$

단, $c_2 = 3c + 1.5, C_{pk} = (d - |\mu - M|)/3\sigma, M = (\text{LSL} + \text{USL})/2$.

그리고 공정능력지수 C_{pk}에 대한 가설검정을 위해 상수 c와 표본크기 n 그리고 확률 α에 대응하는 임계치 c_0를 결정하여 검정할 수 있게 될 것이다. 물론 시그마 품질수준

$Z_{st} = 3C_{pk} + 1.5$에 대한 가설검정과 관련된 내용은 공정능력지수 C_{pk}에 대한 내용으로부터 쉽게 전개되므로 지수 C_{pk}을 중심으로 연구하도록 할 것이다.

귀무가설 $H_0 : C_{pk} = c$ 조건 하에서,

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(\hat{C}_{pk} \geq c_0 | C_{pk} = c) \\ &= \Pr\left(\frac{d - |\bar{X} - M|}{3S} \geq c_0 | C_{pk} = c\right) \\ &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mathrm{LSL}}{3S} \geq c_0, \frac{\mathrm{USL} - \bar{X}}{3S} \geq c_0\right).\end{aligned}$$

이제 $Y = (nS^2)/\sigma^2, Z = \{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)\}/\sigma, d_1 = (\mu - \mathrm{LSL})/\sigma, d_2 = (\mathrm{USL} - \mu)/\sigma$라고 하면, 귀무가설 조건 $H_0 : C_{pk} = c$ 조건 하에서 위 식은 다음과 같다.

$$\alpha = \Pr\left(\frac{Z + \sqrt{n}d_1}{3\sqrt{Y}} \geq c_0, \frac{-Z + \sqrt{n}d_2}{3\sqrt{Y}} \geq c_0 \mid C_{pk} = c\right).$$

자세한 내용은 연구결과 Lin과 Pearn (2002)와 Lin (2005)를 참고하면 유용할 것이다.

한편 가설검정을 위한 보다 효율적인 방법으로 붓스트랩을 적용하는 것이다. 이 방법은 공정분포의 정규성을 가정하지 않는 경우에도 이러한 형태의 가설검정 문제에 활용할 수 있는 보다 포괄적인 방법으로 매우 유용할 것이다.

우선 공정능력지수 에 C_{pk}대한 가설검정을 위해 다음의 기존 연구 결과들을 이용할 것이다.

주어진 공정표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 공정능력지수 추정량 $\hat{C}_{pk}$ 그리고 붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_{pk}$에 대해 표본크기 n이 커질 때 다음 사실이 성립한다 (Cho 등, 1999).

$$\sqrt{n}(\hat{C}_{pk} - C_{pk}) \overset{i.d.}{\cong} \sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})|\chi_n \xrightarrow{D} \begin{cases} N(0, \sigma^2_{pk}), & \mathrm{LSL} < \mu < M, \\ -\dfrac{|Y|}{3\sigma} - \dfrac{dZ}{6\sigma^3}, & \mu = M, \\ N(0, \sigma^{2'}_{pk}), & M < \mu < \mathrm{USL}, \end{cases}$$

단, $\chi_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\hat{C}_{pk} = (d - |\bar{X} - M|)/3S$.

위에서 제시한 이론적 근거 (붓스트랩 일치성)로, 적당한 붓스트랩 알고리즘 하에서 다음을 계산함으로써 공정능력지수 C_{pk}의 가설검정에 필요한 유의확률을 계산하게 될 것이다.

$$\mathrm{ASL}_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^{B} I(t(X^{*b}) \geq t_{obs})}{B},$$

단, $t(X^{*b}) = \sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})/\hat{\sigma}^*_{pk}$ 혹은 $\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})/\hat{\sigma}_{pk}$.

예를 들어 공정분포를 $N(\mu, \sigma^2)$이라 가정하면, 적당한 붓스트랩 알고리즘 하에서 비슷한 방법으로 공정능력지수 C_{pk}의 가설검정에 필요한 유의확률 ASL_{boot}은 귀무가설 $H_0 : C_{pk} = c$ 조건 하에서 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^{*b}_{pk} - \hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}^*_{pk}} \geq \frac{\sqrt{n}(\hat{C}_{pk} - C_{pk})}{\hat{\sigma}_{pk}}\right),$$

단, $\hat{C}_{pk} = (d - |\bar{X} - M|)/(3S)$.

그리고 추정분산 $\hat{\sigma}^2_{pk}$와 붓스트랩 추정분산 $\hat{\sigma}^{*2}_{pk}$은 μ와 $M(= (\mathrm{USL} + \mathrm{LSL})/2)$의 크기에 따라 3가지 경우로 나누어 계산되는 바, 추정량 $\hat{C}_{pk}$에 대한 분산 σ^2_{pk}의 플러그-인 추정량들로 연구 결과 Cho 등 (1999)를 참조하면 될 것이다. 보다 구체적으로 표현하면 $\mathrm{LSL} < \mu < M$인 경우에 추정분산 $\hat{\sigma}^2_{pk}$은

$$\hat{\sigma}^2_{pk} = \frac{1}{9} - \frac{(\hat{\mu}_4 - S^4)\{d - (M - \bar{X})\}^2}{36S^6} - \frac{\hat{\mu}_3\{d - (M - \bar{X})\}}{9S^4}$$

이다. 물론 표본분산 S^2과 4차 적률의 추정량 $\hat{\mu}_4$는 다음과 같다.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \qquad \hat{\mu}_4 = 3S^4 + 6S^2\bar{X}^2 + \bar{X}^4.$$

하지만 공정분포에 대한 가정이 없으면, 위 식에서 4차 적률의 추정치 $\hat{\mu}_4$는 다음과 같음에 유의해야 할 것이다.

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4.$$

4. 공정능력지수 C_{pm}에 대한 가설과 유의확률

공정능력지수 C_{pm}에 대한 가설은 다음과 같은 형태에 관심이 있을 것이다.

$$H_0 : C_{pm} \le c \quad vs. \quad H_1 : C_{pm} > c,$$

단, $C_{pm} = d/3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$.

우선, 공정능력지수 C_{pm}에 대한 가설검정을 위해 다음의 기존 연구 결과들을 이용할 것이다.

주어진 공정표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 공정능력지수 추정량 $\hat{C}_{pm}$ 그리고 붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_{pm}$에 대해 표본크기 n이 커질 때, 다음 사실이 성립한다 (Cho 등, 1997).

$$\sqrt{n}(\hat{C}_{pm} - C_{pm}) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2_{pm}),$$
$$\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pm} - \hat{C}_{pm}) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2_{pm}),$$

단, $\chi_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$이고, σ^2_{pm}은 다음과 같다.

$$\sigma^2_{pm} = \frac{d^2}{9\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^3}\left\{\sigma^2(\mu - T)^2 + \mu_3(\mu - T) + \frac{1}{4}(\mu_4 - \sigma^4)\right\}.$$

위에서 제시한 붓스트랩의 일치성과 적당한 붓스트랩 알고리즘 하에서 공정능력지수 C_{pm}의 가설검정에 필요한 유의확률은 다음과 같이 계산하게 될 것이다.

$$\mathrm{ASL}_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^{B} I(t(X^{*b}) \ge t_{obs})}{B},$$

단, $t(X^{*b}) = \sqrt{n}(\hat{C}^*_{pm} - \hat{C}_{pm})/\hat{\sigma}^*_{pm}$ 혹은 $\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pm} - \hat{C}_{pm})/\hat{\sigma}_{pm}$.

예를 들어 공정분포를 $N(\mu, \sigma^2)$이라 가정하면, 적당한 붓스트랩 알고리즘 하에서 비슷한 방법으로 공정능력지수 C_{pm}의 가설검정에 필요한 유의확률 ASL_{boot}은 다음의 식을 이용하여 계산하게 될 것이다.

귀무가설 조건 $H_0 : C_{pm} = c$ 조건 하에서,

$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^{*b}_{pm} - \hat{C}_{pm})}{\hat{\sigma}^{*b}_{pm}} \geq \frac{\sqrt{n}(\hat{C}_{pm} - C_{pm})}{\hat{\sigma}_{pm}}\right),$$

단, $\hat{C}_{pm} = d/3\sqrt{S^2 + (\bar{X} - T)^2}$.

그리고 추정분산 $\hat{\sigma}^2_{pm}$와 붓스트랩 추정분산 $\hat{\sigma}^{*2}_{pm}$은 분산 σ^2_{pm}의 플러그-인 추정량들로 연구 결과 Cho 등 (1997)를 참조하면 될 것이다.

5. 모의실험

본 논문에서는 편의상 단기공정의 시그마 품질수준 Z_{st}에 대한 가설검정을 위한 유의확률 관련 모의실험과 공정능력지수 C_{pm}에 대한 가설검정을 위한 유의확률 관련 모의실험으로 연구하게 될 것이다. 물론 기존의 연구 결과가 정규분포일 때에만 적용할 수 있는 것과는 달리 붓스트랩 방법을 이용하여 공정의 분포가 어떠한 분포를 따르더라도 보다 효과적이고 편리하게 응용할 수 있을 것이다.

모집단이 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$인 경우, 카이제곱분포 $\chi^2(5)$를 사용하여 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 경우, t 분포 $t(5)$를 사용하여 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다. 모의실험을 위한 설계는 다음과 같다.

첫째, 시그마 품질수준 Z_{st}에 대한 가설검정을 위해 각각의 확률분포에 대해 공정평균 $\mu = 50$, 규격상한 $\mathrm{USL} = 56$, 규격하한 $\mathrm{LSL} = 44$로 설계하였다.

둘째, 공정능력지수 C_{pm}에 대한 가설검정을 위해 각각의 확률분포에 대해 공정평균 $\mu = 50$, 목표치 $T = 51$ 그리고 편의상 규격상한 $\mathrm{USL} = 61$, 규격하한 $\mathrm{LSL} = 41$로 설계하였다.

논문에서 수행한 실험 절차는 다음과 같다.

1단계: 주어진 공정 분포로부터 크기 $n\,(= 30, 40, \ldots, 200)$의 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 표본평균 $\bar{X}$와 표본분산 S^2을 계산하여 플러그인 방법으로 다음의 추정량을 구한다.

$$\hat{Z}_{st} = 3\hat{C}_p = \frac{d}{S}, \qquad \hat{C}_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{S^2 + (\bar{X} - T)^2}}.$$

2단계: 주어진 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 복원 추출방법에 의해 n개의 붓스트랩 표본 $X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_n$을 얻는다. 그리고 붓스트랩 표본평균 $\bar{X}^*$와 붓스트랩 표본분산 S^{*2}을 구한다.

표 5.1: 정규분포 하에서의 유의확률들의 평균과 표준편차

	$H_0: Z_{st} \leq 3 \quad H_1: Z_{st} > 3$		$H_0: Z_{st} \leq 4 \quad H_1: Z_{st} > 4$	
n	$N(50, 2^2)$	$N(50, 2^2)$	$N(50, 1.2^2)$	$N(50, 1.5^2)$
30	0.08260(0.1094)	0.5258(0.2786)	0.4886(0.0539)	0.5668(0.0464)
40	0.04860(0.0755)	0.5275(0.2790)	0.4681(0.0545)	0.5597(0.0468)
50	0.03320(0.0642)	0.5306(0.2920)	0.4515(0.0570)	0.5548(0.0487)
60	0.02180(0.0499)	0.5282(0.2894)	0.4377(0.0549)	0.5517(0.0477)
70	0.01130(0.0294)	0.5165(0.2841)	0.4226(0.0525)	0.5464(0.0455)
80	0.00800(0.0253)	0.5216(0.2827)	0.4118(0.0515)	0.5442(0.0453)
90	0.00580(0.0181)	0.5255(0.2866)	0.4025(0.0528)	0.5433(0.0471)
100	0.00290(0.0120)	0.5129(0.2863)	0.3908(0.0532)	0.5381(0.0470)
120	0.00140(0.0059)	0.5321(0.2883)	0.3788(0.0519)	0.5406(0.0460)
140	0.00036(0.0019)	0.5072(0.2836)	0.3587(0.0495)	0.5330(0.0461)
160	0.00017(0.0009)	0.5048(0.2853)	0.3440(0.0499)	0.5306(0.0466)
180	0.00007(0.0004)	0.5329(0.2838)	0.3370(0.0489)	0.5335(0.0460)
200	0.00008(0.0011)	0.5116(0.2920)	0.3223(0.0501)	0.5287(0.0474)

3단계: 2단계로부터 얻은 붓스트랩 표본평균 $\bar{X}^*$와 붓스트랩 표본분산 S^{*2}을 이용하여 다음과 같은 붓스트랩 추정량을 얻는다.

$$\hat{Z}_{st}^* = 3\hat{C}_p^* = \frac{d}{S^*}, \qquad \hat{C}_{pm}^* = \frac{d}{3\sqrt{S^{*2} + (\bar{X}^* - T)^2}}.$$

4단계: 위의 1~3단계의 절차를 $B\,(=1000)$번 반복 실행하여 유의확률을 계산한다.

붓스트랩 검정의 효율성을 예시하기 위하여, 위에서 제시된 절차를 $N\,(=1000)$회 수행하여 유의확률들의 평균값과 표준편차(SD)를 계산하여 제시하였다.

표 5.1~5.3은 각 분포 가정 하에서 가설

$$H_0: Z_{st} \leq c_1 \quad vs. \quad H_1: Z_{st} > c_1$$

을 검정하기 위해 표본크기를 달리하여 각각 $c_1 = 3, 4$인 경우에 대하여 평균적인 유의확률과 표준편차를 계산하였다.

예를 들어 표 5.1에서 공정분포가 $N(50, 1.5^2)$를 따르는 즉 품질수준 Z_{st}가 4 시그마인 경우, 가설

$$H_0: Z_{st} \leq 3 \quad vs. \quad H_1: Z_{st} > 3$$

을 크기 30의 원래의 표본을 임의추출하여 붓스트랩 검정한 결과 유의확률들의 평균은 0.0826이고, 이들의 표준편차는 0.1094로 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각할 수 없으므로 시그마 품질수준 Z_{st}이 3보다 크다고 말할 수 없다.

그러나 표본크기가 40이라면 유의확률들의 평균이 0.0486이고, 표준편차는 0.0755로 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각하여 Z_{st}가 3보다 크다고 결론을 내릴 수 있을 것이다. 그리고 표본의 크기가 80의 경우엔 유의확률들의 평균이 0.0080으로 유의수준 0.01에서도 귀무가설을 기각하여 보다 확실한 증거를 갖고 시그마 품질수준 Z_{st}가 3보다 크다고 결론

표 5.2: 카이제곱분포 변환 하에서의 유의확률 평균과 표준편차

	$H_0 : Z_{st} \leq 3$ $H_1 : Z_{st} > 3$		$H_0 : Z_{st} \leq 4$ $H_1 : Z_{st} > 4$	
n	$\mu = 50, \sigma = 1.5$	$\mu = 50, \sigma = 2$	$\mu = 50, \sigma = 1.2$	$\mu = 50, \sigma = 1.5$
30	0.2171(0.1663)	0.5190(0.2695)	0.2654(0.1916)	0.5018(0.2735)
40	0.1612(0.1394)	0.4951(0.2712)	0.2103(0.1703)	0.4985(0.2779)
50	0.1362(0.1315)	0.5030(0.2681)	0.1862(0.1632)	0.5111(0.2777)
60	0.1117(0.1179)	0.4999(0.2736)	0.1618(0.1536)	0.5023(0.2810)
70	0.1040(0.1167)	0.5278(0.2814)	0.1563(0.1542)	0.5035(0.2825)
80	0.0801(0.0962)	0.5082(0.2794)	0.1282(0.1350)	0.5139(0.2830)
90	0.0678(0.0861)	0.5156(0.2762)	0.1144(0.1259)	0.5032(0.2846)
100	0.0564(0.0852)	0.5063(0.2787)	0.0999(0.1231)	0.5188(0.2841)
120	0.0444(0.0732)	0.5073(0.2918)	0.0850(0.1160)	0.5067(0.2851)
140	0.0292(0.0486)	0.5082(0.2844)	0.0639(0.0891)	0.5031(0.2826)
160	0.0229(0.0430)	0.5137(0.2915)	0.0550(0.0836)	0.5080(0.2829)
180	0.0170(0.0391)	0.5136(0.2864)	0.0441(0.0770)	0.5101(0.2926)
200	0.0125(0.0298)	0.5041(0.2897)	0.0360(0.0663)	0.5268(0.2820)

표 5.3: t 분포 변환 하에서의 유의확률들의 평균과 표준편차

	$H_0 : Z_{st} \leq 3$ $H_1 : Z_{st} > 3$		$H_0 : Z_{st} \leq 4$ $H_1 : Z_{st} > 4$	
n	$\mu = 50, \sigma = 1.5$	$\mu = 50, \sigma = 2$	$\mu = 50, \sigma = 1.2$	$\mu = 50, \sigma = 1.5$
30	0.2540(0.1622)	0.5024(0.2277)	0.2952(0.1772)	0.5067(0.2305)
40	0.2275(0.1634)	0.5163(0.2415)	0.2750(0.1840)	0.5208(0.2477)
50	0.1904(0.1467)	0.5076(0.2347)	0.2399(0.1692)	0.5069(0.2465)
60	0.1724(0.1383)	0.5188(0.2404)	0.2245(0.1650)	0.4987(0.2485)
70	0.1494(0.1461)	0.4998(0.2513)	0.1994(0.1740)	0.5018(0.2510)
80	0.1313(0.1327)	0.4991(0.2543)	0.1813(0.1619)	0.4992(0.2506)
90	0.1105(0.1143)	0.4975(0.2442)	0.1600(0.1444)	0.4888(0.2479)
100	0.1048(0.1204)	0.5043(0.2498)	0.1541(0.1502)	0.5049(0.2461)
120	0.0860(0.1196)	0.4999(0.2531)	0.1329(0.1490)	0.4882(0.2470)
140	0.0721(0.1123)	0.5050(0.2585)	0.1176(0.1432)	0.4981(0.2545)
160	0.0592(0.0992)	0.5017(0.2615)	0.1025(0.1345)	0.4955(0.2497)
180	0.0425(0.0763)	0.4927(0.2544)	0.0802(0.1085)	0.4853(0.2506)
200	0.0423(0.0897)	0.5127(0.2595)	0.0805(0.1221)	0.4871(0.2587)

을 내릴 수 있다는 지극히 자연스러운 결과를 얻었다. 또한 공정분포가 $N(50, 2^2)$를 따르는 즉, 품질수준 Z_{st}이 3 시그마인 경우, 가설

$$H_0 : Z_{st} \leq 3 \quad vs. \quad H_1 : Z_{st} > 3$$

을 크기 30의 원래의 표본을 임의추출하여 붓스트랩 검정한 결과 유의확률들의 평균은 0.5258 (표준편차 0.2786)이고, 표본크기가 40의 경우엔 유의확률의 평균이 0.5275 (표준편차 0.2790) 그리고 표본의 크기가 200의 경우엔 유의확률들의 평균이 0.5116 (표준편차 0.2920)으로 표본크기가 커짐에 따라 0.5로 수렴하는 것을 알 수 있다. 이는 귀무가설이 참이라는 확률이 대략 0.5, 대립가설이 참이라는 확률이 대략 0.5로 매우 자연스런 결과임을

표 5.4: 정규분포 하에서의 유의확률들의 평균과 표준편차

	$H_0: C_{pm} \le 1$ $H_1: C_{pm} > 1$		$H_0: C_{pm} \le 4/3$ $H_1: C_{pm} > 4/3$	
n	$N(50, 2.29^2)$	$N(50, 3.18^2)$	$N(50, 1.73^2)$	$N(50, 2.29^2)$
30	0.0266(0.0938)	0.4857(0.3087)	0.0660(0.1503)	0.5038(0.3148)
40	0.0128(0.0593)	0.5028(0.3014)	0.0440(0.1140)	0.5020(0.3106)
50	0.0058(0.0319)	0.4956(0.2987)	0.0258(0.0818)	0.5135(0.3034)
60	0.0050(0.0304)	0.4933(0.3039)	0.0221(0.0781)	0.5086(0.3056)
70	0.0014(0.0111)	0.5063(0.2970)	0.0121(0.0462)	0.5077(0.2977)
80	0.0006(0.0062)	0.5082(0.2958)	0.0079(0.0360)	0.4971(0.2955)
90	0.0002(0.0020)	0.4994(0.2920)	0.0041(0.0217)	0.5054(0.2997)
100	0.0001(0.0012)	0.4926(0.2932)	0.0032(0.0189)	0.5026(0.2970)
120	0.0001(0.0014)	0.5052(0.3011)	0.0025(0.0166)	0.5034(0.2984)
140	0.0000(0.0001)	0.5024(0.2933)	0.0008(0.0072)	0.4977(0.2928)
160	0.0000(0.0000)	0.5048(0.2897)	0.0002(0.0024)	0.5052(0.2925)
180	0.0000(0.0000)	0.4943(0.2974)	0.0002(0.0025)	0.4976(0.2976)
200	0.0000(0.0000)	0.4964(0.2913)	0.0001(0.0013)	0.5012(0.2811)

뜻하고, 이러한 결과들은 붓스트랩 검정의 정당성을 보여주는 결과이다. 또한 표 5.1에서 가설

$$H_0: Z_{st} \le 4 \quad vs. \quad H_1: Z_{st} > 4$$

에 대한 모의실험 결과도 모집단 분포의 품질수준에 따라 앞에서와 유사한 실험결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

그리고 치우친 분포로 자유도가 5인 카이제곱분포 $\chi^2(5)$와 꼬리가 두터운 분포로 자유도가 5인 분포 $t(5)$에 대하여, 평균이 μ이고 분산이 σ^2이 되도록 각각 다음과 같이 변수변환을 통하여 모의실험을 수행하였다.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\{\chi^2(5) - 5\} + \mu, \qquad \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{5}}t(5) + \mu.$$

이에 대한 모의실험 수행 결과가 표 5.2와 5.3에 제시되어 있다. 이는 매우 복잡하고 매우 까다로운 계산을 하여야 하겠지만, 본 논문에서 제안한 붓스트랩 방법을 통하여 매우 편리하고 만족스러운 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

한편 표 5.4 ~ 5.6은 시그마 품질수준 Z_{st}에 대한 가설검정을 위한 경우에서와 같은 형태의 평균이 μ이고 분산이 σ인 3가지 공정분포 가정 하에서 가설

$$H_0: C_{pm} \le c \quad vs. \quad H_1: C_{pm} > c$$

을 검정하기 위해 표본크기를 달리하여 각각 $c = 1, 4/3$인 경우에 대하여 평균적인 유의확률과 표준편차를 계산하였다.

예를 들어 표 5.4에서 분포가 $N(50, 2.29^2)$를 따를 때 즉 공정능력지수가 $C_{pm} = 4/3$인 경우, 가설

$$H_0: C_{pm} \le 1 \quad vs. \quad H_1: C_{pm} > 1$$

표 5.5: 카이제곱분포 변환 하에서의 유의확률들의 평균과 표준편차

	$H_0 : C_{pm} \leq 1$ $H_1 : C_{pm} > 1$		$H_0 : C_{pm} \leq 4/3$ $H_1 : C_{pm} > 4/3$	
n	$\mu = 50, \sigma = 2.29$	$\mu = 50, \sigma = 3.18$	$\mu = 50, \sigma = 1.73$	$\mu = 50, \sigma = 2.29$
30	0.0379(0.1274)	0.4486(0.3244)	0.0543(0.1486)	0.4579(0.3218)
40	0.0242(0.0951)	0.4637(0.3215)	0.0402(0.1192)	0.4637(0.3215)
50	0.0168(0.0786)	0.4660(0.3166)	0.0277(0.1004)	0.4660(0.3166)
60	0.0104(0.0569)	0.4646(0.3167)	0.0193(0.0775)	0.4646(0.3167)
70	0.0079(0.0498)	0.4816(0.3073)	0.0164(0.0696)	0.4816(0.3073)
80	0.0068(0.0486)	0.4645(0.3083)	0.0132(0.0666)	0.4645(0.3083)
90	0.0047(0.0369)	0.4623(0.3002)	0.0095(0.0541)	0.4623(0.3002)
100	0.0040(0.0317)	0.4546(0.3064)	0.0080(0.0488)	0.4546(0.3064)
120	0.0016(0.0176)	0.4752(0.3059)	0.0040(0.0310)	0.4752(0.3059)
140	0.0004(0.0053)	0.4506(0.3077)	0.0023(0.0184)	0.4506(0.3077)
160	0.0007(0.0075)	0.4493(0.2971)	0.0029(0.0244)	0.4493(0.2971)
180	0.0003(0.0058)	0.4795(0.3028)	0.0012(0.0138)	0.4795(0.3028)
200	0.0002(0.0062)	0.4710(0.3033)	0.0009(0.0121)	0.4710(0.3033)

표 5.6: t 분포 변환 하에서의 유의확률들의 평균과 표준편차

	$H_0 : C_{pm} \leq 1$ $H_1 : C_{pm} > 1$		$H_0 : C_{pm} \leq 4/3$ $H_1 : C_{pm} > 4/3$	
n	$\mu = 50, \sigma = 2.29$	$\mu = 50, \sigma = 3.18$	$\mu = 50, \sigma = 1.73$	$\mu = 50, \sigma = 2.29$
30	0.0606(0.1643)	0.4130(0.3283)	0.0936(0.1998)	0.4211(0.3289)
40	0.0481(0.1466)	0.4223(0.3229)	0.0784(0.1804)	0.4448(0.3283)
50	0.0437(0.1349)	0.4420(0.3247)	0.0760(0.1731)	0.4472(0.3201)
60	0.0346(0.1189)	0.4369(0.3155)	0.0600(0.1546)	0.4241(0.3168)
70	0.0335(0.1125)	0.4475(0.3142)	0.0599(0.1539)	0.4337(0.3214)
80	0.0254(0.0961)	0.4528(0.3107)	0.0497(0.1332)	0.4505(0.3122)
90	0.0194(0.0891)	0.4442(0.3156)	0.0384(0.1188)	0.4324(0.3130)
100	0.0180(0.0864)	0.4550(0.3104)	0.0369(0.1170)	0.4344(0.3157)
120	0.0118(0.0643)	0.4551(0.3120)	0.0267(0.0974)	0.4377(0.3051)
140	0.0091(0.0645)	0.4365(0.3085)	0.0202(0.0862)	0.4459(0.3057)
160	0.0109(0.0685)	0.4688(0.3058)	0.0208(0.0903)	0.4561(0.3069)
180	0.0058(0.0488)	0.4448(0.3072)	0.0132(0.0679)	0.4563(0.3043)
200	0.0064(0.0539)	0.4520(0.3080)	0.0142(0.0741)	0.4550(0.3047)

을 크기 30의 원래의 표본을 임의추출하여 붓스트랩 검정한 결과 유의확률들의 평균은 0.0266이고 표준편차는 0.0938로 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각하게 되어 공정능력지수 C_{pm}이 1보다 크다고 할 수 있고, 표본크기가 40인 경우에도 유의확률들의 평균이 0.0128이고 표준편차는 0.0593으로 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각하여 공정능력지수 C_{pm}이 1보다 크다고 결론을 내릴 수 있을 것이다. 그리고 표본의 크기가 50 이상 클수록 유의확률들의 평균이 0.01 보다 작아 유의수준 0.01에서도 귀무가설을 기각하게 되어 보다 확실한 증거를 갖고 공정능력지수가 C_{pm}이 1보다 크다고 결론을 내릴 수 있다는 지극히

자연스러운 결과를 얻었다. 또한 가설

$$H_0 : C_{pm} \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : C_{pm} > 1$$

에 대한 가설검정 문제에 대한 모의실험을 위해 공정분포 $N(50, 3.18^2)$로부터 (즉, 공정능력지수 $C_{pm} = 1$인 경우) 표본을 임의 추출하여 붓스트랩 방법에 의한 유의확률을 계산한 결과는 다음과 같다. 표본크기 30의 경우 유의확률들의 평균은 0.4857 (표준편차 0.3087), 표본크기가 40의 경우엔 유의확률들의 평균이 0.5028 (표준편차 0.3014) 그리고 표본의 크기가 200의 경우엔 유의확률들의 평균이 0.4964 (표준편차 0.2913)로 0.5에 가까운 값을 갖게 되어 이는 귀무가설이 참이라는 확률이 대략 0.5, 대립가설이 참이라는 확률이 대략 0.5로 매우 자연스런 결과임을 의미한다. 이러한 내용들은 붓스트랩 검정의 정당성을 보여주는 바람직한 결과라고 사료된다.

또한 표 5.4에서 정규공정인 경우에 가설

$$H_0 : C_{pm} \leq \frac{4}{3} \quad vs. \quad H_1 : C_{pm} > \frac{4}{3}$$

에 대한 모의실험 결과도 서로 다른 분산을 갖는 각각의 조건에 따라 앞에서와 유사한 바람직한 실험결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

그리고 치우친 분포로 자유도가 5인 카이제곱분포 $\chi^2(5)$와 꼬리가 두터운 분포로 자유도가 5인 분포 $t(5)$에 대하여, 역시 평균이 μ이고 분산이 σ^2이 되도록 다음과 같은 변수변환을 통하여 모의실험을 수행하였다.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\{\chi^2(5) - 5\} + \mu, \qquad \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{5}}t(5) + \mu.$$

표 5.5와 5.6은 모의실험을 수행한 유의확률 결과이다. 매우 복잡하고 매우 까다로운 계산을 하여야 하겠지만, 본 논문에서 제안한 붓스트랩 방법을 통하여 매우 편리하고 만족스러운 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 1차원 공정능력지수 C_p, C_{pk}와 C_{pm}에 대한 정의와 성질 그리고 극한분포이론을 기초로 공정능력지수 및 시그마 품질수준 Z_{st}에 대한 통계적 가설검정 문제를 포괄적으로 연구한 바, 요약하면 다음과 같다.

첫째, 기존의 연구 결과를 이용하여 정규공정 가정 하에서의 모의실험을 통하여 실제 현장에서 이용할 수 있는 임계치에 관한 연구결과를 정리하여 제시하였다.

둘째, 붓스트랩 방법을 활용하여 몇 가지 공정분포 상황에서 유의확률을 계산한 모의실험 수행 결과들은 본 논문에서 제안한 붓스트랩 방법의 정당성을 보여주는 것으로 나타났다.

결론적으로 본 논문에서는 정규성을 가정하지 않는 경우에도 다양한 컴퓨터 모의실험을 통하여 공정능력지수 및 시그마 품질수준 Z_{st}에 대해 가설검정 문제를 연구한 바, 제안

된 붓스트랩 검정방법이 이러한 형태의 가설검정문제를 해결할 수 있는 보다 효율적인 방법이 될 수 있을 것이다.

참고문헌

Cho, J. J., Kim, J. S. and Park, B. S. (1999). Better nonparametric bootstrap confidence intervals for capability index C_{pk}, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **12**, 45–65.

Cho, J. J., Han, J. H. and Cho, S. H. (1997). Bootstrapping unified process capability index, *Journal of the Korean Statistical Society*, **26**, 543–544.

Cho, J. J. and Lim, S. D. (2006). Better statistical test for process capability index C_p, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **34**, 66–72.

Diciccio, T. and Tibshirani, R. (1987). Bootstrap confidence intervals and bootstrap approximations, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 163–170.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *The Annals of Statistics*, **7**, 1–26.

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall/CRC, New York.

Franklin, L. A. and Wasserman, G. S. (1992). Bootstrap lower confidence limits for capability indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 196–210.

Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, *The Annals of Statistics*, **16**, 927–953.

Lin, H. C. (2005). Using normal approximation for calculating the p-value in assessing process capability indexC_{pk}, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **25**, 160–166.

Lin, P. C. and Pearn, W. L. (2002). Testing process capability for one-sided specification limit with application to the voltage level translator, *Microelectronics Reliability*, **42**, 1975–1983.

Pearn, W. L., Yang, S. L., Chen, K. S. and Lin, P. C. (2001). Testing process capability using the index C_{pmk} with an application, *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, **8**, 15–34.

[2008년 3월 접수, 2008년 4월 채택]

Statistical Inference for Process Capability Indices and 6 Sigma Quality Levels†

Joong-Jae Cho[1], Kyu-Young Sim[2], Byoung-Sun Park[3]

Abstract

Six sigma is the rating that signifies "best in clas", with only 3.4 defects per million units or operations. Higher sigma quality level is generally perceived by customers as improved performance by assigning a correspondingly higher satisfaction score. The process capability indices and the sigma level Z_{st} have been widely used in six sigma industries to assess process performance. Most evaluations on process capability indices focus on point estimates, which may result in unreliable assessments of process performance. In this paper, we consider statistical inference for process capability indices C_p, C_{pk} and C_{pm}. Also, we study better testing procedure on assessing sigma level Z_{st} and capability index C_{pm} for practitioners to use in determining whether a given process is capable. The proposed method is easy to use and the decision making is more reliable. Whether a process is clearly normal or nonnormal, our bootstrap testing procedure could be applied effectively without the complexity of calculation. A numerical result based on our proposed method is illustrated.

Keywords: Process capability index; quality level; test of hypothesis; bootstrap method; p-value; monte-carlo experiment; asymptotic normal distribution.

† This work was supported by Chungbuk National University Research Grant in 2006.

1) Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Korea. Correspondence: jjcho@chungbuk.ac.kr

2) Past Graduate School Student, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Korea.

3) Deputy Director, Statistical Analysis Team, Korea National Statistical Office, Daejeon 302-701, Korea.