

## Proper Orthogonal Decomposition 기법을 이용한 세장한 구조물의 모드인자 파악

### Modal Identification of a Slender Structure using the Proper Orthogonal Decomposition Method

함 희 정\*  
Ham, Hee-Jung

#### Abstract

In this paper, the Proper Orthogonal Decomposition (POD) method, which is a statistical analysis technique to find the modal characteristics of a structure, is adapted to identify the modal parameters of a tall chimney structure. A wind force time history, which is applied to the structure, is obtained by a wind tunnel test of a scale down model. The POD method is applied on the wind force induced responses of the structure, and the true normal modes of the structure can be obtained. The modal parameters including, natural frequency, mode shape, damping ratio and kinetic energy of the structure can be estimated accurately. With these results, it may be concluded that the POD method can be applied to obtain accurate modal parameters from the wind-induced building responses.

키워드 : POD 기법, 모드인자, 풍동실험, 세장한 구조물

Keywords : Proper Orthogonal Decomposition (POD), Modal Identification, Wind Tunnel Test, Slender Structure

#### 1. 서론

고유주파수, 모드형태, 감쇠비 등의 모드인자(modal parameters)는 구조물이 지니는 동적특성이다. 이러한 모드인자를 파악하는 모드식별(modal identification)기법은 구조물의 안정적인 설계 및 유지 관리를 위해 매우 효과적으로 사용되고 있다.

일반적인 모드식별기법은 구조물에 작용되는 하중에 대한 정보(입력데이터)와 구조물의 동적 응답 정보(출력데이터)를 알고, 두 데이터의 상관관계를 확인하는 것이다. 이를 입·출력모드식별기법(input-output measurement approach)이라 하며, 임팩트 테스트, 웨이커 테스트 등의 방법으로 구조

물에 인위적 가진을 일으켜 입·출력데이터를 측정한다[1]. 그러나 실제로 구조물의 모드를 파악할 수 있을 만큼의 충분한 에너지를 포함시켜 구조물 을 가진 하기는 기술적, 경제적으로 어려움이 있으며, 특히 구조물의 규모가 커질수록 가진 시 이러한 어려움이 커진다. 이 같은 문제점을 보완하기 위하여, 인위적 가진 없이 바람이나 지진 등의 상시진동에 의한 구조물의 동적 응답정보만으로 모드인자를 파악하는 출력모드식별기법(output-only measurement approach)이 근간에 와서 연구되어지고 있다[2].

본 논문에서는 출력모드식별기법으로서 효과적인 Proper Orthogonal Decomposition(POD) 기법을 적용하여 세장한 굴뚝 구조물의 동적 특성을 파악하고자 한다. POD기법은 시·공간적 데이터에서 우세한 모드를 추출하는 통계적 분석기법으로 다양한 분야에서 유용하게 사용되고 있다[3][4]. 건설구조공학분야에서는 구조물에 작용하는 풍하중

\* 강원대학교 건축학부 부교수, 공학박사, 교신저자

의 시·공간적 특성을 파악하기 위하여 사용되고 있고[5]. 최근, 간단한 보 구조물의 자유진동실험에 POD 기법을 적용하여 POD모드와 고유모드를 비교하는 연구가 있었다[6][7]. 본 연구에서는 이러한 연구들을 바탕으로 POD 기법이 모드식별기법으로서 강풍에 의해 강제진동 중인 실제 구조물에 처음으로 적용하고자 한다. 이를 위해 풍하중에 의해 유발되는 구조물의 동적 응답 변위데이터를 출력 데이터로 사용하여 POD 기법을 적용하였으며, POD 모드로부터 구조물의 고유주파수, 모드형태, 감쇠비 그리고 각 모드별 운동에너지를 파악하였다.

## 2. 정규 모드와 POD 모드의 관계

POD 기법의 주요 목적은 시간( $t$ )·공간( $z$ )에 대한 임의의 장(random field)  $u(z, t)$ 의 모든 요소와 가장 잘 상관(correlated)되는 최적의 결정함수  $\phi(z)$ 을 구하는 것이다. 이러한 최적화는 결정함수  $\phi(z)$ 에 대한  $u(z, t)$ 의 투영 값을 식 (1)과 같이 서로 내적하여 최대값을 취하면서 얻어질 수 있다.

$$\int u(z, t)\phi(z)dz = \max \quad (1)$$

식 (1)은 결정함수  $\phi(z)$ 으로 표준화하여 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\int u(z, t)\phi(z)dz}{\sqrt{\int \phi^2(z)dz}} = \max \quad (2)$$

여기서, 최대 투영 값  $\lambda$ 는 식 (2)의 제곱 평균으로 나타낼 수 있으며, 이는 식 (3)과 같다.

$$\frac{\left\langle \left[ \int u(z, t)\phi(z)dz \right] \left[ \int u(z', t)\phi(z')dz' \right] \right\rangle}{\int \phi^2(z)dz} = \lambda \quad (3)$$

여기서,  $\langle * \rangle$ 는  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T * dt$  으로 정의되는 시간 평균 연산기호이다. 한편, 식 (3)은 식 (4)와 같은 고유치 문제로 풀 수 있다.

$$\int R(z, z')\phi(z')dz' = \lambda\phi(z) \quad (4)$$

여기서,  $R(z, z')$ 은  $\langle u(z, t)u(z', t) \rangle$ 을 나타내는 값으로  $u(z, t)$ 의 공간 상관 함수(correlation matrix)를 의미한다. 만약,  $u(z, t)$ 를 구조물의 동적 응답 변위 데이터라 하고 변위 측정 위치가 균등한 공간에 분포되어 있음을 조건으로 하면, 식 (4)를 식 (5)와 같은 행렬방정식으로 변환할 수 있다.

$$[R]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad (5)$$

즉,  $[R]$ 은 구조물 변위의 공간 상관 행렬이고,  $\{\phi\}$ 와  $\lambda$ 은 각각 결정된 POD 모드형태와 모드별 운동에너지(kinetic energy)를 의미하는 고유치인 것이다. 여기서 POD 모드형태  $\{\phi\}$ 는 식 (6)과 같은 직교성(orthogonality)를 갖는다.

$$\{\phi\}^T_i \{\phi\}_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

구조물의 동적 응답은 식 (7)과 같은 운동방정식으로 나타낼 수 있으며, 변위는 식 (8)과 같은 모드 중첩법(mode superposition)으로 구할 수 있다[8].

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{f\} \quad (7)$$

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \psi_i(z) \quad (8)$$

여기서,  $\psi(z)$ 은 정규 모드형태이고  $q(t)$ 는 정규 모드 좌표계이다. 식 (8)을 식 (7)에 대입시켜 풀 때 식 (9)와 같이 정규화(normalize) 과정을 거치게 된다.

$$\{\psi\}^T_i [m]\{\psi\}_j = \delta_{ij} \quad (9)$$

즉, 식 (9)의 정규 모드형태와 식 (6)의 POD 모드형태를 비교하여 보면 식 (10)과 같은 관계를 파악할 수 있다.

$$\{\psi\} = [m]^{-1/2}\{\phi\} \quad (10)$$

이는 질량에 대한 정보가 있으면 POD 모드형태로부터 정규 모드형태를 알 수 있음을 의미한다.

POD 모드형태는 변위장  $u(z, t)$ 을 재현(reconstruction)하기 위하여 식 (11)과 같이 이용할 수 있으며, 여기서 POD 모드좌표계를 의미하는  $a(t)$ 는 식 (12)와 같이 구할 수 있다.

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(z) \quad (11)$$

Proper Orthogonal Decomposition 기법을 이용한 세장한 구조물의 모드인자 파악

$$a_i(t) = \frac{\int u(z, t) \phi_i(z) dz}{\int \phi_i^2(z) dz} \quad (12)$$

식 (8)과 식 (11)을 비교하여 보면 POD 모드좌표계로부터 정규 모드좌표계 또한 파악할 수 있음을 알 수 있다.

이와 같은 이론적 배경을 바탕으로 POD 모드로부터 정규 모드를 파악하여 구조물의 고유 주파수, 모드형태, 감쇠비 그리고 각 모드별 운동에너지를 식별하였다.

### 3. 굴뚝 구조물에의 적용

#### 3.1 수치 시뮬레이션

POD 기법을 캔틸레버형 굴뚝 구조물에 적용하여 모드인자를 파악하기 위해 수치적 시뮬레이션으로 얻어진 동적 응답 변위데이터를 사용하였다. 시뮬레이션은 그림 1과 같은 10개의 자유도를 갖는 캔틸레버형 굴뚝 구조물이 해석모델로 사용되었고, 질량, 강성, 그리고 감쇠행렬을 구성하였다.

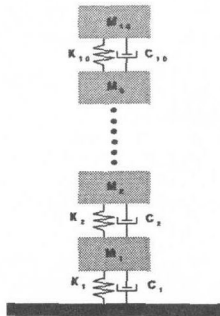


그림 1 10 - 자유도 계 구조물

질량행렬은 45cm의 두께에 2,400kgf/m<sup>3</sup>의 단위무게를 갖는 8.5m×8.5m×100m의 철근 콘크리트 정방형 굴뚝 구조물을 10개의 자유도로 이상화하여 얻어졌으며, 이같이 얻어진 질량행렬과 구조물의 1차 고유 주파수로부터 강성행렬을 얻었다. 여기서, 구조물의 최대변위를 유발시키기 위해서 구조물의 1차 고유 주파수는 풍 직각 방향 풍하중의 고유 주파수와 같은 값을 사용하여 공진(resonance)현상을 유도하였다. 감쇠행렬은 미리 가정한 모드 감쇠비를 적용할 수 있도록 레일리 감쇠(Rayleigh damping)를 사용하여 얻었으며, 식 (13)은 본 연구에서 사용한 감쇠행렬의 구성식이다[8].

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k] \quad (13)$$

여기서, 비례상수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 1차, 2차 모드 감쇠비를 식

(14)에 적용하여 구할 수 있다.

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\beta = \frac{2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (14)$$

식 (14)에서 적용된 1차, 2차 모드 감쇠비의 비는 1:1.39로 가정하여[9], 각각 2.00%, 2.78%로 선택하였으며, 이로부터 얻어진 비례상수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각 0.0046, 0.0831이다. 이 값을 식 (13)에 적용하여 감쇠행렬을 구성하였다.

그림 1의 해석모델에 적용할 풍하중을 결정하기 위하여 그림 2와 같이 경계층 풍동에서 정사각 단면을 갖는 굴뚝 구조물의 1/250 축척모형(3.4cm×3.4cm×40cm)으로부터 변동 풍압을 측정하였다[10].

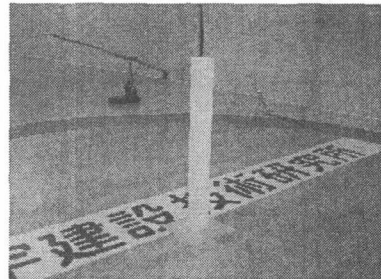


그림 2 풍동실험에 사용된 모형

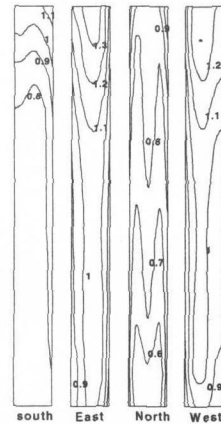


그림 3 풍압계수의 RMS 분포

실험모형에는 120개의 풍압공이 위치해 있으며, 400Hz의 주파수로 16,384개의 풍압데이터를 각 풍압공에서 동시에 측정하였다. 그림 3은 측정된 풍압데이터에서 얻어진 풍압계수( $C_p$ )의 RMS 분포를 보이고 있다. 이 분포로부터 풍 직각 방향(동쪽과 서쪽 벽면)이 풍 방향(남쪽과 북쪽 벽면)에 비해 전체적으로 큰 RMS 값을 갖고 있음을 알 수 있다. 본 논문에서는 풍 직각 방향인 동쪽

과 서쪽 벽면의 풍압계수와 100년 재현주기 설계풍속 30m/sec를 건축물 구조설계기준[11]에 적용하여 풍하중을 산정하였다.

그림 4는 구조물의 10층에 작용하는 풍하중의 시간이력과 스펙트럼을 나타낸 것이며, 와류를 일으키는 주파수가 0.55Hz인 것을 스펙트럼의 피크(peak)로부터 알 수 있다. 이로부터 식 (15)에 나타난 것과 같이 와류현상의 특성을 표현하는 Strouhal number,  $S$ 는 0.11로 구할 수 있었으며, 이는 일반적으로 정사각 단면 구조물에서 실험적으로 규명된 값이다[12].

$$\frac{f \cdot D}{U} = S \quad (15)$$

여기서,  $f$ 는 와류가 형성되는 주파수,  $D$ 는 풍 방향 단면 크기,  $U$ 는 평균 풍속을 의미한다.

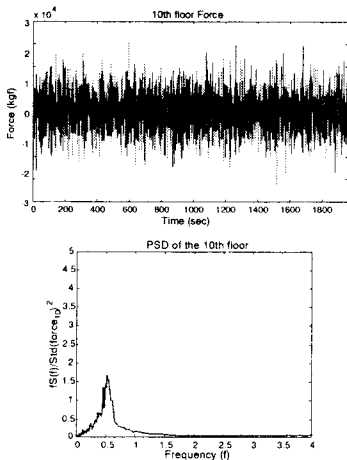


그림 4 구조물에 작용하는 풍하중

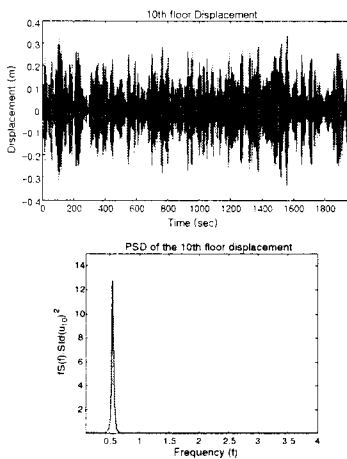


그림 5 고층 구조물의 동적 응답 범위 데이터

이 같은 풍하중과 가상한 구조물의 물성치를 정규모드 해석방법에 적용하여 동적 응답 범위데이터를 얻었다. 그림 5는 각각 구조물의 10층에서의 응답 범위데이터의 시간이력과 스펙트럼을 나타낸 것이며, 구조물의 고유 주파수가 와류를 일으키는 주파수와 일치하는 0.55Hz인 것을 스펙트럼의 피크로부터 알 수 있다. 즉, 구조물이 공진(resonance)을 일으켜 진동의 폭이 커지고 있음을 알 수 있다.

### 3.2 POD 해석

위와 같이 수치적 시뮬레이션으로 얻어진 응답 범위 데이터에 대해 POD 기법을 적용하였다. 다음은 POD 모드들로부터 얻은 모드인자와 원래 정규모드 해석결과와의 비교이다.

#### 3.2.1 POD 모드별 운동에너지

POD 모드별 운동에너지를 나타내는 각 POD모드의 고유치(eigenvalue), 즉, 식 (3)의  $\lambda_i$ 는 표 1과 같다.

표 1 POD 모드별 운동 에너지 분포

모드	$\lambda_i$	$\frac{\lambda_i}{\sum \lambda} \times 100 (\%)$
1차	864.62	99.98
2차	0.15	0.02
3차	0.01	0.00
4차 ~ 10차	0.00	0.00

이 표로부터 대부분의 운동에너지는 1차 모드가 기여하는 것을 알 수 있으며, 4차 이상의 모드가 구조물의 동적거동에 기여하는 에너지는 거의 없음을 알 수 있다.

#### 3.2.2 모드형태 (mode shape)

그림 6은 대부분의 운동에너지를 포함하는 1차, 2차, 3차 모드의 POD 모드형태를 정규 모드형태와 비교하고 있다. 본 결과로부터 POD 모드형태와 정규 모드형태가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

#### 3.2.3. 고유 주파수 (natural frequency)

그림 7은 POD 모드좌표계 파워스펙트럼을 정규 모드좌표계와 비교하여 나타낸 것으로, 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한, POD 모드좌표계 파워스펙트럼의 최대치로부터 POD 각 모드의 주파수를 추출할 수 있으며, 표 2는 구조물의 고유 주파수를 POD 모드좌표계로부터 추출된 값과 비교한 것이다. 그림 7과 표 2에서 볼 수 있듯이 POD기법을 사용하여 추출된 각 모드의 주파수가 구조물의 고유 주파수와 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 또한, 2차, 3차 모드에서는 0.55Hz 주파수 부근에서도 에너지를 갖고 있음을 알 수 있으며, 이는 풍하중의 가진 에너지를 나타내는 것이다. 즉, POD 모드좌표계로부터 구조물의 고유 주파수 뿐만 아니라 가진 주파수 또한 파악할 수 있음을 알 수 있다.

Proper Orthogonal Decomposition기법을 이용한 세장한 구조물의 모드인자 파악

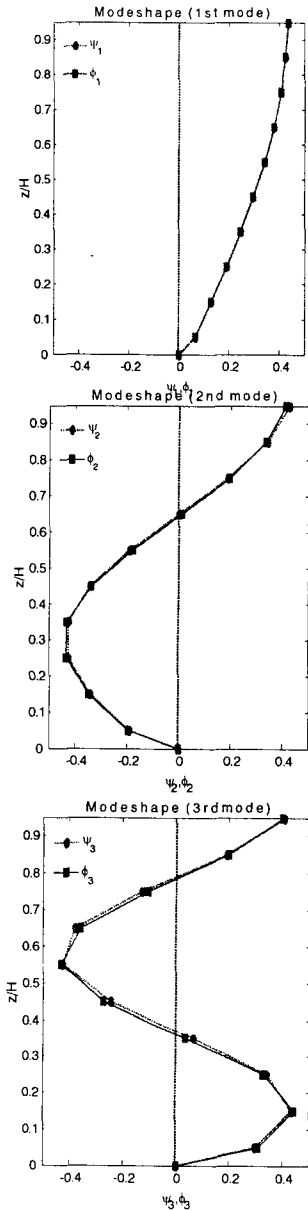


그림 6 POD 모드형태와 정규 모드형태의 비교 (위 : 1차 모드, 중간 : 2차 모드, 아래 : 3차 모드)

표 2 POD 모드 주파수와 고유 주파수 비교

	모드	고유값	POD 모드값	오차 (%)
주파수 (Hz)	1차	0.55	0.55	0.00
	2차	1.64	1.64	0.00
	3차	2.69	2.68	0.37

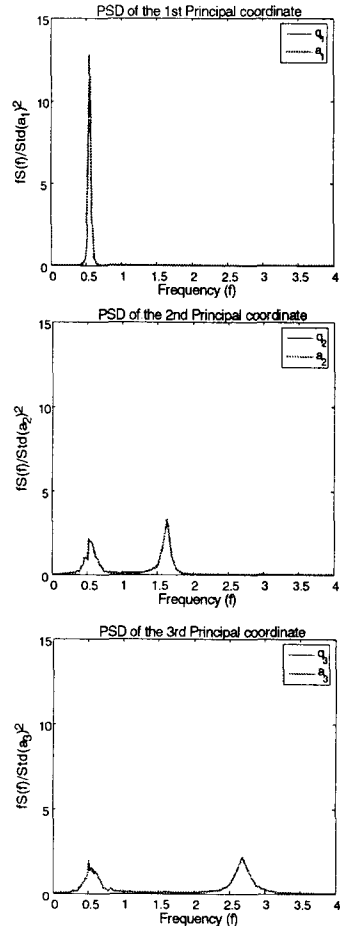


그림 7 POD 모드좌표계의 시간이력과 파워스펙트럼

3.2.4 감쇠비 (damping ratio)

POD 모드좌표계의 시간이력으로부터 구조물의 감쇠비를 산정하기 위해서 RD법(Random Decrement Method)을 적용하였다[13]. RD법은 불규칙한 시간이력 데이터를 특정한 조건에 만족하는 부분샘플로 나누고, 이 부분샘플들을 중첩시켜 자유진동파형을 추출하는 기법이다. 본 논문에서는 POD 모드좌표계 RMS 값의 2배 (0.4)를 시작점으로 하는 부분샘플을 추출하였다.

그림 8의 POD 모드좌표계의 시간이력에 RD법을 적용하여 200개 이상의 부분샘플을 중첩하였으며, 이로부터 그림 9에 보이는 자유진동파형을 추출하였다.

그림 9의 자유진동파형에 대수감소법(Logarithmic Decrement Method)을 적용하였으며, 전체 16개의 사이클(cycle)에서 얻어진 15개 감쇠비의 평균값에서 POD 모드의 감쇠비를 추출하였다. 표 3은 이와 같이 추출된 POD 모드의 감쇠비와 기존 구조물의 감쇠비를 비교한 것으로 비교적 적은 오차 범위 내에서 일치하고 있음을 알 수 있다.

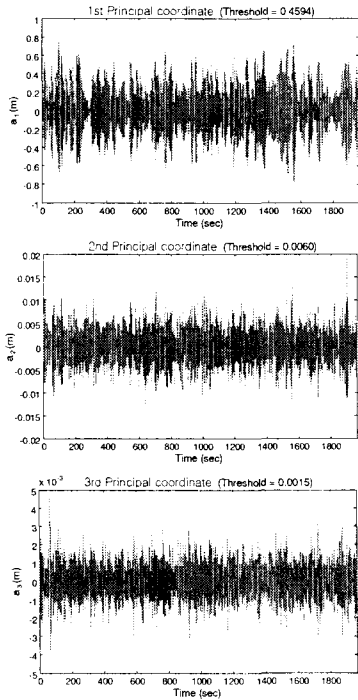


그림 8 POD 모드좌표계의 시간이력

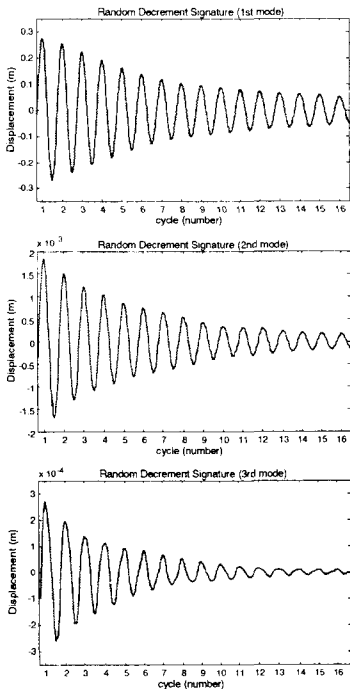


그림 9 RD법으로 추출된 자유진동파형

표 3 POD 모드 감쇠비와 구조물의 감쇠비 비교

	모드	가정치	POD 모드값	오차 (%)
감쇠비 (%)	1차	2.00	1.93	3.50
	2차	2.78	2.83	1.80
	3차	4.15	4.13	0.48

#### 4. 결론

본 논문에서는 구조물의 동적특성인 모드인자를 식별하기 위한 기법으로서 POD 기법이 강제진동 상태의 구조물에 효과적으로 적용 가능한지를 검증하였다. 이를 위해 풍하중이 작용하는 굴뚝 구조물의 동적 응답 변위 데이터를 모드식별을 위한 입력데이터로 사용하였고, 구조물의 고유 주파수, 모드 형태, 감쇠비 등의 모드인자를 식별하였다. 본 논문의 주요한 결론들은 다음과 같다.

- (1) POD기법으로 추출된 POD모드의 고유치  $\lambda$ 로부터 각각의 모드들이 갖고 있는 운동에너지의 양을 파악할 수 있었다.
- (2) POD 모드형태와 구조물의 정규 모드형태를 비교한 결과 적은 오차 범위 내에서 매우 잘 일치하였다. 즉, POD 모드형태로부터 정규 모드형태를 거의 유사하게 추출할 수 있음을 알 수 있다.
- (3) POD 모드좌표계의 파워스펙트럼으로부터 각 모드의 주파수를 추출할 수 있었으며, 이를 구조물의 고유 주파수와 비교한 결과 적은 오차범위 내에서 일치하였다.
- (4) POD 모드좌표계의 시간이력 데이터에 RD법을 적용하여 자유진동파형을 추출할 수 있었으며, 이를 대수감소법에 적용하여 각 모드의 감쇠비를 얻을 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- [1] B. J. Schwarz, and M. H. Richardson, "Experimental Modal Analysis", *Proceedings of the CSI Reliability Week*, Orlando, FL., p.12, 1999.
- [2] W. X. Ren and Z. H. Zong, "Output-only Modal Parameter Identification", *Civil Engineering Structures, Structural Engineering and Mechanics*, Vol.17, No.3-4, p.16, 2004.
- [3] J. L. Lumley, "Stochastic Tools in Turbulence", *Academic Press*, New York, p.194, 1970.
- [4] P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz, "Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry", *Cambridge University Press*, Cambridge, p.420, 1996.

- [5] H. J. Ham, "Turbulence Effects on Wind-Induced Building Pressure", Ph.D. Dissertation, *Colorado State University*, p.248, 1998.
- [6] S. Han and B. F. Feeny, "Application of Proper Orthogonal Decomposition to Structural Vibration Analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.17, No.5, pp.989~1001, 2003.
- [7] B. F. Feeny and Y. Liang, "Interpreting Proper Orthogonal Mode of Randomly Excited Vibration Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.165, No.5, pp.953~966, 2003.
- [8] A. K. Chopra, "Dynamics of Structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering", *Prentice-Hall*, New Jersey, p.844, 2001.
- [9] T. Kijewski and A. Kareem, "Estimation and Modeling of Damping and Engineering Auxiliary Damping Systems in Civil Engineering Structures : An Overview", *NatHaz Modeling Laboratory Report*, p.43, 2001.
- [10] 김지영, 김대영, 김한영, 김상대, "풍동 실험기법에 따른 세장한 구조물의 풍응답 및 하중 산정의 비교연구", *한국강구조학회 학술발표논문집*, pp.132~137, 2004.
- [11] 대한건축학회, "건축구조설계기준", 기문당, 서울, p.597, 2005.
- [12] E. Simiu and R. H. Scanlan, "Wind Effects on Structures : An Introduction to Wind Engineering", *John Wiley & Sons*, New York, p.589, 1986.
- [13] A. P. Jeary, "The Description and Measurement of Nonlinear Damping in Structures", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.59, No.2-3, pp.103~114, 1996.