대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 2, 263-281. May 2008

라디안에 대한 교수학적 분석

남 진 영* · 임 재 훈**

라디안에 관한 기존의 교육적 논의는 대부분 학생들의 라디안 이해 실태 조사에 한정되고, 학습 지도에 관한 논의는 본격적으로 이루어지지 않았다. 라디안의 효과적인 지도에 관한 연구를 비롯한 라디안에 관한 교육적 논의는 라디안의 본질에 대한 이해에 기초해야 한다. 이에 이 연구에서는 라디안에 대한 이론적 분석을 통해 이후 라디안의 교수 학습 실제에 관한 연구의 기초를 놓는다. 라디안은 각의 크기와 동질량의 비라는 두 측면을 복합적으로 지니고 있는 개념이다. 라디안의 개념 지도는 라디안이 가진 이 양면적 특성과 관련하여 라디안의 좋은 점과 유용성을 학생들이 인식하게 하는 방향으로 이루어져야 한다.

Ⅰ. 서 론

기하학적 실체에는 점, 직선, 평면과 같이 질적인 본성을 지닌 것과 선분, 평면 영역처럼 길이, 넓이와 같은 수치적 값, 즉 측도가 부여될 수 있는 것이 있다(Maor, 1998). 굴절이나 꺾임, 두 직선 사이의 기울기, 회전 등으로 정의할 수 있는 각 개념은 질적인 본성과 측도가 부여될 수 있는 성격을 모두 지니고 있다. 이 논문은 이 중 각에 수치적 값을 부여하는 측도의 측면에 초점을 둔다.

우리나라 학교수학에서는 도(°) 와 라디안(radian)이라는 두 가지 각의 측도를 주로 다룬다. 도(°)는 초등학교 4학년에서 각도기를 사용하는 각의 측정 방법을 소개하면서 도입하고, 라디안은 고등학교 1학년에서 호의 길이와 반지름의 길이가 같은 각을 1라디안으로 정의하며 도입한다.

그런데 시기와 지역을 달리한 여러 실태 조사 연구(송은영, 2008; 장영수, 2006; 강윤수, 박수정, 2003; 라병채, 2002; 김현웅, 2001)에서 공통적으로 학생들이 라디안을 배우고도 그 의미나 유용성을 제대로 이해하지 못하고 있음이 보고되고 있다. 설문지와 심층 면담을 통한 이들 연구 결과에 의하면 학생들은 육십분법과 호도법 사이의 기계적인 변환 계산은 잘 수행하지만, 라디안의 정의, 호도법의 의미와 필요성을 이해하지 못한다. 학생들은 1라디안 = $\frac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 라디안, $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$ 의 공식을 이용한 기계적인 계산이나 문제 풀이에 집중한다. 또 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때 π를 항상 붙여야 하는 것으로 생각하며, 호도법으로 나타낸 각을 실수와 관련지어 이해하지 못한다.

* 영신고등학교, myjynam@naver.com
** 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr

라디안 이해에 어려움을 겪는 것은 고등학교 학생들뿐이 아니다. 예비교사들도 도(°)와 라디안 변환 식에만 의존하는 기계적이고 형식적인 이해에 머무르고 있다(송은영, 2008; Topçu et al., 2006). 일반각과 호도법, 그리고 그에 이어지는 삼각함수는 학생들이 가장 어려워하고 싫어하는 단원 중 하나이며, 교사들도 가르치기 어렵게 여기는 단원이다(김은실, 2007). 한국교육과정평가원의 교육내용 적정성 평가에서도 삼각함수는 학생들이 가장 어려워하는 단원으로 보고되고 있다(임재훈, 이대현, 이양락, 박순경, 정영근, 2004).

라디안에 대한 학생들의 개념적 이해가 부족하다는 선행 연구들의 결과는 라디안이 이해하거나 다루기 쉽지 않은 개념임을 시사한다. 그러나 라디안에 관한 선행 연구들은 주로 실태 조사에 치중할 뿐, 라디안의 지도에 관한 논의는 거의 이루어지지 않고 있다. 부채꼴의 호의 길이와 중심각의 크기, 반지름의 관계를 탐구하는 여러 과제를 통하여 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 길이의 비가 일정함을 알게 하자는 제안이 있으나(장영수, 2006), 이것은 각의 측정 단위로서의 라디안의 본질을 이해하게 하는 방안으로는 불충분하다. 라디안 개념의 효과적인 지도에 관한 연구는 국내외적으로 찾기 어렵다.

라디안의 효과적인 지도에 관한 논의가 이루어지지 않고 있는 이유를 라디안 개념에 대한 교수학적 분석의 부재에서 찾을 수 있다. 이 논의는 라디안의 본질에 대한 교수학적 분석에 바탕을 두지 않으면 안 된다. 교수학적 분석은 학교수학의 내용을 이루고 있는 개개의 지식의 본질을 밝히는 작업으로, 지식의 본질을 이해하지 못하고 그 지식을 의미 있게 가르치는 방안을 제대로 논의하는 것은 원칙상 불가능하다. 교수학적 분석을 통해 학교수학에서 다루는 수학적 지식의 본질이 드러날 때, 그 지도와 관련된 문제점도 드러나고 바람직한 개선 방향도 모색할 수 있다. 라디안과 같은 학교수학의 특정 내용에 대한 학생들의 이해, 교재 및 수업을 보고 현상 이면의 본질을 분석하려면 그것을 포착할 수 있는 안목이 있어야 한다. 학교수학 내용의 본질 이해를 목적으로 하는 교수학적 분석은 학생들의 이해 및 수학 교과서나 수학 수업의 분석의 준거, 구체적인 실천적 처방과 관련된 경험 연구의 배경을 형성하는 '알파'에 해당하는 작업이다(우정호 외, 2006).

> 각도 개념의 교육에 관심을 갖게 된 연구자가 있다고 하자. 이 연구자는 초등학교와 고등학교 수학 교과서를 보고 도(°)와 직각, 라디안이 각도의 단위로 도입되고 있는 것을 확인한다. 연구자는 다양한 교수 학습 자료나 각도 개념 지도 방안에 관한 문헌을 읽어 가는 동시에, 또는 이 일에 앞서, 도(°)와 직각, 라디안의 발생적 본질이 무엇인지를 알려고 한다. 이러한 탐구의 일환으로, 연구자는 도(°)와 직각, 라디안(의) ... 역사 발생적 근원을 찾아 들어가게 된다. ... 또 라디안이라는 새로운 각도 체계의 등장 배경과 이것이 도(°)와 직각에 비해 어떤 장점을 지니고 있는지를 분석하게 된다. ... 이런 과정을 통해 연구자가, 예를 들어 각의 단위로서 직각의 본질을 파악하게 되었다고 하자. 이제 그는 우리나라 교과서에서 각의 측정 단위로서 직각의 본질이 잘 드러나고 있는가를 알아 볼 수 있다. 그리고 필요하다면 각도 개념 지도의 개선 방향을 제시할 수 있다. (우정호 외, 2006: 40-41)

이 연구는 라디안 개념을 대상으로 이와 같은 고찰을 시도하여, 이후 라디안 개념 지도에 관한 실천적 논의의 기초를 구축하는 것을 목적으로 한다. 이를 위하여 라디안의 본질에 대한 이론적 분석을 시도하였다. 그리고 이를 보완하기 위하여, 관련 분야의 권위자라고 할 수

있는 20년 이상의 현장 지도 경험을 가지고 있는 세 명의 수학 교사(A, B, C)와 두 명의 수학전공 교수(D, E), 그리고 한 명의 수학교육전공 교수(F)와의 인터뷰를 수행하였다.[1] 인터뷰는 라디안 학습 지도에 있어서의 어려움과 이를 극복하기 위한 지도 방안에 대한 반 구조화된 면담으로 진행되었고, 분석은 이론적 분석에서 얻어진 연구 결과를 뒷받침하는 방식(이용숙, 1998)으로 이루어졌다.

본 논문의 II장에서는 라디안의 기원에 대하여 논한다. 이어서 III장과 IV장에서는 각의 크기를 나타낸다는 측면과 동질량의 비라는 측면에서의 라디안의 특성과 장점에 대하여 각각 논한다. V장에서는 이상의 논의를 바탕으로 라디안 지도에 관한 제언을 도출한다.

II. 라디안의 기원

'라디안(radian)'이라는 용어가 사용되기 시작한 것은 약 130여 년 전, Muir와 Thomson에 의해서이므로 역사적으로 볼 때 비교적 최근의 일이다.[2] 1879년 출판된 옥스퍼드 사전에는 라디안을 다음과 같이 설명한다.

> 각의 통상적 단위는... 원의 중심에 대하여 그 길이가 반지름의 길이와 같은 호에 해당하는 것이다. 이 각을 간단히 라디안이라 한다(재인용, Cooper, 1992).

라디안은 각속도를 논하면서 등장한 것으로, 'radius+an'에서 만들어진 용어이다(Cooper, 1992). 이 용어를 처음 사용한 Muir나 Thomson은 'rad', 'radial', 'radian' 중 어느 것을 사용할지 망설이다가 'radian'으로 정하였다고 한다. 이 용어를 사용하기 전에는 이를 'radial angle(반지름의 각)'이라 칭하였다(Ibid.). 그러나 각의 크기를 나타내는 이 방식 자체는 라디안이라는 이름이 붙여지기 약 200년 전부터 사용되어 왔다고 전해진다(Jones, 1953, 재인용, 이종희, 2001).

라디안은 두 가지 방식으로 접근할 수 있다. 첫째로, 각의 측도로서 라디안 단위는 호의 길이가 반지름의 길이와 같은 부채꼴의 중심각으로 정의될 수 있다. 이 접근은 1라디안이라는 각의 벌어진 정도가 어느 정도인가를 부각시키며, 각의 양적인 성질과 각의 측도로서 1라디안의 크기를 강조한다. 둘째로, 부채꼴의 호의 길이 s 와 반지름 r 의 비, 즉 $\frac{s}{r}$ 에 초점을 두는 접근이 있다. 이 접근에서 1라디안은 $s=r$ 일 때의 '비'로 정의된다.[3] 비에 초점을 맞춘 접근에서는 각과 호의 길이의 관계, 또 반지름과 호의 길이의 관계와 같은 각의 관계적 성질이 보다 강조된다. 이 접근에서 라디안은 (길이)/(길이) 이므로, 분자와 분모의 길이 단위가 약분될 수 있고 그 결과 남는 것은 '수' 뿐이다. '비'로서 라디안은 중심각의 크기보다는 '비'라는 추상적인 수치적 값으로 해석된다 (Morikawa and Newbold, 2005).

---

1) 교육 연구에 있어서 이론은 연구 문제를 해결하기 위한 출발점이며 후속 연구의 길잡이가 된다(박도순, 1992:35-36). 이론적 체계가 확립되지 않은 현상의 이론 수립의 기초를 닦기 위해서는 본 연구에서 택한 방법과 같이 해당 분야의 권위자의 진술이 기초가 될 수 있다(김연희, 문승태, 장선철, 2003:15-16).

2) 라디안이라는 용어는 공식적으로 James Thomson이 1873년 Belfast, Queen's College 시험 문제에서 처음 사용하였다는 기록이 있다(Cathorne, 1912). 그러나 Thomas Muir는 자신이 Thomson보다 먼저 사용하였다고 주장한다. 라디안의 처음 사용자와 관련된 양쪽 입장은 Whitaker(1994), Cooper(1992) 참조하길 바란다.

3) 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 비로 평면각의 크기를 정의하는 방식은 입체에서 각을 정의하고 측정하는 데까지 확장될 수 있다. 단위 구의 표면에 어떤 영역이 있을 때, 구의 중심과 이 영역을 연결하면 입체가 생기고, 이때 생기는 입체의 꼭지각의 크기는 표면 영역의 넓이로 정의될 수 있다. 이렇게 정의된 입체각과 그 크기는 물리학에서 유용하다(Cell, 1941).

이와 같이, 라디안은 이중적인 성질을 지니고 있다. 하나는 2차원 각의 크기의 단위로서 갖는 특성으로, 이때에는 물리적 양과 크기가 부각된다. 다른 하나는 '동질량의 비' 측면으로, 이때에는 물리적 양과 크기는 사라지고 수만 남는다. 라디안이 수학과 물리학에서 각의 측도로 빠른 시간에 자리를 잡고 광범위하게 사용되게 된 것은 이 이중적인 특성과 관련 있다. 그러나 이것은 라디안을 복합적인 개념이 되게 하여 그 이해를 어렵게 만들기도 한다.

III. 각의 크기를 나타내는 라디안

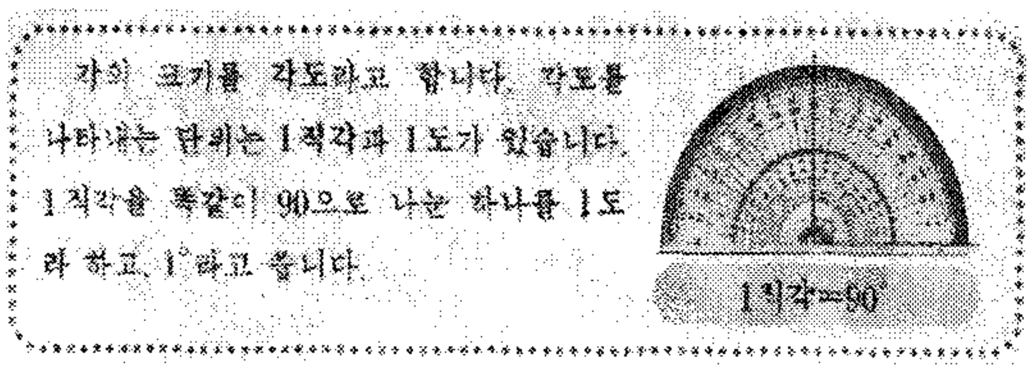
이 장에서는 각의 크기를 재는 각의 측도로서 라디안이 지닌 특성에 대하여 고찰한다. 이를 위하여 여러 가지 각의 측도에 대하여 고찰하고, 이러한 각의 측도에 비해 라디안이 지니고 있는 특성에 대하여 논한다.

1. 여러 가지 각의 측도

우리나라 학교수학에서는 도(°) 와 라디안이라는 두 가지 각의 측도를 주로 다룬다. 그러나 도와 라디안 이외에도 각의 측도에는 직각, 그레이드, 밀, 회전 등이 있다.

가. 직각

직각은 각을 지칭하는 용어인 동시에 각도를 지칭하는 용어이다. 유클리드의 원론에서는 직각을 "직선에 다른 한 직선을 세웠을 때, 이웃한 각의 크기가 서로 같으면 그 각을 직각이라 부른다(Euclid and Heath, 1998: 50)"와 같이 정의한다. 유클리드 시대에 직각, 그리고 그것의 자연수 배나 분수 배는 각 측정의 표준이었고, 상식적인 개념이었다(Gandz, 1929).



[그림 III-1] 1직각과 1도(교육인적자원부, 2007: 42)

탈레스는 직각을 각의 크기의 단위로 사용하여 삼각형의 세 각의 합을 2직각이라고 하였다 (Cajori, 1958: 16). 유클리드 원론(Euclid and Heath, 1998)에서도 직각을 각의 크기를 나타낼 때 사용하였다. 원론 1권 법칙 15의 딸린 법칙 "두 직선이 만날 때 생기는 네 각을 더한 것은 네 개의 직각을 더한 것과 크기가 같다(p.209)," 법칙 17 "삼각형에서 어떤 두 내각을 더해도 직각을 두 개 더한 것보다는 더 작다(p.214)"는 그 예이다. 평행선 공리를 증명하려 한 Ptolemy도 "두 각을 더한 것이 직각의 두 배가 된다(p.91)," "네 각을 더한 것은 직각의 네 배가 된다(p.91)"와 같이, 직각을 각도의 단위처럼 사용하였다.

우리나라 초등학교 교과서에서 직각은 도형으로서의 각을 지칭하는 용어이자(교육인적자원부, 2004), 각도를 나타내는 단위이다. [그림 III-1]에서와 같이 1직각은 1도와 더불어 각도를 나타내는 단위로 소개된다. 그러나 그 이후 초등학교 수학의 학습에서는 직각이 각도의 단위로 거의 사용되지 않는다. 이를테면 삼각형의 세 내각의 합은 2직각, 사각형의 네 각의 합은 4직각과 같이 표현할 수 있지만, 이보다 180°, 360°와 같이 도(°)를 각도의 단위로 사용하여 나타내는 것을 더 선호한다(교육인적자원부, 2007: 46-47).[4)]

4) 이는 초등학교에서 직각을 각도의 단위로 소개하는 이유를 불분명하게 만든다. 직각은 유클리드 기하학의 이론적 단위인데 학교수학에서 이론적 단위로 사용하지 않을 것이라면 굳이 소개할 필요가 없다.

나. 도(degree)

도(°)는 수학 및 일상생활에서 가장 흔히 사용되는 각의 측도이다. 1직각은 상당히 큰 각의 크기이기 때문에, 일상생활에서 직각을 사용하여 각의 크기를 나타내면 분수나 소수를 많이 사용하게 되어 불편하다. 예컨대 5도 정도 기울어진 도로의 경사를 나타낼 때 직각을 단위로 하면 $\frac{1}{18}$직각, 0.056직각과 같이 분수나 소수를 써서 나타내게 된다. 도는 직각에 비해 훨씬 세분화된 단위이며, 생활에서 직면하는 여러 일상적인 문제 상황 속에서 각의 크기를 자연수로 나타낼 수 있게 해 준다.

도의 기원은 육십진법 기수 체계를 사용하던 고대 바빌로니아 시대로 거슬러 올라간다(Maor, 1998). 바빌로니아인들은 원주를 360 부분으로 나누어 그 하나에 해당하는 중심각을 1도[5]로 정의하고, 이를 천체 연구에 사용하였다. 바빌로니아인들이 원주를 360 부분으로 나눈 이유에 대해서는 두 가지 설이 있다(Ibid.). 하나는 지구가 태양을 공전하는 공전 주기, 즉 1년이 365일인 것과 관련이 있다는 견해이다. 지구의 공전주기인 365와 가까우면서 여러 수로 나누어떨어지는 360을 원의 각을 나타내는 수로 택했다는 것이다. 다른 하나는, 원을 여섯 개의 같은 부분으로 나누었을 때 그 나누어진 부분의 현의 길이는 반지름의 길이와 같으므로, 이 나누어진 부분(부채꼴)의 중심각을 육십진법의 한 단위인 60으로 놓는 것이 자연스러웠으리라는 견해이다. 어느 설이 옳은지에 대한 정확한 사료는 없지만, 두 가지 모두 바빌로니아인들의 육십진법 기수 체계에 잘 들어맞는다.

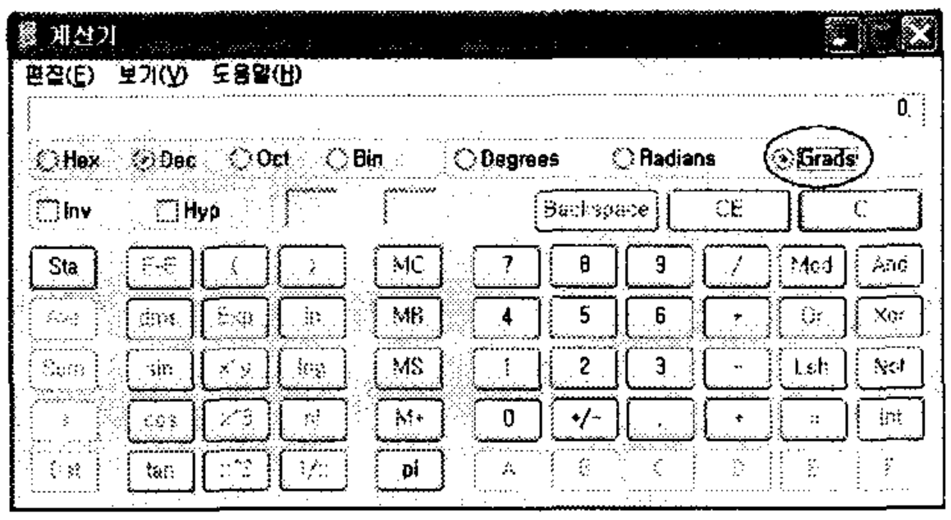
그리스에서는 원을 360 등분하는 것이 Hipparchus 시대부터 쓰였는데, 그러한 관습이 어떻게 형성되었는지는 정확히 알 수 없지만, 황도를 십이 '궁'과 36개의 '십분각'으로 나누는 360°라고 하는 값은 천문학에서 유래한다고 볼 수 있다. 약 360일인 한 해의 주기는 각 궁을 30개의 부분으로, 각 십분각은 열 개의 부분으로 잘게 나눔으로써 황도 12궁계와 10분각의 체계에 쉽게 대응시킬 수 있다. 도를 단위로 하는 각도 체계는 이 대응 관계에서 유래했을 가능성이 높다(Boyer and Merzbach, 2002: 272).

그리스인들은 도(°)를 'μοιρα(moira)'라 하였고, 아랍인들은 사다리나 저울의 한 눈금을 의미하는 'daraja'라고 하였다. 이 단어는 라틴어로 'de gradus'로 번역되었고, 여기에서 'degree'라는 단어가 나왔다(Maor, 1998). Hipparchus는 도를 이용하여 현과 호의 길이에 대한 표를 만들었고, Ptolemy는 1/2°에서 180° 까지 1/2° 간격으로 현의 길이, 즉 삼각비 표를 만들어 천문학자들이 사용하도록 하였다. 여기서 각과 각에 대응하는 호 및 현의 길이의 관계가 고대부터 주된 연구의 대상이었다는 점은 주목할 만하다.

각도의 측정 단위로서 도는, 삼각형과 같은 기하학적 도형에서 각을 중시하고 이론적으로 탐구하려고 한 것이 아니라, 행성의 공전 운동과 같은 현상을 탐구하는 천문학에서 비롯된 것으로, 근본적으로 호나 현의 길이, 일반적으로 말해 원과 관련되어 있다. 호와 현에 의하여 각을 측정하는 것은, 원 모양의 궤도를 행성이 회전한다는 생각에서 나온 것이다. 이와 같이 호의 길이에 의하여 각을 해석하는 아이디어는 동적인 각(회전각)이나 정적으로 원의 중심각을 해석하는 아이디어보다 역사적으로 먼저 출현하였다(이종희, 2001).

---

5) 원을 360 부분으로 나누는 것은 바빌로니아에서 시작되었다고 받아들여지지만, 도(degree)라는 단어 자체는, 수학 역사학자 David Smith에 따르면, 그리스에서 비롯되었다(재인용, Maor, 1998).



[그림 Ⅲ-2] 계산기에서 그레이드

다. 그레이드(grade, grad)

그레이드는 직각을 100으로 나눈 것(1grad $=\frac{90}{100}°$)으로, 육십진법을 기본으로 하는 도를 십진법화 하려는 노력[6]에서 나온 단위이다.[7] 공학용 전자계산기나 컴퓨터의 계산기 프로그램 중에는 도, 라디안과 함께 그레이드 단위 변환 버튼이 있는 것이 있다.[8] 이 단위는 19세기 초 프랑스 천문학자 Delambre에 의하여 도입되었고(Whitaker, 1994), 프랑스의 포병대에서 사용되었다(http://en.wikipedia.org/wiki/Grad_%28angle%29).

그레이드는 는 1직각을 90대신 100으로 나누기 때문에, 직각을 쉽게 더하고 뺄 수 있다는 장점이 있다. 예를 들어 원 위에서 동경 1285°의 위치를 생각하려면 90°를 열네 번 빼고, 나머지 25°를 생각해야 하는 데, 1285 grad라면 100을 열두 번 뺀 후, 그 위치를 쉽게 짐작할 수 있다. 그러나 흔히 사용되는 60°, 30° 등의 각은 그레이드에서는 각각 $66\frac{2}{3}$ grad, $33\frac{1}{3}$ grad라는 분수꼴로 나타내어진다. 또 한 시간에 지구는 360°÷24=15°를 자전하는데, 이를 그레이드로 표현하면 $16\frac{2}{3}$ grad가 된다. 이와 같이 그레이드는 도에 비해 불편하여 일상적인 유용성이 높지 않다.

라. 밀(mil)

'밀(mil)'은 1/1000을 나타내는 접두어 'milli-'에서 비롯된 각의 측도이다. 이것은 직각을 1600등분하여 만든 것으로, 1밀은 1/1600직각이다. 1밀은 대략 1미터 길이의 막대 두 개를 나란히 놓고, 한 쪽 끝을 고정시킨 후, 다른 쪽 끝을 1㎜ 만큼 벌렸을 때 생기는 두 막대 사이의 각이다. 즉, 1밀의 반지름과 현의 길이의 비는 약 1000:1이다.

1밀은 1도나 1그레이드보다 훨씬 작은 크기의 각도이다.[9] 따라서 보다 정밀한 각의 측정이 필요한 상황에서 도나 그레이드에 비해 유용하다. 예를 들어 포를 발사하면 꽤 먼 거리까지 날아가 목표물에 맞게 되므로, 발사시의 작은 각도의 차이가 포가 떨어지는 위치에 큰 차이를 가져온다. 따라서 밀은 포병에게는 도보다 유용한 각도이다. 실제로 미국 군대에서는 각의 단위로 도와 함께, 밀이 많이 사용된다(Whitaker, 1994; Burington, 1941).

1밀은 약 0.001라디안에 해당한다. 이것은 근사값이기는 하지만, 각이 작으면 현의 길이와

---

6) 각도를 십진법화 하려는 노력은 도(°)의 체계 내에서도 이루어졌다. 도로 측정된 각을 더 정밀하게 측정할 때 분이나 초로 60등분하여 측정하는 대신, 십진 기수체계를 도입하여 소수점 이하는 1도를 10등분하여 측정하자는 방안이 제안되었다(Miller, 1942). 도는 오랜 동안 사용하여 온 것으로 과거의 기록과 측정 도구들이 이에 맞추어져 있고, 관습으로 자리 잡고 있었기 때문에, 새로운 각의 측도를 도입하는 것이 현실적으로 곤란하다고 보아 십진법 체계와 도를 조화시키고자 한 것이다. 그러나 각도에 십진법 체계를 도입하는 것에 대한 논의들은 각과 관련된 계산을 오히려 더 복잡하게 한다는 이유로 잘 받아들여지지 않았다(Cajori, 1958: 484).

7) 각의 미터법(metric) 단위라고 볼 수 있는(Whitaker, 1994) 'grad'의 또 다른 이름에는 'gon,' 'grd,' 'gr,' 'g' 등이 있다. 그리고 $50^g=45°$ 와 같이 표기한다.

8) 최근 추세는 그레이드를 빼고 도와 라디안만 사용한다. (http://en.wikipedia.org/wiki/Grad_%28angle%29)

9) 1밀 ≒ 0.056도 ≒ 0.625그레이드

호의 길이의 차이가 매우 적다는 것을 고려할 때, 1밀은 호의 길이를 현의 길이로 환원시켜 각을 나타내는, 실제 활용하기에 좋은 0.001라디안의 근사값이다.

Checkpoint

Angles can be measured in revolutions, degrees, or radians.

ⓐ In your own words, explain how to draw a 1-radian angle.

ⓑ Describe how each unit of angle measure below is related to the other two units.

- Revolutions
- Radians
- Degrees

[그림 Ⅲ-3] 미국 교과서에 도입된 회전(rev)
(McGraw-Hill, 2002:423)

마. 회전(revolution, rev)

원 위를 따라 한 바퀴 도는 것을 1회전이라고 할 때, 회전도 각의 측도로 볼 수 있다. 곧, 1회전=2π라디안=360°이다. 우리나라에서는 회전을 각의 측도로 드러내어 다루지 않으나, 미국 교과서 『Contemporary Mathematics in Context』 에서는 도, 라디안과 함께 다룬다([그림 Ⅲ-3]).

직각, 도, 그레이드, 밀, 회전 중에서 가장 큰 단위가 회전이다. 회전을 단위로 하면 0도와 360도 사이의 모든 각은 분수나 소수로 표현된다. 그러므로 회전이 일반적으로 일상생활에서 더 유용하지는 않다. 회전은 세기(counting)라는 성격이 강하며, 이 단위가 나타내는 바는 각 자체의 크기나 변화보다는 빈도적인 측면이 강하다.[10)]

회전은 원주 위를 운동하는 물체의 운동량이나 운동 속도를 생각할 때 유용하다. 회전이 사용되는 대표적인 예가 RPM(revolution per minute)이다. 이것은 회전체의 분당 회전수를 가리키는 단위로, 자동차의 엔진 회전수, 또는 컴퓨터의 하드디스크 속도를 나타낼 때 사용된다. 골프나 야구에서도 일정한 속도로 회전하면서 날아가는 공이 1분당 몇 번 회전하는가를 나타내고자 할 경우, RPM을 단위로 쓴다.

이상과 같은 여러 가지 각의 측도에 대한 고찰에서, 호나 현, 곧 원 또는 원과 관련된 길이를 이용하여 각의 크기를 기술한다는 아이디어가 라디안만의 것이 아니라는 점에 주목할 필요가 있다. 현재 학교수학에서 도(°)는 정적인 원의 중심각에 주목하여 도입되지만, 역사적으로 도는 천체의 운동과 관련하여 원주를 등분하고 그것을 이용하여 각도를 나타낸다는 아이디어를 바탕으로 만들어졌다. 그러므로 도에도 호도법의 아이디어가 들어 있는 것이다. 또한 밀(mil)에는 원의 현의 길이를 이용하여 각도를 나타내려는 아이디어가 들어 있다. 즉, 호나 현과 같이 원 또는 원과 관련된 길이에 주목하고 그것을 이용하여 각도를 나타내려는 생각, 호도법의 아이디어는 라디안만의 것이 아니며 역사적으로 정적으로 원의 중심각을 이용하여 각도를 나타내려는 생각보다 먼저 출현하였다. 그러므로 라디안만이 원과 관련된 길이를 이용하여 각도를 나타내려는 아이디어를 담고 있다고 생각하여 라디안과 호도법을 동일시하는 것은 이상의 고찰에 비추어볼 때 타당하지 않다.

2. 각의 측도로서 라디안의 특성

측정은 어떤 물체의 내적 성질의 크기를 결정하는 것이다. 이 크기를 발견하기 위해서 먼저 특성의 표본을 선택하고 그것을 단위로 정한다. 단위의 선택은 다소 임의적인 것으로 보

---

10) 물리학 사전 "ABC der Physik (Leipzig, 1973, 재인용, Dzhakov, 1976)"에서는 '회전'을 '회전의 빈도수를 나타내는 세기 단위'로 정의하고 있다.

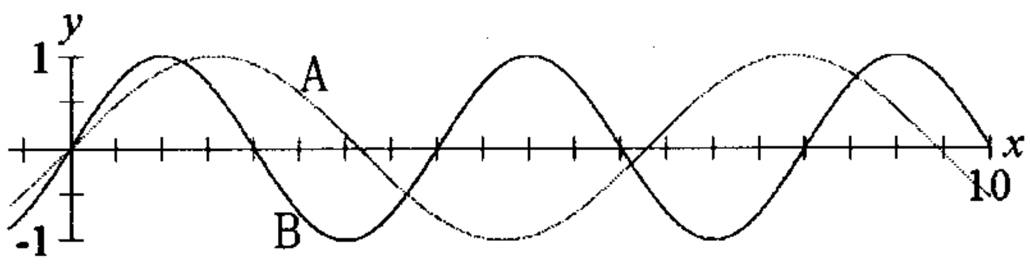
통 편리성을 고려하여 결정된다. 측정의 과정은 얼마나 많은 단위가 측정 대상 안에 들어 있는지 알아내는 것으로 구성된다(Dingle, 1950). 그런데 실제적인 측정 활동이라는 면에서 볼 때 라디안은 좋은 단위가 아니다. 1라디안은 평각(π라디안)의 크기의 $1/\pi$로서 평각과 통약불가능하다. 또한 반지름의 길이와 같은 호의 길이가 라디안의 정의에 등장하는데, 어떤 호의 길이가 반지름의 길이와 같은지를 측정을 통해 확인하는 것은 불가능하다(Dixon, 1898; Bennett, 1925). 한 직선의 길이를 단위 길이로 하였을 때, 다른 직선의 길이는 '겹쳐 놓기' 활동에 의해, 곧 단위 길이 또는 그 단위 길이를 세분한 하위 단위를 몇 번 겹쳐 놓을 수 있는가를 알아봄으로써 측정할 수 있다. 그러나 이와 같은 겹쳐 놓기 활동으로 곡선의 길이를 측정할 수는 없다. 직선을 구부리지 않고는 곡선과 겹쳐 놓을 수 없는데, 이때 구부림이 길이를 변화시키지 않는다는 것을 보장할 수 없다.

라디안은 각의 벌어진 정도를 측정하는 데에 실제적으로 유용한 단위는 아니지만, 각 개념의 관계적 측면, 곧 각과 반지름의 길이, 호의 길이의 관계를 잘 나타낸다는 점에서 이론적으로 유용하다. 각의 측도로서 라디안의 장점을 삼각함수의 그래프와 관련하여 생각해 볼 수 있다. 예를 들어, 사인함수의 그래프를 그릴 때 도를 각도의 단위로 사용하고 x축과 y축의 단위 길이를 동일하게 잡으면, 사인함수의 그래프는 거의 직선에 가까운 밋밋한 모양이 되어 버린다([그림 Ⅲ-4]).[11)]

라디안은 도에 비하여 단위가 나타내는 각의 크기가 크기 때문에 x축의 방향으로 그래프를 축소하는 효과가 있어 삼각함수의 그래프의 굴곡을 드러내는 데 도보다 유리하다. 그러나 이것도 다음 교사의 견해와 같이 보기에 따라서는 충분하지 않은 것으로 보일 수 있다.

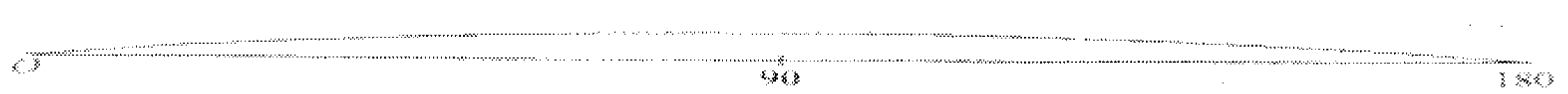
> 그래프를 그릴 때... 이쪽으로는 6.28까지 가고 위쪽으로는 1만 가기 때문에 그렇게 그리면 사인 그래프가 너무 밋밋해집니다. 그래서 교과서에 그린 것도 sin$x$를 볼륨 있게 그리기 위해서 척도를 무시하고 그린 것이 많습니다. 척도에 맞게 그리면 그래프가 그래프 같지 않고 밋밋하니까요. (교사 B)

직각도 라디안과 마찬가지로 이와 같은 장점을 지니고 있으며, 그래프를 덜 밋밋하게 그리는 데는 라디안([그림 Ⅲ-5], A)보다 직각을 단위로 하는 것([그림 Ⅲ-5], B)이 더 좋다.



[그림 Ⅲ-5] 라디안과 직각을 단위로 하는 사인함수의 그래프

둘째, 각의 측도로서 라디안이 다른 측도에 비해 지니는 본질적인 장점은 수학적 공식을 간단하게 만들어 준다는 것이다. 도를 각의 크기의 단위로 사용하면 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $\theta°$인 부채꼴의 호의 길이 l과



[그림 Ⅲ-4] 도를 정의역으로 한 사인함수의 그래프(Toeplitz, 2006:178)

11) 실제로는 [그림 Ⅲ-4]보다도 훨씬 밋밋하여 거의 직선에 가깝게 나타난다.

넓이 S가 다음과 같다.

$$l=2\pi r\times\frac{\theta}{360},\quad S=\pi r^2\times\frac{\theta}{360}$$

그러나 라디안을 이용하면 이들 식에서 '$\frac{\pi}{180}$'를 없앨 수 있기 때문에 l과 S을 구하는 공식이 상대적으로 간단하게 표현된다.

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

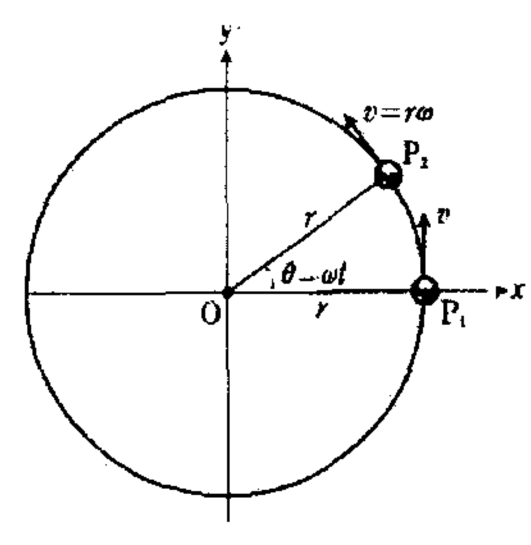
그러나 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 라디안의 이러한 장점을 충분히 나타내지 못한다. 이 장점은 삼각함수의 미분에서 더 뚜렷하게 드러난다. x가 라디안이면, $f(x)=\sin x$를 미분하면 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$로부터 $f'(x)=\cos x$ 가 된다. 그러나 x가 도이면 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\frac{\pi}{180}$ 으로부터[12] $f'(x)=\frac{\pi}{180}\cos x$가 된다.[13] 각의 크기의 단위로도 대신 라디안을 사용하게 되면 $\frac{\pi}{180}$를 쓰지 않아도 되며, 테일러 전개도 다음과 같이 간단해진다.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

라디안 대신 도나 직각을 단위로 사용하면 이와 같은 간결한 공식들을 얻지 못한다. 직각을 단위로 하면 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\frac{\pi}{2}$가 되어 이후의 공식들에 $\frac{\pi}{2}$가 따라다니게 된다. Toeplitz는 이와 같은 라디안의 장점을 자연로그의 밑 e의 장점과 비교하여 다음과 같이 말하였다.

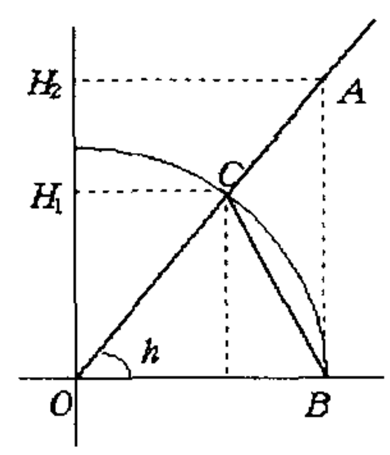
로그와 관련해서도 이와 유사한 상황에 처했던 적이 있다. 수치계산의 목적으로 보면 밑 10은 그 자체로 추천할 만하다. 그러나 y'은 간단히 $1/x$가 아니라 c/x가 되고 불편하게도 c가 모든 공식에 붙어 다니게 된다(Toeplitz, 2006:178).

셋째로, 라디안은 물리적 실제와 잘 어울리는 각도이기도 하다. 예를 들어, 반지름이 r인 원 위를 등속원운동 하는 물체의 접선 속도 $v_t=\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega$이다. 여기서 s는 경로를 따라가는 거리이고, θ는 그 점이 t초 동안 회전한 각을 나타내며, ω는 각속도이다. 반지름의 길이가 4m인 원 위를 각속도 $\omega=2rad/s$로 등속원운동 하는 물체의 접선속도는 $v=8m/s$이다. 이 때 단위 m/s 앞에 있는 수치 8은 θ를 라디안으로 하여 계산하였을 때 $v=4m\times 2rad/s=8m\cdot rad/s$의 단위 $m\cdot rad/s$ 앞에 있는 수치와 같다. 라디안이 아닌 다른 각의 단위를 써서 θ와 ω를 나타내고 $v=r\omega$에 의해 v를 계산하면 그 때 단위 앞의 수치는 8이 아닌 다른 수치로 바뀐다.



[그림 Ⅲ-7] 등속원운동 (이춘우 외, 2002: 58)

12) 오른쪽 그림에서 $\triangle OBC\le$부채꼴 $OBC\le\triangle OBA$ 이므로 $\frac{H_1}{2}\le\frac{\text{호 }BC\text{의 길이}}{2}\le\frac{H_2}{2}$ 이다. 이때 h가 라디안이면 호 BC 의 길이도 h 이지만, h가 도이면 호의 길이는 $\frac{\pi}{180}h$가 된다. 그러면 $\frac{H_1}{2}\le\frac{\frac{\pi}{180}h}{2}\le\frac{H_2}{2}$ 이고, $\frac{\pi}{180}\ge\frac{\sin h}{h}\ge\frac{\pi}{180}\cos h$ 이므로, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\frac{\pi}{180}$ 이다.



[그림 Ⅲ-6] 삼각형과 부채꼴의 넓이

13) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$

Ⅳ. 동질량의 비로서 라디안의 특성

이 장에서는 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 길이의 비라는 정의에서 생겨나는 라디안의 순수한 수, 곧 단위가 없다는 특성을 수학적 측면과 물리학적 측면으로 나누어 알아본다.

1. 수학적 측면

학교수학의 관점에서 길이와 길이의 '비'로 정의되는 라디안이 '수'로서 지니는 특성에는 다음 네 가지가 있다. 이와 같은 특성은 라디안이 지니고 있는 장점이기도 하다.

첫째, 라디안에서는 $\sin x$와 x가 모두 길이의 비[14](또는 길이)이므로 동질량이다. 즉 삼각함수 $y=\sin x$의 정의역과 치역이 동질량이 된다.

> 호도법을 써야만 삼각함수의 그래프를 그렸을 때, 정의역과 치역이 같은 스케일이 됩니다. 정의역은 뭐냐면 (단위)원 위에서 이만큼 간 길이이고, $\sin x$나 $\cos x$는 그 점에서 y축과 x축에 수선을 내렸을 때 (그 수선의) 길이거든요. (수학전공 교수E)

정의역과 치역이 동질량임을 이용하면 [그림 Ⅳ-1]과 같이 단위원상에서 x축 위의 점 (1,0)에서 시작하여 원주를 따라 점이 움직일 때, 호의 길이를 x축에, 높이를 y축에 표시함으로 사인함수의 그래프를 그릴 수 있다. 이 때 그려지는 그래프는 호의 길이(x의 변화)와 높이(y의 변화)[15] 사이의 관계를 뚜렷이 나타내준다.

둘째, 삼각함수의 합성이 설명 가능해진다. 현재 교육과정에서 삼각함수의 합성은 심화과정인 '미분과 적분'에서, 10단계에서 다룬 두 함수의 합성과 삼각함수의 정의 및 그래프를 바탕으로, 삼각함수의 극한을 배운 후 다음과 같이 다룬다([그림 Ⅳ-2], [그림 Ⅳ-3]).

다음 극한값을 구하여라.

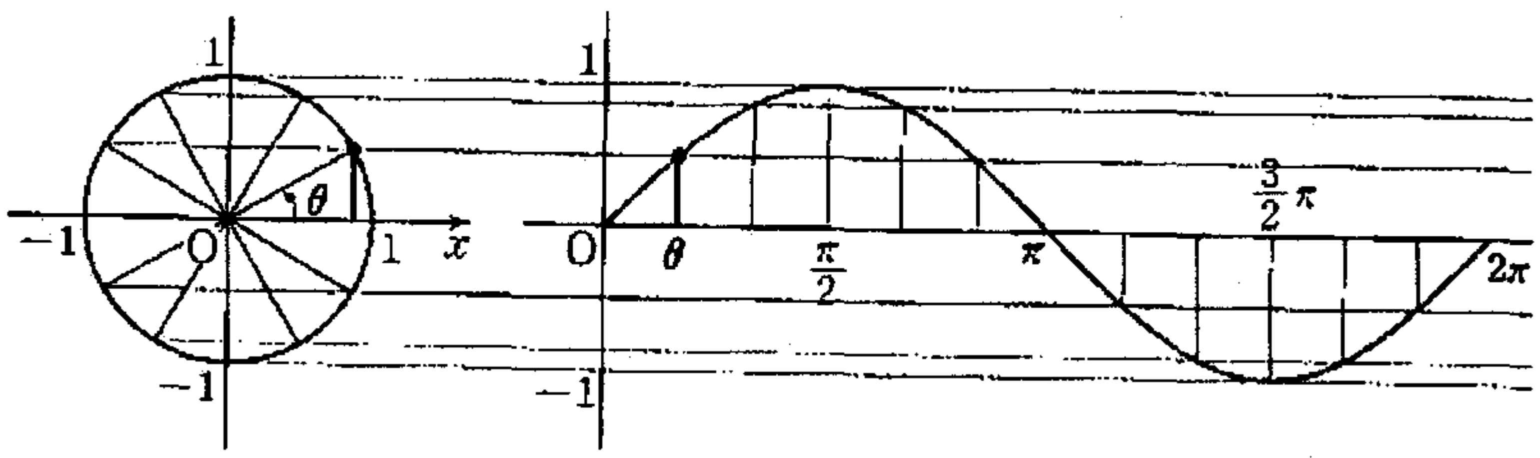
(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$	(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{2x}$
(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}$	(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

[그림 Ⅳ-2] 삼각함수의 합성(박규홍 외, 2002: 43)

다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\cot(\sin x)$	(2) $y=\sec(\mathrm{cosec}\, x)$

[그림 Ⅳ-3] 삼각함수의 합성(박규홍 외, 2002: 76)



[그림 Ⅳ-1] 단위원을 이용하여 그린 사인함수의 그래프

---

14) 1사분면에서 라디안으로 정의되는 x는 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 길이의 비이고, $\sin x$는 부채꼴의 호의 끝에서 x축에 수선을 내렸을 때, 그 수선의 길이와 반지름의 길이의 비이다. 단위원에서는 반지름의 길이가 1이므로 x 값은 호의 길이와, $\sin x$의 값은 수선의 길이(또는 높이)와 같게 된다. (2, 3, 4분면으로 확장되면 부호를 생각하여야 하므로, 이 해석은 1사분면에 대해서 잘 성립하는 해석이다.)

15) 선분의 '길이'에 부호를 붙인 값이다.

x가 라디안이 아닌 도로 정의되면 x와 $\sin x$는 이질량이 된다. x는 각의 벌어진 정도인 반면, $\sin x$는 선분의 길이의 비[16]이다. 그 결과 합성함수, 이를테면 $y=\sin(\sin x)$를 해석하는데 어려움이 생긴다. 예를 들어, 같은 각일지라도 $x=\frac{\pi}{6}$(rad)일 때 $\frac{\pi}{6}$는 실수이므로 $\sin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{1}{2}=0.4794\cdots$ 이지만, $x=30^\circ$ 일 때 $\sin(\sin 30^\circ)=\sin\frac{1}{2}$이고 이때 $\frac{1}{2}$은 도(°)가 아니므로 정의역을 벗어난다. 혹 나온 수에만 주목하여, $\frac{1}{2}$을 도로 해석하는 학생이 있다 하여도 $\sin\frac{1}{2}^\circ=0.0087\cdots$ 이므로 값이 달라진다. 이와 같이 정의역이 라디안으로 정의될 때에만 정의역과 공역이 동질의 것이 되어 삼각함수의 합성이 가능하다.

셋째, θ가 라디안으로 정의되면 $\sin\theta$=(현의 길이)/(반지름의 길이) 이고, θ=(호의 길이)/(반지름의 길이) 이므로, θ의 값이 작을 때 $\sin\theta\approx\theta$ 는 θ가 작아짐에 따라 부채꼴의 현의 길이와 호의 길이가 점점 같아짐을 의미한다는 해석이 가능하다. θ가 다른 측도 단위일 때에는 이와 같은 해석이 어렵다. 예컨대, θ가 도라면, $\sin\theta$는 길이의 비로서 단위가 제거될 수 있는 수이지만, θ는 각의 크기라는 양적 개념이 함의되어 있는 수, 곧 도(°)의 단위가 붙은 수이다. 그러므로 $\sin\theta$와 θ의 직접적인 비교가 불가능하다.

넷째, 라디안은 도, 그레이드와 달리 우연성이나 문화적인 상대성에 기초하지 않은, 보다 수학적인 각의 측도이다. 원주를 360등분하여 1°를 정하는 것은 아래의 교사C가 지적하듯이, 공전주기에 기초한 임의적인 성격을 지니고 있다.

예를 들어서 메소포타미아 문명에서는 일 년을 360일로 봤기 때문에, 하루에 돈 각이 1도가 된 것이지요. 만약에 그것이 180등분이었다면, 우리가 생각하는 2도가 1도가 되는 것입니다. 이것은 상대적인 값, 절대적이지 않은 비교 값이기 때문이지요.(교사C)

육십분법의 기원에 대한 또 다른 설인, 반지름의 길이와 현의 길이가 같은 호의 중심각을 육십진법 체계의 기본 단위인 60으로 보았다는 것도 마찬가지로 문화적 산물이다. 당시 육십진법이 아닌 십진법을 사용하였다면 이를 10이나 100으로 보았을 수 있고, 그러면 원의 중심각은 360도가 아닌 60도나 600도가 되었을 것이다.

이에 비해 호의 길이와 반지름의 길이의 비라는 '수' 로서의 라디안은 상황과 문화에 의존하지 않는, 원주율이라는 원의 본질적 성질에 기초한 것이다. 또, 곡선으로서 호의 길이는 직선 단위 길이를 포개 놓는 것으로는 측정 불가능하고 원주율 π라는 초월수와 관련되는 보다 추상적인 수학적 개념임을 고려할 때, 라디안이 가지는 '비'의 측면은 '각의 크기'라는 측면보다 더 추상적인 수학적 특성을 반영한다.

2. 물리학적 측면

라디안은 물리학에서 선호하는 국제 통일 단위계 SI(Système International d'Unités)에서 각의 표준 단위이다. 그러나 물리학, 특히 역학 식의 계산에서 라디안은 골치 아픈 단위이다. 라디안이 도입되는 식 중에는 라디안 단위가 사라지는 식도 있고, 살아남는 식도 있기 때문이다. 물리학이나 공학의 식의 계산에서는 단위를 맞추는 것이 매우 중요한데(Oberhofer, 1992), 이

16) 또는 그것에 부호를 붙인 것

와 같이 남기도 하고 사라지기도 하는 라디안은 사용자를 난감하게 만드는 단위가 아닐 수 없다(French, 1992).

물리학에서 라디안이 사용되는 한 예인 원의 회전 운동 방정식 $v = \omega R$ 에서 각속도 ω의 단위는 'rad/s' 이다. 예컨대 원의 회전 속도가 2 rad/s 라 하자. 각의 단위를 도로 바꾸면 이것은 $\frac{360}{\pi}$ deg/s이 되어 수치가 달라진다. 이와 같이 각속도(rad/s)나 각 가속도(rad/s2)에서는 각의 단위가 필요하므로 라디안을 생략할 수 없다. 그런데 위 식에서 R은 반지름의 길이이므로 그 단위는 m이다. 그러면 계산으로 얻은 v의 단위는 'm · rad/s'이어야 하는데, 실제 접선 속도 v의 단위는 m/s 이다. 즉 식의 계산 과정에서 'rad'이 사라져 버린다.

여기서 'rad'이 사라지는 데에는 이유가 있다. 이 식에서 v는 원 위의 한 점에서의 접선 속도를 의미하는데, 'rad'이 사라지지 않으면, 접선 속도의 수치가 각의 측도에 따라 달라진다. 즉, 6.28m · rad/s가 360m · deg/s가 된다. 이것은 수치가 거의 60배나 커지는 것으로, 이후의 적용에 있어서 매우 곤란한 문제를 야기한다(AAPT, 1993). 이런 이유로, 접선 속도에서는 단위에 라디안이 있으면 안 되고, 다른 직선 속도(linear speeds)와 마찬가지로 m/s를 단위로 가져야 한다. 이와 같은 이유로 라디안은 토크, 탄성 모멘트, 각 운동량 등에서는 최종 단위에 나타나지 않는다.

이와 같은 라디안 단위의 출현과 사라짐은 물리 교사들과 학생들을 괴롭히는 문제였다(AAPT, 1993; French, 1992; Oberhofer, 1992). 이 문제를 해결하기 위하여, 다른 물리량의 단위를 변화시킬 것이 제안되기도 하였지만 그것은 또 다른 문제를 야기한다는 이유로 거부되었다(French, 1992).[17]

미국물리교사연합회(AAPT,[18] 1993)의 계량 위원회에서는 1993년 이 문제에 대하여 다음과 같은 입장을 표명하였다. 라디안이 야기하는 혼란의 근원은 이 단위가 가지고 있는 양면성, 즉 각의 측도라는 측면과 호의 길이와 반지름의 길이의 비라는 측면 때문이다. '비'로서의 라디안은 단위가 같은 길이 단위의 비(예. m/m)이다. 각의 측도로서의 라디안은 크기를 가지지만, '비'로서의 라디안은 차원이 없는(dimensionless)[19] 단위이다. 어떤 수 뒤에 m/s라는 단위가 붙어 있으면 이 양이 속도나 속력임을 알 수 있지만, m/m라는 단위가 붙어 있으면 이 양이 어떤 양인지 그 자체로는 알 수가 없다. 각이 들어 있는 양이라는 사실을 알려면 무엇인가 다른 표시가 필요하고, 그 때문에 '라디안'을 붙여줄 뿐이다. '라디안' 단위는 각이 그 곳에 있음을 기억하게 해 주는 역할을 할 뿐이다. 따라서 각을 반드시 고려하여야 하는 물리 양[20]에는 라디안이 표시되어야 하지만, 각의 크기를 고려하지 않아도 좋은 경우에는 라디안 단위를 생략해도 좋다. 라디안 단위를 붙여야 하는지 여부를 판단하는 준거는 "양의 수

---

17) Oberhofer(1992)는 각속도에서 'rad'이 생략되는 것을 설명하기 위해 예컨대 반지름의 길이 R의 단위를 m/rad 으로 하는 등, 여러 물리량의 단위에 'rad'을 붙일 것을 제안하였다. 그러나 이것은 각과 관계없는 양에 각의 단위를 붙이는 것으로, 더 많은 혼란을 야기한다는 이유로 거부되었다.

18) American Association of Physics Teachers

19) 차원(a base dimension)은 동치류의 해당 집합으로 정의된다. 예를 들어 길이의 차원은 양 '-의 길이'라는 영역에서 물체의 같은 길이를 갖는 동치류의 집합이다. 기본 차원은 무게, 길이, 시간, 넓이, 부피, 속도, 중력 등이며, 각은 차원이 없는 것으로 간주된다(Kyburg Jr., 1997).

20) 이러한 물리량에는 다음 네 가지가 있다: 각 자체, 각속도 ($\omega = d\theta/dt$, rad/s), 각가속도 ($a = d^2\theta/dt^2$, rad/s^2), 토크 상수 K (토크는 물체에 작용하여 물체를 회전시키는 원인이 되는 물리량으로, 토크 상수는 단위 양의 각으로 틀어진 어떤 탄성 물체에 작용되는 토크가 어떤 것인지 설명한다(AAPT, 1993)).

치적 값이 라디안 대신 다른 각의 단위가 들어오면 변하는가?"이다. 궁극적으로 미국물리교사연합회가 제안하는 원칙은 다음과 같다. 각의 양적 측도가 필수 정보를 제공할 때에는 제시되어야 한다. 그러나 결과 양이 각의 측도 자체와 무관하다면, 결과에서 라디안은 감추어져야 한다. 식의 계산은 어떤 요소든 SI 단위체계를 맞추어 주고 자유롭게 계산하여 최종적으로 얻어진 결과에 다시 SI 단위체계를 붙여주면 된다.

확인하기3>> p. 65 지구의 각속도 ω는

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400\,\mathrm{s}} \fallingdotseq 7.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}.$$ **따라서 원심력** $$F' = mr\omega^2 = 1 \times 6.4 \times 10^6 \times (7.3 \times 10^{-5})^2 = 3.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

[그림 Ⅳ-4] 원심력과 라디안(이춘우 외, 2002: 351)

[그림 Ⅳ-4]에서 볼 수 있듯이 우리나라 물리 교과서에서도 이 방법을 택하고 있다. [그림 Ⅳ-4]에서, 각속도에는 분명히 'rad'이 들어가 있다. 그러면, 원심력은 $F' = mr\omega^2$ 이므로 마지막에 rad^2이 들어가야 하는데, 계산 과정에는 단위가 모두 생략되고, 마지막에 힘의 SI 단위인 'N'을 붙이고 있다.

Ⅴ. 라디안 학습 지도에 대한 제언

이 장에서는 앞의 분석을 바탕으로, 라디안의 학습 지도에 대한 세 가지 제언을 하고자 한다.

첫째로, 라디안이라는 새로운 각의 측도를 도입하기 전에, 학생들로 하여금 각의 크기를 다른 관점에서 생각해 보는 (구성해 보는) 경험을 하게 할 필요가 있다. 다음 두 교사의 견해는 공통적으로 학생들이 라디안을 학습하는데 겪는 어려움이 이전에 학습한 도를 지나치게 당연한 것으로 받아들이는 폐쇄적인 태도에 있음을 지적하고 있다.

> 아이들이 지금까지 아주 편했던, 삼십도, 육십도 이런 것을 본능적으로 받아들여 써 오다가 갑자기 호도법이 나오는데, 아이들 입장에서는 그 필요를 알기가 어렵고, … 라디안을 배울 준비, 받아들일 자세가 안 되어 있는 거지요. (교사 B)

> 육십분법의 개념이 초등학교 4학년 때부터 오래 동안 굳어져 와서, 호도법 개념을 학생들이 새로 받아들이는 데 상당한 어려움을 느끼게 됩니다. 어릴 때부터 육십분법을 모국어처럼 배우다가 고등학교 와서 외국어를 배우면 어려운 것처럼 호도법을 이해하기 어려워하는 것이지요. … 호도법을 호도법 자체로 이해해야 하는데, 항상 육십분법하고 비교를 하고, 육십분법 개념 내에서 호도법을 이해하려고 하니까, 전혀 정의나 시스템이 다른 건데, 그걸 이해할 수가 없지요. (교사 C)

각도를 측정하는 방법을 스스로 생각해 보는 경험은 이와 같은 태도를 개방적으로 바꾸는데 일조할 수 있다. 각도 체계는 인간이 구체적인 맥락, 문제 상황 속에서 생각의 결과로 만들어진 것이다. 직각은 유클리드 기하학의 맥락에서 사고한 결과로 이루어진 것이며, 밀은 포병대와 같이 더 세분화된 측정 단위가 필요한 상황과 관련 있다. 그레이드는 각도의 단위를 십진법화해 보려는 사고의 결과로 만들어진 단위이며, 도는 행성의 운동과 같은 현상을 기술하려는 시도 속에서 만들어진 것이다. 이와 같이 각도 체계는 구체적인 맥락 속에서 인간이 사고를 통해 구성해 낸 구성물이다.

각도 체계라는 수학적 지식을 절대적인 것이 아닌 인간의 구성물로 인식하게 하게 하기 위

해서는 기존의 각도 체계를 일방적으로 제시, 강요하기보다 학생들 스스로 각도를 측정하는 방법을 생각해 보도록 하여야 한다. 이를테면 고 1 학생들에게 라디안을 학습하기에 앞서 '도 이외의 새로운 각도 체계를 만들어 보는 탐구 활동'을 하게 하는 것은 도를 각도를 재는 유일한 체계로 받아들이던 고정 관념에서 벗어나는 기회를 준다. 학생들로 하여금 왜 한 바퀴를 360도로 했을까, 왜 직각의 90분의 1을 1도로 삼았을까 생각해보게 하면서 직각의 100분의 1을 단위로 하는 그레이드를 소개하고, 도보다 더 세분화된 단위가 필요한 문제 상황을 제공하면서 밀(mil)을 소개하고, 직각을 왜 1600등분 했을지 생각해 보게 하는 것, 또 다음 수학 교수의 견해와 같이 직각의 크기를 어떻게 나타낼 것인가를 탐구하게 하는 것은 각의 측도에 대한 폐쇄적인 생각에서 탈피하게 하는 의미 있는 활동이다.

> 고등학생들이 1도에만 젖어 있으니까 다른 기준이 힘든 겁니다. 그래서 그 중간 단계로 $\angle R$이라는 것이 있었으면 도움이 되지 않을까 싶어요. 같은 각을 표현할 때도, 구십도를 기준으로 해서 그것의 몇 배인가 표현하는 방법도 보고, 과연 무엇을 기준으로 할 것인가를 생각해 보게 하는 거지요. … 이 각($\angle R$)의 크기를 뭐라고 보고 싶으냐, 1 뭐, 90 뭐, 100 뭐, $\pi/2$라 부를 것이냐, 이것을 뭐라고 부를 것이냐에 따라 나머지 각은 다 나오는 것인데, … 그러한 기준을 정하는 활동을 하게 하면 좋을 것 같습니다. (수학 교수 D)

이와 같이 각도를 측정하는 방법을 스스로 고민하고 만들어보는 경험을 통해 학생들은 수학은 인간의 사고의 산물이라는 것을 인식하는 기회를 얻을 수 있다. 학생들이 이 과정에서 라디안을 단위로 삼아야 한다는 생각에까지 이르지 못한다 하더라도, 도가 유일한 각도 체계라는 고정 관념에서 벗어나 학습할 새로운 각도 체계인 라디안에 대해서 열린 마음을 가질 수 있을 것이다.

둘째, 각의 측도로서 라디안의 장점을 인식하게 해야 한다. 앞에서 보았듯이 각의 측도로서 라디안은 수학적으로 삼각함수의 그래프를 알아보기 좋게 그리고, 수학적인 공식을 간단하게 만든다. 이와 같은 장점을 라디안 도입 이후의 학습 과정에서 반복해서 인식하게 하는 것이 중요하다. 수학적 지식의 좋음을 인식하는 것은 어느 한 순간에 한 번의 경험으로 완성되지 않으므로 기회가 있을 때마다 그 지식이 지닌 좋은 점을 의식하게 하여야 한다. 라디안이 지니고 있는 좋은 점에 대한 의식적인 반성이 반복됨에 따라서, 학생들이 라디안의 의미나 유용성을 이해하게 될 가능성도 높아질 것이다.

라디안의 장점은 "라디안이 아닌 다른 단위를 사용하면 어떻게 될 것인가"를 생각해 보는 과정에서 부각된다. 이를테면 고 1에서 중심각의 크기가 x(rad)일 때, l과 S을 구하는 공식을 학습한 후, 도를 이용한 공식과 비교하는 활동을 통해 라디안을 이용한 공식이 상대적으로 간단한 것을 의식하게 할 수 있다. 또 삼각함수의 그래프를 그릴 때에 도를 단위로 해서 그리는 것과 라디안이나 직각을 단위로 하여 그리는 것을 비교하여 x축과 y축에 동일 간격의 척도를 유지하려고 한다면 라디안이나 직각이 도보다 그래프를 알아보기 쉽게 그리는데 훨씬 좋다는 것을 느끼게 할 수 있다. 삼각함수의 미분에서, 또는 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$의 값을 구하는 데 있어서 h가 도일 때, 직각일 때, 라디안일 때 각각 구하고 비교하게 함으로써, 수학이 추구하는 간결성과 심미성을 음미할 기회를 제공할 수 있을 것이다.

다음 수학교육전공 교수의 견해와 같이 도가

공전주기에 바탕을 두고 있는 것과 대비하여 라디안은 원주율이라는 수학적인 성질에 바탕을 두고 있다는 것을 학생들이 의식하게 하는 것도 이와 같은 맥락에서 고려할 수 있다.

> 도(°)는 문화적이고 다소 임의적인 산물인 것 같아요. 인류가 다른 행성에 살았다면 다른 각도를 만들었을지도 모르지요. 라디안은 수학적인 느낌이 더 강한 것 같아요. 공전주기는 행성마다 달라도 원주율 그 자체는 행성에 따라 달라지는 것이 아니니까요. 비유로 말한다면, 도가 지구상에서 통용되는 것이라면 라디안은 전 우주에서 통용될 수 있는 성질의 것이라고 말하고 싶네요. 학생들이 문화적이고 다소 우연적인 도만 배우는데서 그치지 않고 라디안을 배우면서 좀 더 수학적인 각도가 있다는 것을 아는 것은 여러 면에서 의미가 있다고 생각해요. (수학교육전공 교수 F)

도와 라디안은 원의 호를 이용하여 각도를 나타내려는 사고방식을 담고 있다는 점에서는 공통적이다. 그러나 기본 단위를 설정함에 있어서 도는 지구의 공전 주기에 의지하는 반면 라디안은 원의 본질적 성질인 원주율에 의지한다. 이와 같은 차이점을 수학적 지식의 성격과 관련하여 학생들이 음미하도록 하는 것은 교육적으로 의미가 있을 것이다.

셋째, 각의 측도로서 라디안이 갖는 '비', 또는 단위를 떼어버릴 수 있는 '수' 라는 특성을 관련 수학 내용을 배울 때 반성적으로 인식하게 하고, 나아가 이것이 물리적으로 유용하다는 것을 알게 할 필요가 있다. 라디안이 단위를 떼어낼 수 있는 수라는 것은 다음 교사A가 지적하듯이 아이들이 받아들이기 쉽지 않은 어려운 개념이다.

> 아이들은 수가 각의 크기를 나타낸다는 것을 받아들이는 데 굉장히 어려움을 겪지요. … 그동안 십 몇 년 동안 수는 수고, 각은 각으로 배워왔기 때문에, 각의 크기를 수로 나타낼 수 있다는 것을 그냥 외울 수는 있어도 체화되지는 않는다고 할까, 내면 깊숙이 인정을 못하는 거죠. (교사A)

라디안이 가지는 '수'라는 특성의 의의나 필요성을 고등학교 1학년, 라디안이 처음 도입되는 단계에서 충분히 드러내기는 어렵다. 그동안 학교수학에서 다룬 길이, 넓이, 부피 등의 측정은 모두 동질량의 단위가 있고 이것과의 비로 나타낸 것이기 때문에, 학생들은 라디안과 같이 '각'의 크기를 '길이'라는 이질량의 비로 나타내는 것을 이해하기 어려워한다. 그러나 바로 이 단위를 떼어버릴 수 있는 '비'라는 특성 때문에 라디안은 수학과 물리학에서 유용하게 사용되므로, 라디안의 이 특성은 점차 드러나도록 할 필요가 있다.

라디안을 정의역으로 하는 삼각함수의 그래프를 그리는 활동은 '수'로서 라디안이 갖는 특성을 인식할 수 있는 기회를 제공한다. 단위원을 이용하여 그래프를 그릴 때 정의역을 라디안으로 하면 어떤 편리함이 있는지, 동경의 움직임에 따라 호의 길이와 높이의 변화가 어떻게 관련되는지 탐구하게 함으로써, x를 라디안으로 할 때 호의 길이와 높이의 관련이 뚜렷이 나타난다는 것을 느낄 수 있을 것이다.

삼각함수의 합성도 라디안의 좋은 점을 인식하게 할 수 있는 기회가 된다. 학생들로 하여금 정의역의 x를 라디안으로 하는 것을 당연하게 수용하는 것이 아니라 x가 라디안이 아닌 다른 측도일 경우에 어떻게 달라지는지 생각해 보게 함으로써 라디안이 지닌 좋은 점을 반성하고 음미하도록 할 수 있다. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{x}$ 와 같은 문제를 다룰 때 x의 정의역에 대하여 생각해 보게 하거나, x가 라디안이 아닌 도일 때 삼각함수의 합성이 가능한가에 대하여 생각해 보게

하는 것은 '수'로서 라디안이 지닌 특성을 인식하게 할 것이다.

또한, 자연계 학생들에게는 물리와 연계한 학습 활동을 통해 '비'로서 라디안이 갖는 특성과 장점을 인식하게 할 수 있다. [그림 V-2]와 같이 물리II에서 원운동을 다루는 방식을 제시하고, 각속도를 계산할 때 계산식에는 'rad' 단위가 들어가 있지만 결과에는 들어가 있지 않는 이유에 대하여 생각하거나 토론해 보도록 할 수 있다. 이런 활동을 통해 학생들은 이와 같은 계산이 가능한 것은 라디안이 가진 '비'라는 특성 때문이며 라디안 이외의 다른 각의 측도를 사용하면 그와 같이 계산할 수 없다는 것을 깨달을 수 있을 것이다.[21]

고등학교 1학년

〈각의 측도 구성 활동〉
◈ 도 이외의 각의 측도를 스스로 만들어 본다.
◈ 각자 정한 측도의 장단점에 대하여 토론한다.

〈각의 측도로서의 라디안〉
◈ 다양한 각의 측도(직각, 육십분법, 그레이드, 밀, 회전 등)의 장단점을 비교한다.
◈ 각의 측정 단위로서의 라디안의 장단점을 고찰한다.

〈수로서의 라디안〉
단위원을 이용하여 삼각함수의 그래프를 그리며 x와 $\sin x$, $\cos x$가 동질량임을 확인한다.

심화 미적분

〈각의 측도로서의 라디안〉
$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ 및 삼각함수의 미분의 계산에서 다른 각의 측도와 비교하며 라디안의 장점을 고찰한다.

〈수로서의 라디안〉
삼각함수의 합성과 관련하여 '수'로서의 라디안의 특성을 고찰한다.

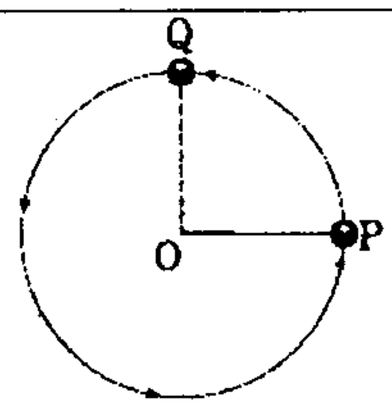
〈물리II와의 연계〉
'수'로서의 라디안의 장점을 각속도와 접선속도, 원심력 등을 구할 때의 단위 조정과 관련된 실례를 통하여 고찰한다.

[그림 V-1] 라디안의 특성의 이해를 돕는 활동

예제 **1.** 오른쪽 그림과 같이 길이가 50cm 되는 실의 한 끝에 작은 구가 매달려 2초 동안에 1회전하는 등속 원운동을 하고 있다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 구의 각속도는 얼마인가?

(2) 구의 속력은 얼마인가? 점 P에서의 속도의 방향을 그려 보자.



풀이 (1) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{2} = 3.14\,\mathrm{rad/s}$

(2) $v = r\omega = 0.50\,\mathrm{m}\times3.14\,\mathrm{rad/s} = 1.57\,\mathrm{m/s}$, 속도의 방향은 P점에서의 접선 방향이다.

[그림 V-2] 각속도와 라디안 (이춘우 외, 2002, p. 59)

21) 본 연구에서 인터뷰한 교사 A, B, C 모두는 라디안 개념을 고1의 공통과정에서 다루는 것에 대하여 재고할 필요가 있다는 의견을 개진하였다. 특히 수로서의 라디안의 유용성은 삼각함수의 미분에서 잘 드러나므로 그 단계에서 라디안을 도입하는 안을 대안으로 제안하였다. 라디안을 어느 학년에서 도입하는가는 좀 더 깊은 연구와 논의가 필요한 문제이다. 이 장에서 제시한 제안, 예를 들어 라디안을 도입하기 전 도 이외의 새로운 각도 체계를 만들어 보는 탐구 경험의 제공, 부채꼴의 호의 길이와 넓이 공식과 삼각함수의 그래프를 그리면서 라디안의 장점을 부분적으로 인식하게 하는 경험의 제공은 현재 교육과정에서 고1에서 이루어질 수 있다.

Ⅵ. 요약 및 결어

라디안은 '크기'와 '수'라는 측정의 본질적인 두 측면을 복합적으로 지니고 있으며, '양'과 '관계'라는 각의 개념이 동시에 들어 있는 각의 측도이다. '각의 크기' 측면에서 볼 때, 라디안은 다른 각의 측도에 비해 큰 실제적 유용성을 지니고 있지 않으나, 삼각함수의 그래프, 부채꼴의 호의 길이와 넓이, 삼각함수의 극한, 미분 등 여러 수학적인 이론의 전개를 간결하게 한다는 이론적 장점을 지니고 있다. 물리학의 국제 통일 단위계에서 사용하는 각의 측도도 라디안이다. 원주율에 기초한 라디안은 공전 주기에 기초한 도보다 더 본질적이고 절대적인 측도이다.

'수' 측면에서 볼 때, 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 비로 정의되는, 단위가 생략 가능한 수라는 라디안의 특성은 $y=\sin x$와 같은 삼각함수의 그래프에서 x축과 y축에 오는 양이 동질적인 것이 되게 한다. 또 삼각함수의 합성을 가능하게 하고, 삼각함수의 극한에 의미를 부여한다. 길이의 비로서 라디안은 차원이 없는 단위이기 때문에 계산식에서 필요한 경우 라디안 단위를 생략하는 것을 정당화하여 여러 계산상의 편리함을 가져온다.

학교수학에서 라디안을 다룰 때에는 이와 같은 라디안이 지니고 있는 특성과 장점을 학생들이 인식할 수 있도록 하는 학습 지도가 필요하다. 라디안을 도입하기 전에, 학생들로 하여금 각의 크기를 다른 관점에서 생각해 보는 경험을 하게 할 필요가 있다. 또한 각의 측도로서 라디안이 지니고 있는 좋은 점과 수로서 라디안이 지니고 있는 좋은 점을 라디안 도입 이후 관련된 내용이 나올 때마다 반복적으로 의식하게 하여야 한다. 본 연구를 바탕으로 실제적인 라디안의 학습 지도에 관한 실천적 경험적 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

강윤수 · 박수정(2003). 삼각함수에 관한 오류유형 분석과 그 지도방법. **한국학교수학회논문집, 6**(1), 101-113.

교육인적자원부(2004). **수학 3-가.** 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학 4-가.** 서울: 천재교육.

김연희 · 문승태 · 장선철(2003). **교육연구방법.** 서울: 동문사.

김은실(2007). **삼각함수 단원에 대한 인식조사 및 학습자료의 개발.** 교원대학교 대학원 석사학위논문.

김현웅(2001). **호도법과 주기함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구.** 교원대학교 대학원 석사학위논문.

라병채(2002). **고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태 분석.** 교원대학교 대학원 석사학위논문.

박규홍 · 임성근 · 양지청 · 김수영 · 남기수 · 양경식(2002). **고등학교 미분과 적분.** 서울: (주)교학사

박도순(1992). **교육연구방법론.** 서울: 문음사

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론.** 서울: 경문사.

이용숙(1998). 교육연구에서의 질적 자료의 분석 in 이용숙, 김영천 (편) **교육에서의 질적 연구: 방법과 적용**, 107-186. 서울: 교육과학사.

이종희(2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석, **학교수학, 3**(1), 25-44

이춘우 · 김영유 · 류지욱 · 김준태 · 송영곤 · 이영직(2002). **고등학교 물리II**. 서울: (주)중앙교육진흥연구소

임재훈 · 이대현 · 이양락 · 박순경 · 정영근(2004). **수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가**. 교육과정평가원 연구보고 RRC-2004-1-5.

장영수(2006). **삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도 방안에 관한 연구.** 교원대학교 대학원 석사학위논문.

The AAPT Metric Education and SI Practices Committe (G. J. Aubrecht II, A. P. French, M. Iona, D. W. Welch) (1993). The Radian - That Troublesome Unit. *The Physics Teacher*, 31, Feb., 84-87.

Bennett A. (1925). The Definition of Radian. *The American Mathematical Monthly,* 32(10), 509-510.

Boyer and Merzbach (2002). **수학의 역사.** (양영오, 조윤동 역). 경문수학산책 13, 서울: 경문사. (영어원작은 1968년 출판).

Burington R. S. (1941). The Mil as an Angular Unit and Its Importance to the Army. *The American Mathematical Monthly*, 48(3), 188-189.

Cajori F. (1958). *A History of Mathematics.* New York: The MacMillan Company

Cathorne A. R. (1912). The word "Radian." *The American Mathematical Monthly,* 19(10/11), 166.

Cell J. W. (1941). Solid Angles. *The American Mathematical Monthly,* 48(2), 136-138.

Cooper M. (1992). Who named the radian? *The Mathematical Gazette,* 76(475), 100-101.

Dingle H. (1950). A Theory of Measurement. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 1(1), 5-26.

Dixon A. C. (1898). On the Circular Measure of Angles. *The Mathematical Gazette,* 1(14), 188-189.

Dzhakov É. S. (1976). The Concept 'Revolution.' *Measurement Techniques,* 19(5), 777-779.

Euclid and Heath T. L. (1998). **기하학원론 (가권 해설서).** (이무현 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1956년 출판).

French A. P. (1992). What Happens to the "Radians?" *The Physics Teacher*, 30(May), 260-261.

Gandz S. (1929). The Origin of Angle-Geometry. *Isis, 12*(3), 452-481.

Kyburg Jr. H. E. (1997). Quantities, Magnitudes, and Numbers. *Philosophy of Science, 64*(3), 377-410.

Maor E. (1998). *Trigonometric Delights.* Princeton: Princeton University Press.

McGraw-Hill (2002). *Contemporary Mathematics in Context: A Unified Approach, Course 2 Part B.* Glencoe: McGraw-Hill.

Miller J. C. P. (1942). Review: The Decimal Subdivision of the Degree. *The Mathematical Gazette, 26*(272), 226-230.

Morikawa T. & Newbold. B. T. (2005). Teaching the Unit 'Radian' as a Physical Quantity. *Chemistry, 14*(5), 483-487.

Oberhofer E. S. (1992). What Happens to the "Radians?" *The Physics Teacher, 30*(March), 170-171.

Toeplitz O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학.** (우정호, 임재훈, 박경미, 이경화 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Topçu T., Kertil M., Yilmaz K., and Önder O. (2006). Pre-service and In-service Mathematics Teachers' Concept Images of Radian. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*, 281-288.

Whitaker R. J. (1994). Whence the "Radian?" *The Physics Teacher, 32*(OCT), 444-445.

Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Grad_%28angle%29.

A Didactical Analysis on Radian

Nam, Jin Young (Yeongsin High School)
Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

This study is to provide a base for discussions on teaching and learning of radian through a theoretical analysis of it. Radian possesses two-fold comprehensive properties of measurement as a magnitude and a pure number. As a magnitude of an angle, it has some theoretical advantages in mathematics and in physics, in spite of its non-superiority to other angular measures in practical sense. As a pure number, it has some advantages in that it simplifies theoretical developments of trigonometric functions and justifies omitting the unit in the calculations and final expressions in physics.

Radian should be taught and learnt with an appreciation of the advantages of the two-fold properties. Activities to measure angles from various viewpoints may be helpful for this. Students' awareness of the advantages of radian needs to be stimulated and deepened repeatedly as related content appears.

* **Key words** : radian(라디안), circular measure(호도법), measurement(측정), angular measure(각의 측도), trigonometric function(삼각함수), didactical analysis (교수학적 분석)

논문 접수: 2008. 4. 9
심사 완료: 2008. 5. 13