대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.2, 297-317. Jun. 2008

컴퓨터 대수체계(CAS) 대비 중등대수교육 기초 연구[1)]

장 경 윤*

본 연구는 중등학교에서 CAS도입을 대비한 기초연구로 CAS 환경에서 모델링 문제해결 과정과 CAS 활용방식을 조사하였다. 수학교육과정 배경과 CAS 장착 정도가 문제해결과정과 CAS 사용전략에 변인이 될 가능성을 고려하여 비교연구로 수행하였으며 한·미 고등학교 2학년생 각 8명과 26명이 연구에 참여하였다. 연구결과 고전적 상자문제에서 CAS는 기호조작명령어와 그래프로 문제해결에 도움이 되었으나 수학적 개념이나 통찰을 대신하지 않았으며, 수학적모델의 분석과 풀이, 결과 적용과 해석, CAS사용에 있어서 집단간 질적인 차이를 보였다. 수업을 통해 CAS 장착이 비교적 안정된 미국학생들 다수가, 한국 학생들과 대조적으로, 중간값 정리를 적용하여 해의 범위를 추정하는데 CAS를 사용하였으며 여러 표상의 연결을 시도하였다. CAS는 지필기법을 대신하는 데 그치지 않고, 실수의 소수표현과 대수적 표현, 수감각과 함수의 성질, 여러 표상의 연결성 등 대수통찰에 주목하게 하는 등 CAS의 가능성과 억제력은 대수교육에서 인식론적 변화와 교육과정 변화를 초래하는 것으로 나타났다.

I. 서 론

컴퓨터대수체계(Computer Algebra System: CAS)는 매우 강력한 수학활동 지원체계이다. 초기에 과학적 목적에서 컴퓨터 소프트웨어로 개발된 CAS는 다양한 표상을 제공하고, 수량계산 뿐 아니라 식의 계산, 통계처리와 분석, 그 결과의 시각적 표현, 표와 리스트 작업, 벡터나 행렬의 연산, 프로그래밍 등의 기능을 수행한다. CAS의 중요한 특징은 '식을 간단히 하기', '인수분해', '전개', '방정식의 대수적 풀이' 등 대수식의 조작을 지원한다는 점이며 컴퓨터 소프트웨어 Derive, *Maple*, *Mathematica* 등이 CAS의 일종이다.

1990년대 학교수학에서 그래픽계산기의 영향과 가능성이 주요 쟁점으로 부각(Fey & Hirsch, 1992)되던 시기에, *Maple*이나 *Mathematica* 등 CAS는 고가의 컴퓨터 소프트웨어로 출시된 주로 대학수학에서 사용되기 시작하였다. 중등수준에서 자칫 지필조작 약화를 초래할 수 있는 CAS의 활용이 진지하게 논의된 것은 *TI-89*, *TI-91*, *Casio FX2.0*, *ClassPad 300* 등 CAS를 내장(built-in)한 휴대용 기기의 출시로 저렴한 가격에 CAS 휴대가 용이하게 되면서부터이다.

1992년 영국수학회 교육위원회가 소위원회를 구성하고 1996년 학교수학(5-19)에 CAS 활용지침서(Oldknow & Flower, 1996)를 출간한 바 있으며, NCTM(2002)은 *Mathematics Teacher* 11월호를 CAS 특집으로 발간하는 등 CAS가 학교

* 건국대학교(kchang@konkuk.ac.kr)
1) 이 논문은 2005학년도 건국대학교의 지원에 의하여 연구되었음

수학에서 주목을 받기 시작하였다. 수학교육에서 CAS 활용에 관심을 가진 학자들은 1996년 ICME-8에서 수학교육에서의 컴퓨터대수(Computer Algebra in Mathematics Education: 이하 CAME) 국제심포지엄을 갖기로 결의하고 1999년 이스라엘에서 첫 번째 CAME을 개최하였다. 2년마다 2007년까지 총 5회에 걸친 CAME 심포지엄에서 CAS 활용에 집중한 수학교육 연구와 개발 정보 교환이 이루어지고 있다(http://www.lkl.ac.uk). 'CAS와 대수'를 주제로 한 ICMI Working Group이 구성되어(Stacy, Chick & Kendal, 2004) 수학교육에서 CAS의 역할이 비중있게 논의되고 있다.

CAS는 대수교육의 양상을 변화시키며 여러 영역에 걸쳐 새로운 연구를 필요로 한다(Thomas, Monaghan & Pierce, 2004). 무엇보다도 CAS 도입은 대수교육의 목적과 핵심가치 인식에 변화를 요구한다. CAS의 도입은 대수교육의 초점과 강조점을 응용과 모델링을 중시하는 방향으로 바꿀 수 있다. CAS를 전제로 개발된 수학 평가문항(http://www.vcaa.vic.edu.au/vce/studies/ mathematics/cas/casexams.html 참조)은 중등 수준에서 CAS 도입이 학교수학에 힘을 실어 주고 있음이 분명해 보인다..

CAS의 역할과 활용이 수학교육학계의 주목을 받기 시작하였으나 학교현장에서 CAS의 본격적인 도입은 아직 초보단계에 있다. 이는 CAS가 기존 수학교육의 목적과 가치, 교육과정에 미칠 파급효과에 대한 조정이 쉽지 않음을 말해준다.

컴퓨터 CAS의 출현과 CAS를 내장한 휴대용 계산도구의 입수가능성이 어느 때보다 높아진 현대 정보기술사회에서 기법 중심의 전통적인 대수교육의 위치와 방향을 재설정할 필요성은 꾸준히 대두되고 있다. 그런데 우리나라 학교수학, 특히 대수교육에서는 지필조작이 핵심요소로 여전히 크게 강조되고 있으며(교육인적자원부, 1999) 최근 수정고시된 수학교육과정(2007)도 컴퓨터나 계산기 사용에 대하여 여전히 피상적으로 언급하고 있다.

본 연구는 학교대수의 중심이 알고리즘적 지필조작에서 대수적 사고와 모델링으로 옮겨가야 한다는 관점에서 우리나라 수학교육에 CAS 도입을 대비한 기초연구로 고안되었다.

CAS가 수학교육에서 도구로 사용되기까지 과정에 주목한 Artigue(2001, 2005)는 이 과정은 상상을 초월하리 만큼 복잡하다고 하며 CAS는 수학교육에 새로운 가능성을 부여하는 동시에 억제력으로 작용하기도 한다고 하였다. 이에 본 연구는 CAS가 제공되는 대수모델링 문제에서 한국과 미국 고등학생들의 문제해결과정과 CAS 활용방식을 비교 분석하여, CAS 의 가능성을 극대화하고 억제력을 유용한 학습기회로 사용하도록 중등대수교육의 방향을 설정하는데 시사점을 제공하게 될 것이다.

Ⅱ. CAS와 수학교육과정

수학학습과 수학교육, 특히 지필기법 중심의 대수교육에서 CAS의 가치, CAS의 도구로서의 발생과정, 학습과정에서 CAS의 역할, CAS도입으로 인한 교육과정의 변화에 초점을 맞춘 선행연구를 간략히 정리하였다.

1. 지필기법과 "키 누르기"의 가치

지필환경의 문제해결에서 방정식의 풀이나 분모의 유리화 등 연산기법은 정신훈련의 가치보다 문제해결을 위한 실용적 성격이 강하다(Usiskin, 1999). CAS의 '키 누르기'는 지필환경에서 실용적 가치를 지닌 수학 기법을 인식론

적 가치에서 새롭게 조망할 수 있게 한다 (Lagrange, 2005).

Lagrange(2005)는 수학 개념을 간단하고 효율적으로 관련 기법과 연결시키는 CAS의 인식론적(이론적) 가치에 주목하였다. Lagrange에 따르면, 예를 들어 '분모의 유리화'가 지필환경에서는 실용적인 기법으로 중요하지만, 인식론적 수준에서 보면 '분모의 유리화'는 식의 몫과 제곱근의 대수적 성질과 구조를 다룰 수 있게 하여 대수확장체 $Q[\sqrt{2}]$의 기초가 된다. 그러나 "새로운 기법과 그것의 인식론적 가치가 수학 교육자들에게 조차 명백하지 않은데"(p.121) 그 이유가 지필환경에서는 기법의 실용적 유용성 때문에 그 기법의 '인식론적 가치가 간과되기 쉽기 때문이라 하였다.

Lagrange는 수학교육에서 CAS 도입을 지필 기법의 실용적 유용성 약화로 이어지게 할 것이 아니라, 전통기법의 쇠퇴를 감안하여 수학 교육영역을 재고하는 계기로 삼아야 한다고 주장한다.

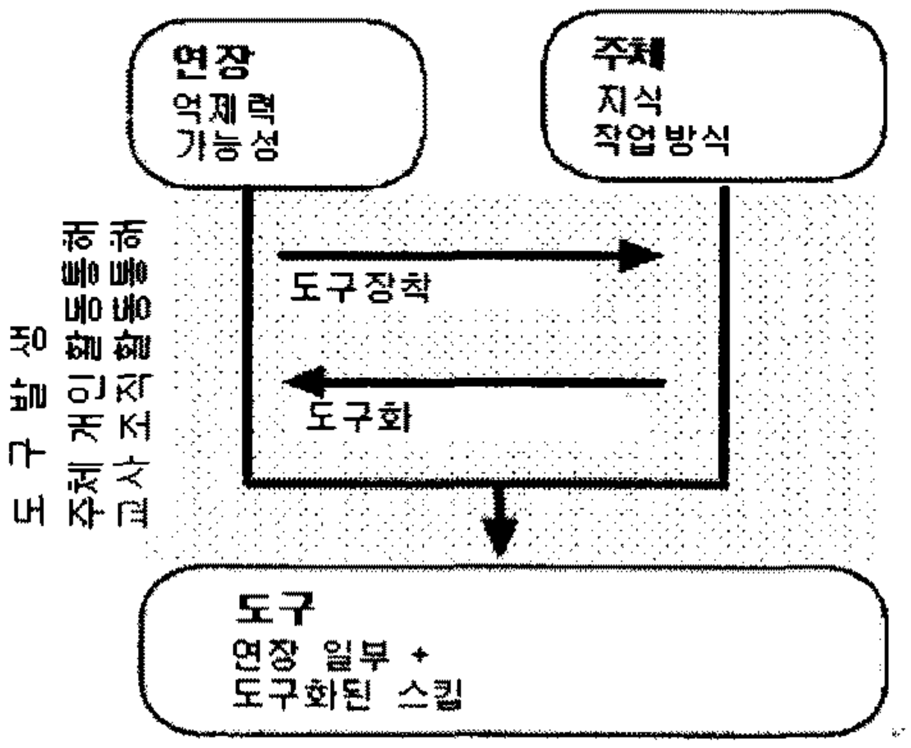
> ...그 기법(지필기법)들의 중요성을 감소시키거나 간과하려고 노력하는 대신, 기술공학이 어떻게 개념화를 돕는가를 이해하기 위하여, 그 기법들의 실용적이고 인식론적 가치, 그리고 한 영역에서 수학적 작업을 하는 동안 그것들이 어떻게 진화하는가를 고려하여 가르쳐야 한다. (Lagrange, 2005, p.121)

CAS 환경에서는 암산과 지필계산의 역할, 대수연산 결과를 손으로 기록하는 등 루틴을 반복하는 것의 가치, 핵심적인 대수 기능의 가치를 새롭게 조명할 필요가 있다.

2. 학습도구로서의 CAS

가. 도구화와 도구장착[2]

Trouch(1997, Artigue(2001)에서 재인용)는 연장(tool)을 도구(instrument)와 구분하고 도구의 역할을 인류학적 관점에서 분석하여, 컴퓨터나 계산기 등 가공물이 수학학습 과정에서 하려면 '도구로 발생'되어야 한다고 주장한다. 도구발생은 도구장착과 도구화의 두 과정을 거친다 ([그림 Ⅱ-1]). 도구발생은 기술공학 환경에서 두 가지 과정, 즉 기술적 기능을 익히는 과정과 의미를 구성하는 과정을 함께 고려하는 것이다(Drijvers, 2003, p.8).



출처: Trousche(2003, P.8 표.3)

[그림 Ⅱ-1] 두 과정의 조합으로서의 도구발생

Artigue(2001, p.5)에 의하면, 도구 발생은 기술공학(가공물)과 대상의 두 방향에서 작용한다. 도구발생의 첫 번째 방향은 주체(subject)에서 "가공물을 향하는 것으로, 점진적으로 가공물에 가능성을 실어 그것을 특정 용도로 변형"하는 "도구화(*instrumentalization*)"이며, 두 번째 방향은 도구에서 "주체를 향하는 것으로,

2) *instrumentalization*은 인식주체가 자기의 지식이나 작업방식을 적용하여 기기를 목적에 적절히 사용할 수 있게 되는 것을, *instrumentation*은 도구가 주체에게 가능성과 억제력을 동시에 부여하게 되는 상황을 말한다. 이 논문에서는 전자를 '도구화', 후자를 '도구장착'으로 번역하였다.

주어진 과제에 효과적 반응 기법을 점진적으로 구성하도록 도구 행위도식을 개발 또는 전유"하게 하는 "도구장착(*instrumentation*)"이다 (Artigue, 2001, p.5). 도구화 과정에서는 주체의 수학지식이나 작업방식이 중요한 변수로 작용하며, 도구장착 과정에는 연장(인공물) 자체의 특성이 가능성과 억제력으로 동시에 작용한다 ([그림 Ⅱ-1]).

도구발생 관점은 CAS 등 IT가 교수학적으로 유용한 도구가 되는 과정을 고려하는 것으로, 기기 사용을 위한 기술적 기능 숙달 측면과 IT 환경에서 학습자의 수학적 이해와 통찰로 인한 행동 스킴의 개발 측면 모두에 주목하게 한다.

3. CAS의 기능

가. 증폭기와 조직자

Pea(1987, Drijvers, 2003)는 도구가 사고와 학습, 문제해결활동에서 정신적 한계를 극복하게 돕는 매체라고 보고 IT도구의 기능을 증폭기(amplifier)와 조직자(organizer)로 구분하였다.

CAS 등 IT는 유사 상황 사례를 빠른 속도로 조사하거나 변인을 다양하게 조작하여 광범위한 사례를 조사함으로써 개념이나 원리에 대해 지필 환경에서는 얻기 힘든 통찰을 가능하게 하는데 Pea는 이러한 기능을 증폭기(amplifier)라 하였다. 증폭기는 컴퓨터 프로그램이 특별한 수학적 개념이나 개념 관련체계의 예와 예가 아닌 것을 조작할 수 있도록 하는 소우주를 지칭한 Tall(1991)의 '포괄적 조직자(Generic organizer)' 개념과 유사하다.

뿐만 아니라 CAS는 교과의 내용과 배열에 본질적인 영향을 미치는 '조직자'(organizer)로서 역할을 한다. 기술공학이 가르칠 수학에 영향을 미치게 될 경우가 이에 해당한다.

나. 화잇박스와 블랙박스

Buchberger (1990: Drijvers, 2003에서 재인용)는 수학 학습과정에서 절차와 의미의 표출 여부에 따라 상황을 화잇박스와 블랙박스로 구분하고, 학습 과정, 특히 지필 조작과 관련한 CAS의 역할을 분석하였다. CAS는 지필기법을 '키 누르기'로 대체하여 일련의 연산 절차를 드러내지 않고 결과를 출력한다는 점에서 블랙박스(Black Box)이다.

새로운 주제를 완전히 이해(white box)한 후, 보다 높은 수준의 새로운 주제를 학습하는 동안 (이제 사소하게 된) 계산에 CAS를 사용하게 하는 경우 CAS는 화잇박스/블랙박스(White Box/ Black Box: 이하 W/B)의 역할을 한다.

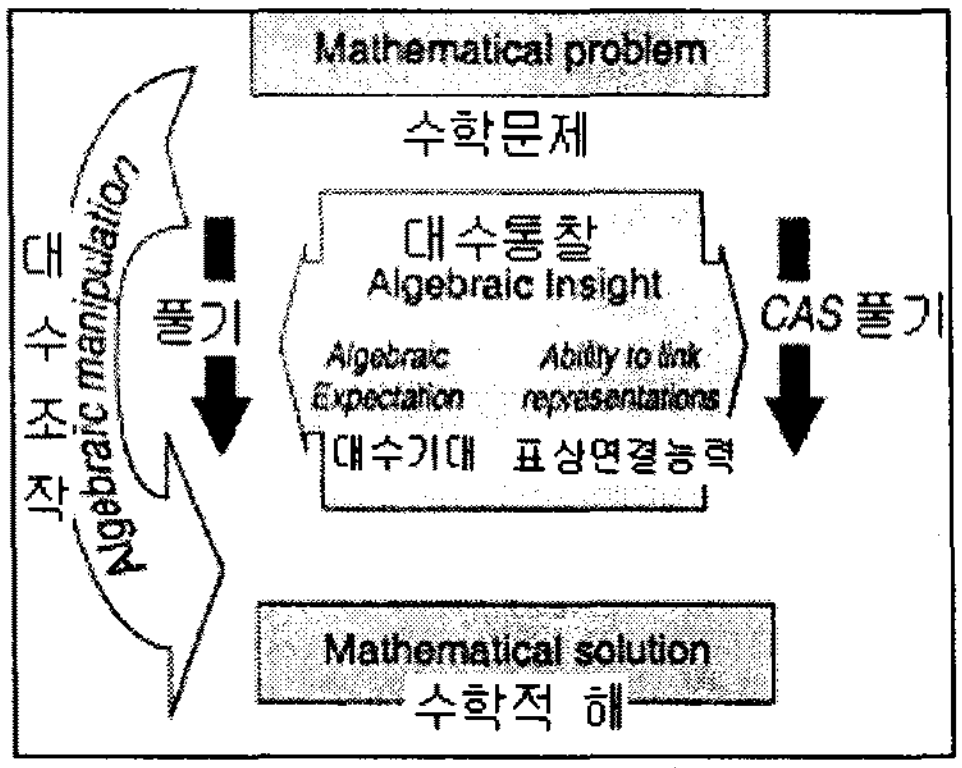
또한 CAS는 수학 활동 횟수를 쉽게 늘려 '패턴의 발견'을 용이하게 하고 직접적으로 안정적 구조를 보게 하는 반면 그 안정성의 설명 근거는 감춘다. CAS로 광범위한 사례를 생성하게 하여 패턴을 발견(black box)하고, 발견을 정렬·증명(white box)하여 새로운 개념을 개발을 하게 하는 경우 CAS는 블랙박스/화잇박스(B/W)로 사용된다. 이러한 경우, 학생들은 문제해결에 성공했음에도 불구하고 결과를 이론적으로 정당화하지 못할 때 심리적인 불편함을 겪기도 한다(Drijvers, 1999: Drijvers, 2003에서 재인용). 단계적 문제해결에서 CAS의 역할이 이 두 가지를 절충하는 방식인 그레이박스(gray box)로 제안되기도 한다.

다. 학습 계열과 강조점 변화

CAS 도입은 학습계열이나 주요 강조점의 변화를 이끈다. CAS는 개념이나 기술 습득이 반드시 문제해결보다 앞설 필요가 없게 하기 때문에(Heid, 1996) "개념 먼저", "응용 나중"이라는 전통적인 수업 계열에 변화(재계열화)를 가져오게 한다. 한 예로 CAS 도입은 도함

수 개념이나 도함수계산을 학습하지 않고도 그래프에서 최댓값을 구하게 하므로, 최적화 문제를 미적분 뒤로 미룰 필요가 없게 된다.

Pierce와 Stacey(2002)는 CAS 환경에서 성공적인 대수문제해결을 위한 필수능력을 "대수통찰"(algebraic insight)이라 칭하고, 대수기대와 표상연결능력을 대수통찰의 두 측면으로 지목한 바 있다. 기호의 의미, 연산순서, 연산 성질 등 규약과 기본성질을 인식하고 대상의 구조와 주요특징을 찾는 "대수기대"(algebraic expectation)는 CAS의 기호조작모드 뿐 아니라 지필조작에서도 필수적인 능력으로 중요하며, "표상연결능력"(ability to link representa- tions) 기호, 그래프, 수식 등 다양한 표상을 연결시키는 능력으로 CAS 환경에서 새롭게 중요성이 크게 부각되는 측면이다([그림 Ⅱ-2]참조).



[그림 Ⅱ-2] CAS 활용 문제해결에서 대수통찰
(출처: Pierce & Stacey, 2002, p.624, Figure.3)

III. 비교연구의 배경

NCTM(2000)은 양질의 Pre-K-12 수학교육과정을 구성을 위한 원리의 하나로 '기술공학의 원리'를 제안하였다. 기술공학이 수학학습에 필수적이며 가르칠 내용에도 영향을 준다는 기술공학 의 원리는 정도의 차이는 있으나 각국 교육과정에서 대체로 긍정적인 방향에서 수용되고 있다.

그러나 국제연구결과 우리나라 수학교육에서 기술공학 활용과 결과 양상이 대부분의 국가와 방향을 달리하는 부분이 있어 이에 주목하였다.

1. TIMSS에 나타난 계산기 활용

2003년 TIMSS-R 보고서(Mullis, I., Martin, M.,Gonzalez, & Chorostowski, S., 2004)에 따르면 46개 참가국 중 PC 보유(98%, 국제평균 60%)로는 최상위, 교사의 계산기 허용(계산기 불허 교사비율35%[3], p.292, 국제평균 23%)으로는 하위 13위로 나타났다. 여기에서 우리나라는 IT 구축환경에 비하여 수학교육에서 IT 활용이 상대적으로 매우 저조함을 알 수 있다.

TIMSS-R 결과 중 '계산기-민감 문항'(Calculator-Sensitive Items)4)과 관련하여 특이사항이 발견되었다. 보고서(P.375, Exhibit A.14)에 따르면, 5개 문항에서 거의 모든 국가가 계산기 사용을 허용한 경우가 그렇지 않은 경우에 비하여 평균정답률이 높게 나타난 반면, 우리나라 학생들 경우는 그 방향이 반대로 나타난 것이다[5]. (의미있는 차이는 아니지만) 우리나라의 경우 5개 문항에서 오히려 계산기를 허용하지 않은 경우에 평균정답률이 높았다(<표 Ⅲ-1>).

3) 1999 TIMSS에서 같은 비율이 28%(Mullis 등, 2001)였던 것에 비해 다소 증가한 것이다.
4) 계산기를 사용한 경우가 지필계산에 비해 정답률이 월등히 높은 문항(Harvey, 1992)을 말한다.
5) 계산기 사용 시 오히려 평균정답률이 낮은 국가는 46개국 중 우리나라와 아르메니아 뿐 이었다.

<표 Ⅲ-1> TIMSS-R 계산기-민감 문항 평균정답률

	계산기 허용	계산기 허용안 함
우리나라	79	81 △
홍콩	88 ▲	81
국제평균	66 ▲	57

▲유의미하게 높음

TIMSS-R을 위한 자료 수집은 컴퓨터나 계산기 사용을 명시적으로 적극 권장하던 제 7차 수학교육과정(교육부, 1997) 시행시기에 이루어졌다. 그럼에도 불구하고 우리나라 학교 현장에서 수학교과에 계산기나 컴퓨터 활용이 매우 저조하고, 특히 국제추세와 반대로, 계산기가 성취도에 주는 효과가 없거나 오히려 부정적으로 나타난 것은 주목할 만 결과로 그 원인 탐색이 이루어져야 할 것이다. 기술공학이 교수방법 뿐 아니라 가르칠 수학 내용에도 영향을 준다(NCTM, 2000)는 적극적인 인식을 공유하지 않으면 기술공학에 대한 이같은 상황에 변화를 기대하기 어려울 것이다. 수학교육에서 저조한 IT 활용이 근본적으로 교육과정 내용과 계열에 IT 사용을 전제로 하지 않은 '단순-결합형' 수학교육과정에서 비롯된 것일 수 있다(장경윤, 2007).

계산기 민감 문항에서 유독 우리나라가 역방향의 결과를 보인 이유도 분석이 필요한 부분이다. 우리나라 학생들에게는 정답률 80% 정도의 쉬운 계산문제였기 때문에 계산기 사용이 필요하지 않았을 것이라고 짐작할 수도 있다. 그러나 <표 Ⅲ-1>에서 보듯이 홍콩의 경우, 계산기를 허용하지 않은 경우 우리나라와 정답률이 동일하지만 계산기 사용으로 정답률이 크게 높게 나타난 것은 또 다른 변인을 생각해보게 한다. 보고서에 따르면, 홍콩은 국가교육과정에 계산기 사용을 명시하고 있지 않으나 거의 모든 수업에 계산기 사용을 허용한다. 그러므로 우리나라의 경우 계산기 사용에 익숙하지 않았기 때문에 계산기 사용이 학생들의 성취도에 영향을 주지 못했을 가능성을 배제할 수 없다.

계산기 사용에 관한 수용정도와 활용효과가 국제적인 결과와 다른 양상을 보인 것은 CAS 활용에 있어서도 외국과 우리나라 학생들의 반응과 사용효과에 차이를 예견할 수 있게 한다. 또한 도구발생의 관점에서 볼 때 인식주체의 수학적 지식과 작업방식이 복합적으로 작용하여 CAS의 '도구화'가 이루어지므로 학생(도구사용 주체)의 문제해결방식과 도구 활용 양식은 동시에 고려되어야 한다.

2. CAS 활용과 대수교육 비교연구

CAS는 미적분을 포함한 포괄적인 대수교육 연구에서 새로운 주제이다. CAME에 의하면 학교수학에서 CAS에 대한 관심은 외국에서도 초기 단계에 있다(http://www.lkl.ac.uk/research/came/curriculum.html). CAME 교육과정정보에 의하면 고등학교 수학교육과정에 CAS를 활발하게 수용하는 나라는 덴마크, 뉴질랜드, 호주(빅토리아) 정도이며, 고등학교 이상의 수학시험에서 CAS를 허용하는 나라는 덴마크, 프랑스, 뉴질랜드, 호주, 미국 등이다. 미국의 경우 대학 입학을 위한 AP Calculus와 AP Statistics에서 그래픽계산기 또는 CAS를 허용한다.

미국은 명시적으로 교육과정에 CAS를 사용하도록 하고 있지 않으나, 중등학교 수학수업에서 순수 기호조작을 위한 CAS 사용은 초기단계에 있는 국가이다. 기호조작 기능을 충분히 지원하는 본격적인 CAS 계산기(TI-89, TI-92 등) 사용은 보편화되지 않은 상황이다. 그러나 거의 모든 중등학교 수학 수업에서 그래픽계산기를 자연스럽게 사용하고 있으며 AP 시험에서는 CAS 사용을 허용하고 있으며, 미국 중등

학교에서 보편적으로 사용하고 있는 TI-83은 그래픽계산기에 기호조작을 부분적으로 지원하고 있다.

Thomas, Monaghan & Pierce(2004)는 교사와 교육과정이 CAS 연구에 있어 의 주요한 변수가 되며, 또 수학교육에서 CAS 사용의 실패를 보고한 보고서는 그 실패가 수업에서 CAS를 사용하는 개념에 내재된 결점 보다는 CAS 사용 관련 변화를 준비하고 계획하는 이면에 놓인 방법 때문일 수 있다고 하였다. 따라서 CAS 사용에 대비한 교사교육과 교육과정 연구가 중요하다고 하였다.

또 이들은 CAS 활용 연구를 개관하면서, 국가교육과정을 적용하는 나라에서 비교연구는 적게 수행되며, 종종 학생과 교사가 학습하는 방식과 그들이 기술공학으로 하는 것이 무엇인지에 초점을 맞추고 있다고 하였다. 우리나라의 실태를 이르는 말이기도 하다. 우리나라에서 CAS 관련 연구는 외국 연구 소개, CAS의 사용법과 활동 사례나 평가방안을 제시(손홍찬, 2005; 하준홍, 2004; 한국교원대학교, 2005;한세호, 2005; 허만성, 2000)하는 수준에서 이루어졌다. 1차함수나 통계지도에 휴대용 CAS를 이용(손재영,김민정, 2006)한 사례가 있으나 국내에서 CAS 활용으로 대수교육의 방향전환을 생각할만한 수준의 연구는 미비한 상황이다.

Ⅳ. 연구문제와 연구방법

본 연구는 학교대수의 중심이 알고리즘적 지필조작에서 대수적 사고와 모델링으로 옮겨가야 한다는 관점에서 CAS 도입으로 인한 중등대수교육의 변화 방향 모색을 위한 기초연구로 수행되었다.

본 연구는 CAS 환경에서 모델링 문제해결에 나타난 한국과 미국 고등학생들의 대수문제해결 과정과 CAS 활용방식을 비교·분석함으로써 CAS 도입으로 인한 중등대수교육의 변화 방향에 구체적인 시사점을 얻고자 연구문제를 다음과 같이 설정하였다.

1. 연구문제

- CAS 환경에서 학생들이 보이는 대수문제 해결 과정의 특징은 무엇인가?
- CAS 활용방식에서 학생들이 보이는 특징은 무엇인가?
- CAS장착이 대수모델링에 각각 어떤 가능성과 억제력으로 나타나는가? 억제력이 어떻게 학습기회로 활용될 수 있는가?

2. 연구 대상과 도구

가. 연구 대상

CAS 사용에 있어서 도구장착의 정도(기기 사용의 익숙도), 누적 학습결과와 습관이 CAS 환경에서의 문제해결의 과정과 전략에 질적 차이를 보일 수 있다는 판단에서 비교연구로 고안하였으며, 상대적으로 우리에게 잘 알려진 미국 고등학생을 비교대상으로 하였다.

한국의 수도권 소재 S고등학교 2학년 학생 8명이 이 연구에 참여하였다. 이 학생들은 미적분을 배운 상태였으며, 정규수업에서 CAS를 활용하는 상황 설정이 어려웠기 때문에 학생의 동의하에 방과후 별도 집단을 구성하였다. 이 학생들의 학업성취수준은 상 또는 중상 정도였다.

미국학생들은 보스톤 근교 L고등학교의 11학년 학생 26명이 이 연구에 참여하였다. 이들은 *Pre-Calculus* 수강생들로 미적분을 배우고

있었고 모든 수업시간에 자연스럽게 그래픽계산기를 사용하고 있었다. 두 집단은 수학적 지식의 배경은 유사하였으나 공학도구 친숙도에는 차이가 있었다. 또 교육과정 운영과 교육환경의 차이로 집단의 크기를 대등하게 구성하기 어려웠다.

본 연구에서 두 집단- '도구장착'이 어느 정도 정착된 미국학생들과 CAS '도구장착' 시작 단계에 있는 한국학생들-의 문제해결과정 비교는 CAS가 인식주체인 학생에게 주는 가능성과 억제력의 종류와 정도 파악에 통찰을 용이하게 할 것으로 기대된다.

나. 도구

학생들의 배경지식을 고려하여 문제해결에 적절하며 CAS 활용이 문제해결에 도움이 되는 수학적 모델링(NCTM, 1991) 문제를 제작하였다.

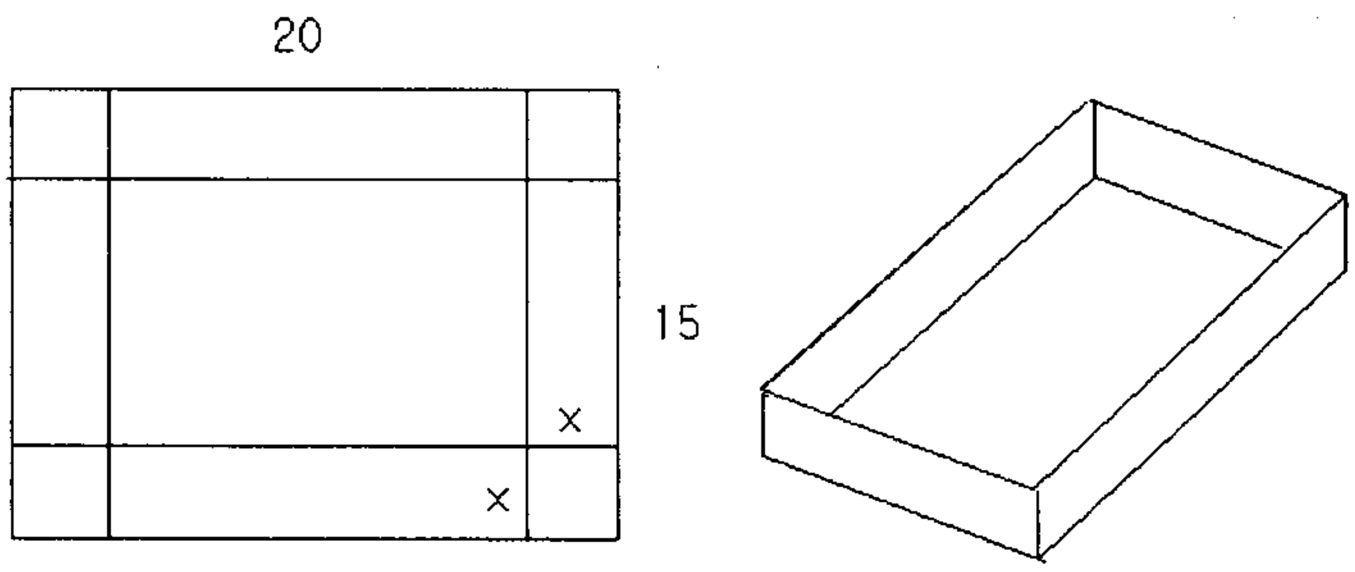
상자의 부피, 사각형 넓이를 주제로 방정식 풀이와 최적화를 요하는 문제를 세트로 구성하여 한글과 영문 두 가지 버전으로 만들었다. 본 논문에서는 상자문제([그림 Ⅳ-1])세트에 대하여 학생들의 응답을 비교·분석하였다. 상자문제의 풀이과정은 (1)실세계 상황에서 수학적 모델구성, (2)수학적 분석, (3)결론의 해석 및 적용과정 단계를 거친다.

3. 자료수집

한국 학생들은 수업시간에 이미 미적분을 배운 상태였으며, 이들의 수학 담당교사가 방과 후 약 1개월간 수시로 CAS(Casio의 *ClassPad 300*) 사용법과 CAS를 사용한 문제해결을 경험하게 하였다. 수학 담당교사의 주관으로 CAS 환경에서 약 50분간 모델링 문제해결검사를 실시하고 답안을 수합하였다.

미국 학생들을 대상으로 *PreCalculus* 담당교사가 주관하여 정규시간에 동일한 검사가 실시되었다. 이들이 사용한 기기는 학생들이 평소 수업에서 사용 하던 TI-83이었다. TI-83은 기기 자체의 성능은 *ClassPad 300*보다는 다소 떨어지지만 그래프와 이 문제해결에 필요한 기호조작 기능을 지원하고 있어 TI-83 사용이 이 문제해

가로가 20, 세로가 15인 직사각형 모양의 하드보드 지에서 그림과 같이 네 귀퉁이에서 합동인 정사각형을 잘라내어 상자를 만들었다.



(1) 부피가 300이 되게 하려면 x값을 얼마로 해야 하는가?

(2) 상자의 최대 부피를 구하라.

[그림 Ⅳ-1] 모델링문제해결문제: 상자문제

결에서 두 집단의 기기 사이에 동등성을 훼손하지 않을 것으로 판단하였다. 문제해결 검사지를 수합하여 기록내용을 분석하였다.

4. 문제해결 분석의 초점

가. 하위문제 1: 3차방정식의 풀이

첫 번 문제는 정수범위에서 인수분해 불가능한 $x(20-2x)(15-2x)=300$의 풀이로 귀결되어 지필조작으로 해를 구할 수 없기 때문에, CAS 명령어 활용, 또는 그래프 활용의 두 가지 방식으로 풀이가 가능하다.

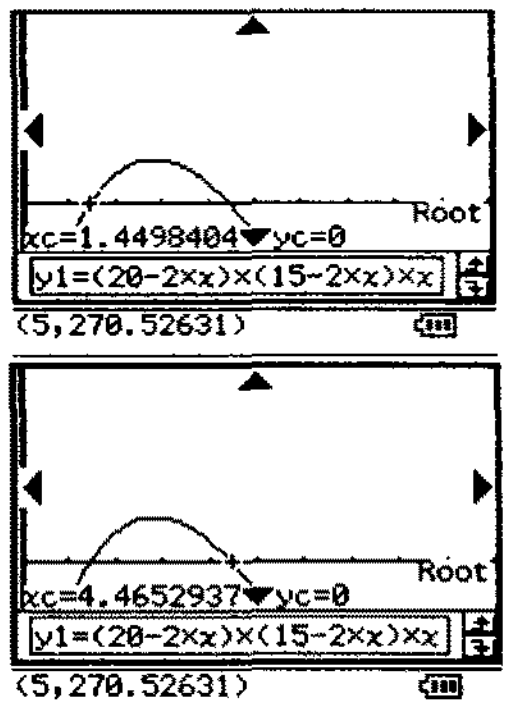
• <u>CAS 명령어를 활용한 해법</u>

CAS 명령어를 사용하는 경우 명령어에 따라 1개~3개의 해가 나온다. ClassPad300의 경우, "Numsolve"는 Newton방법으로 1개의 근사해, "solve"는 정의역 제한여부에 따라 2개 또는 3개의 해를 출력한다(<표 Ⅳ-1>).

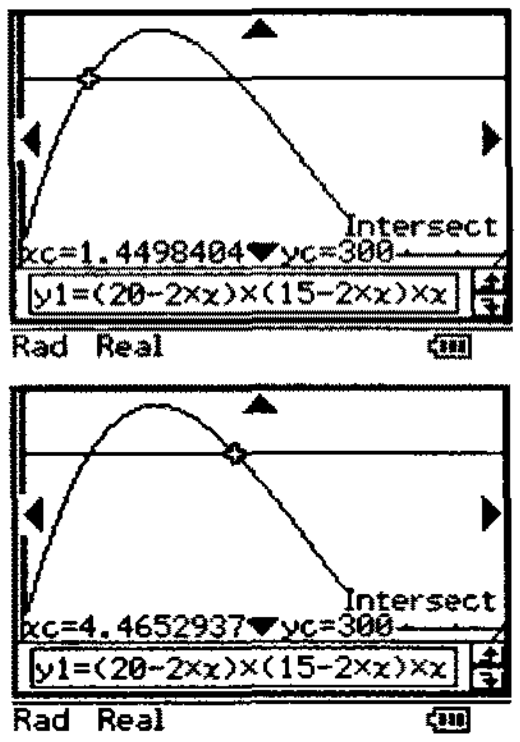
• <u>그래프를 이용한 해법.</u>

문제해결에 그래프를 두 가지 방식으로 사용할 수 있다(<표 Ⅳ-1>). 하나는 $y=x(20-2x)(10-2x)$와 $y=300$의 두 그래프로 "부피=300"이라는 문제 상황을 적용한 해법([그림 Ⅳ-2])이고, 다른 하나는 $y=x(20-2x)(10-2x)-300$의 그래프의 x절편으로부터 "부피-300=0"을 이용한 해법([그림 Ⅳ-3])이다.

학생들이 문제해결에서 명령어와 그래프사용 중 선호도와 문제해결 방식에 주목하여 분석하였다.



※교점(○)의 x, y값(yc=0) 그래프 하단에 표시.
[그림 Ⅳ-2]x(20-2x)(10-2x)-300=0의 그래프해법



※교점(○)의 x, y값(yc=300)하단에 표시
[그림 Ⅳ-3](20-2x)(10-2x)=300의 그래프해법

<표 Ⅳ-1> CAS를 사용한 3차방정식 해법

	CAS명령어	입력	출력	근갯수
1	"solve"	solve(x(20-2x)(15-2x)=300,x)	1.44…, 4.46…, 11.58…	3개
2	"solve"|(범위)	solve(x(20-2x)(15-2x)=300,x) | (x<7.5)	1.44…, 4.46…	2개
3	"Numsolve"	Numsolve(x(20-2x)(15-2x)=300,x)	1.44…, 4.46…, 11.58 중 하나	1개
	그래프 그리기	하위메뉴	근(출력)	근갯수
4	y=x(20-2x)(15-2x)와 y=300	Intersect	교점의 x좌표	3개
5	y=x(20-2x)(15-2x)-300	Root	x절편	3개

※소수(근사값)를 출력하도록 기본포맷 설정.

나. 하위문제 2: 최적화문제

하위문제 (2)는 $y=x(20-2x)(10-2x)$, $(0<x<7.5)$의 최댓값의 풀이로 귀결된다. 미적분을 이용하면 풀이가 가능하나 지필계산으로 최댓값을 근삿값으로 구하기는 어려운 문제이다. 그러므로 지필조작으로 문제에서 요구하는 정확한 해를 구하기는 매우 힘들다. [그림 Ⅳ-4-1]은 지필조작에 의한 풀이과정을 CAS로 나타낸 화면이다.

CAS의 기호조작 또는 그래프 기능을 이 문제해결과정에서 활용할 수 있다. 도함수를 구하여 극대점의 x값($=\frac{35-5\sqrt{13}}{6}$)을 구하고, 이를 부피함수에 대입([그림 Ⅳ-4-1]의 6째줄)하고 간단이하여 최댓값을 구할 수 있다. 그러나 제곱근이 포함된 이 값은 모델링 측면에서 유용하지 않다. 같은 방식으로 CAS를 이용하되 소수로 표현하도록 기본설정을 바꾸면 근사해를 구할 수 있다([그림 Ⅳ-4-2]).

그래프를 활용하는 경우는 미적분을 배우지 않은 경우에도 답을 구할 수 있다. 수학적 모델로 3차함수식을 찾아 그래프를 그리고 최댓값의 y좌표를 구하면 된다([그림 Ⅳ-4-3])

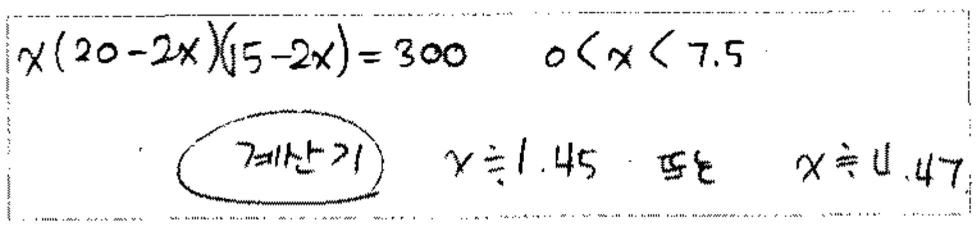
Ⅴ. 결 과

1. 3차 방정식의 근사해

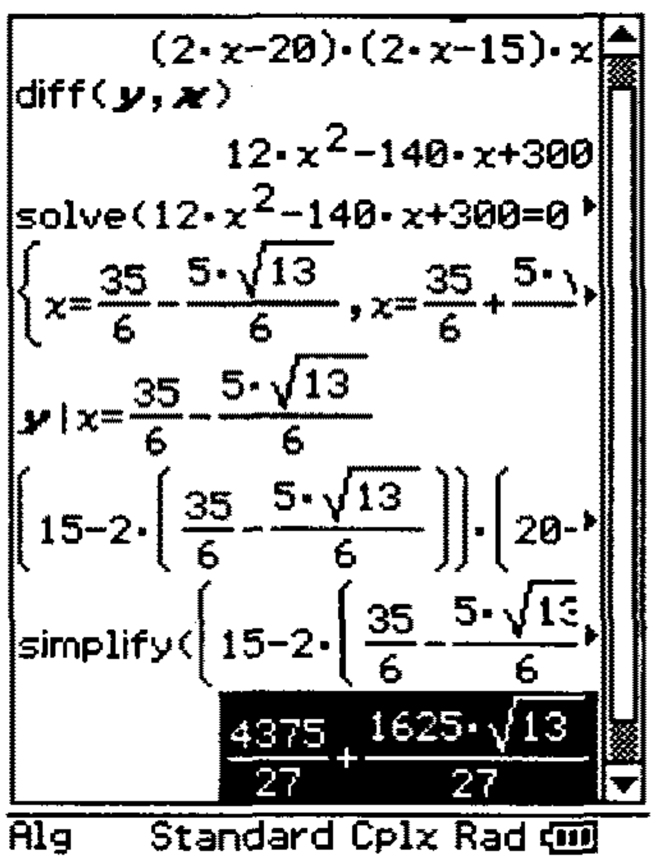
가. 한국학생의 문제해결

8명의 한국학생 모두 문제의 식 $x(20-2x)(15-2x)=300$을 바르게 제시하였으나 풀이과정에 x의 범위를 조건으로 명시한 학생은 한 명(KS_6) 뿐이었다([그림 Ⅴ-1]).

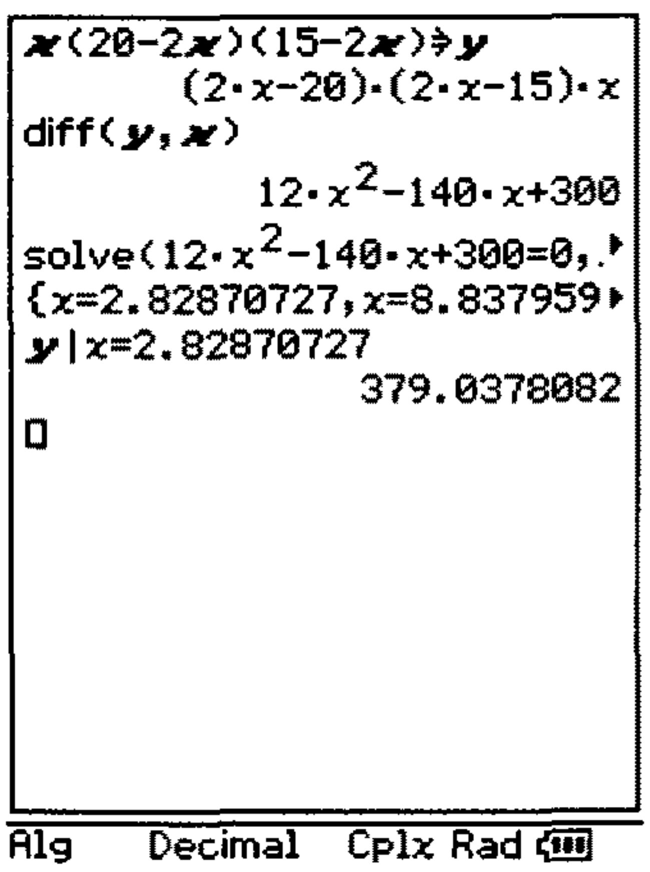
문제해결 과정에서 모두 CAS 계산기를 사용하였는데, 4명은 그래프를, 나머지 4명은 Numsolve 명령어를 사용하였다. 그래프를 이용한 학생 모두 교점의 x좌표 두개를 답으로 제시(정답)한 반면, 다른 4명은 모두 방정식을 내림차순으로 정리한 후에 "NumSolve" 명령어를 이용하여 1.4498⋯(또는 1.45) 하나만 답으로 제시하였다([그림 Ⅴ-2]).



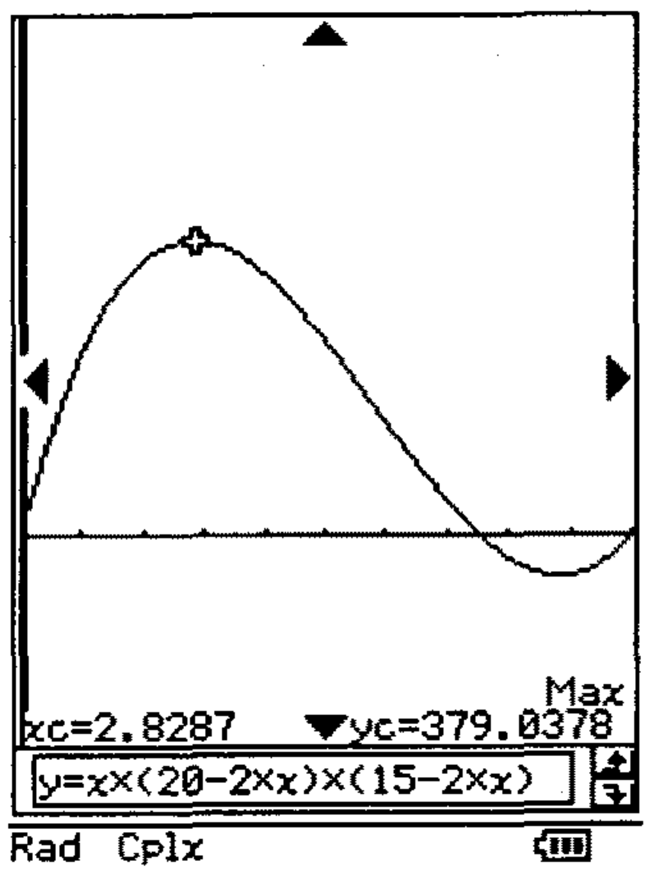
[그림 Ⅴ-1] 범위지정(KS_6)



[Ⅳ-4-1] 도함수 이용 (CAS화면1)

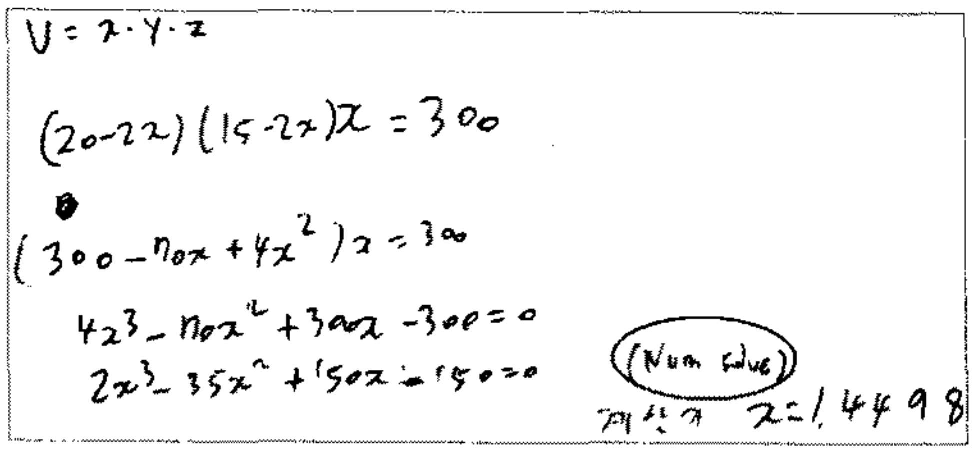


[Ⅳ-4-2] 도함수이용 (CAS화면: 근사값설정시)



[Ⅳ-4-3] 그래프이용 (Max ✥의 y(=yc)값)

[그림 Ⅳ-4] CAS 화면으로 본 최적화 문제 해법 3가지


$V = x \cdot y \cdot z$
$(20-2x)(15-2x)x = 300$
$(300-70x+4x^2)x = 300$
$4x^3 - 70x^2 + 300x - 300 = 0$
$2x^3 - 35x^2 + 150x - 150 = 0$
(Num solve)
계산기 $x \approx 1.4498$

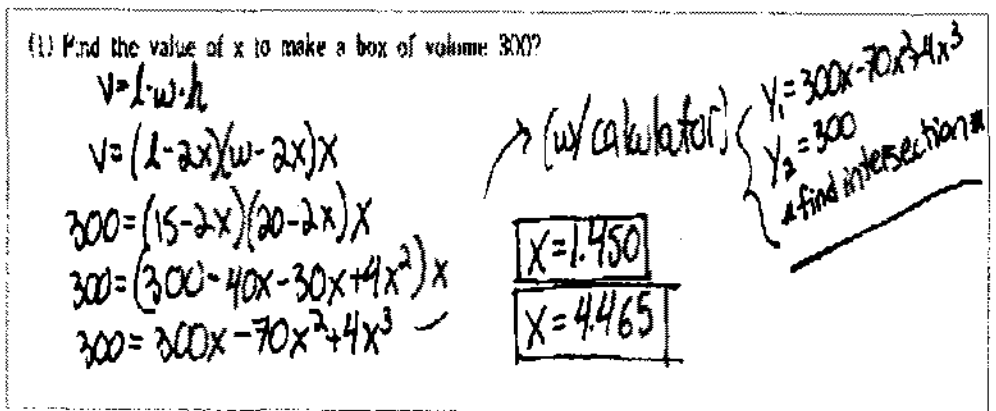
[그림 V-2] Numsolve로 근사값 1개 (KS_4)

그런데 모든 해를 한꺼번에 구할 수 있는 "Solve" 명령어를 사용한 학생이 아무도 없었다. 또 그래프 해법의 경우 x값 범위를 고려하지 않으면 근이 모두 3개 나오게 된다. 그런데 x값 범위를 명시적으로 언급하지 않았음에도 불구하고, 그래프를 이용하여 답을 한 경우에 x값 3개를 답으로 제시한 학생이 아무도 없었다.

또 그래프 해법의 경우 답안에는 식을 $x(20-2x)(10-2x)=300$으로 기록해놓고 [그림 Ⅳ-2]가 아닌 [그림 Ⅳ-3]의 방법, 즉 $y=x(20-2x)\ (10-2x)-300$의 그래프와 x축과의 교점으로 답을 구하였다.

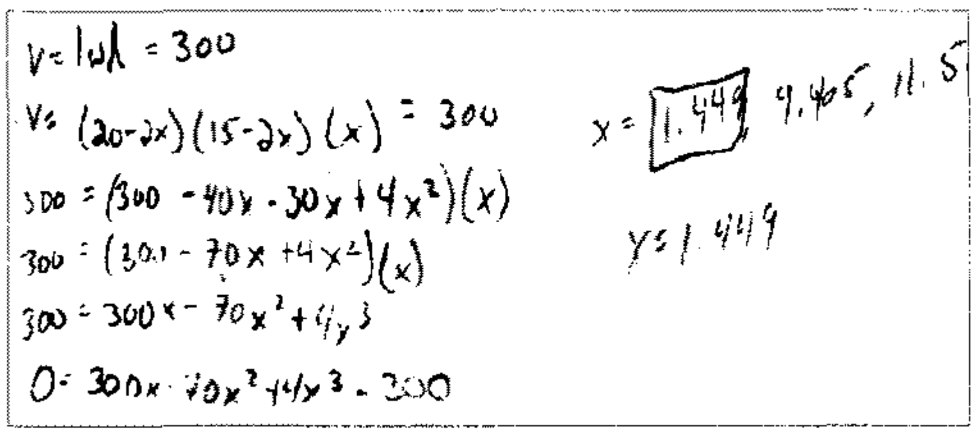
나. 미국학생의 문제해결

26명의 미국학생들은 25명이 문제해결을 위한 방정식을 바르게 제시하였으며 x값 두 개를 바르게 제시한 학생은 3명뿐 이었다. 이들은 모두 그래프를 이용하였으며, 이 3명 중 1명은 부피$=300$의 상황을 그대로 적용한 그래프로 답을 구하였다([그림 V-3]).


(1) Find the value of x to make a box of volume 300?
$V = l \cdot w \cdot h$
$V = (l-2x)(w-2x)x$
$300 = (15-2x)(20-2x)x$
$300 = (300-40x-30x+4x^2)x$
$300 = 300x - 70x^2 + 4x^3$
(w/ calculator)
$Y_1 = 300x - 70x^2 + 4x^3$
$Y_2 = 300$
find intersection
$\boxed{x=1.450}$
$\boxed{x=4.465}$

[그림 V-3] "부피=300"의 그래프풀이 (US_{19})

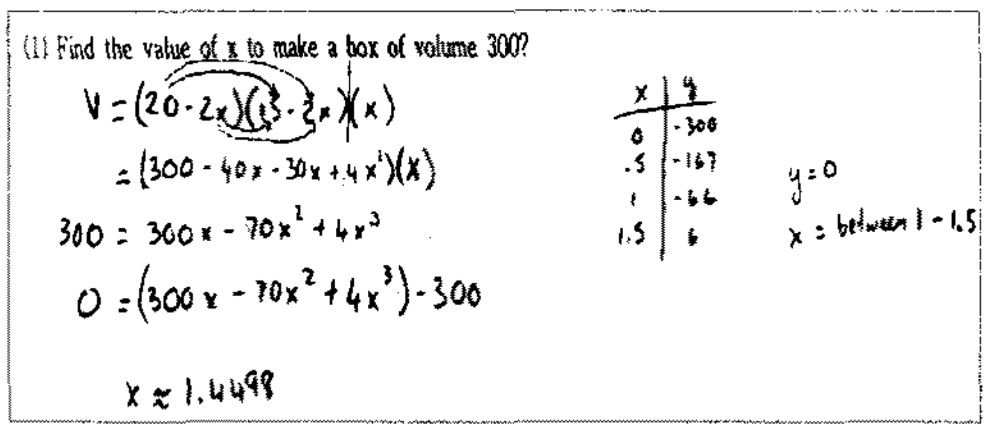
x값으로 1.4498 1개만 답으로 제시한 학생이 10명으로 가장 많았다. 이들은 대부분 (ClassPad의 'NumSolve'에 해당하는) 'Solver'를 이용하였다. 그래프의 교점 3개에서 x값 3개를 모두 기록해놓고 하나만 최종답으로 적기도 하였다([그림 V-4]).


$V = lwh = 300$
$V = (20-2x)(15-2x)(x) = 300$
$300 = (300-40x-30x+4x^2)(x)$
$300 = (300-70x+4x^2)(x)$
$300 = 300x - 70x^2 + 4x^3$
$0 = 300x - 70x^2 + 4x^3 - 300$
$x = \boxed{1.449}, 9.465, 11.5$
$y = 1.449$

[그림 V-4] 3개중 하나만 답으로 제시(US_5)

3개의 값을 답으로 제시한 5명은 그래프 교점('Intersection')을 이용하였다.

방정식 풀이과정에서 6명이 정수 x에 대한 부피를 대응표로 만들었으나 이들 중 정답을 한 학생은 없었다. 4명은 대응표에서 x가 1과 1.5 사이에 있다고 범위를 추정한 후 그래프나 Solver를 이용하여 x값 하나를 답으로 제시하였으며([그림 V-5]),


(1) Find the value of x to make a box of volume 300?
$V = (20-2x)(15-2x)(x)$
$= (300-40x-30x+4x^2)(x)$
$300 = 300x - 70x^2 + 4x^3$
$0 = (300x - 70x^2 + 4x^3) - 300$
$x \approx 1.4498$

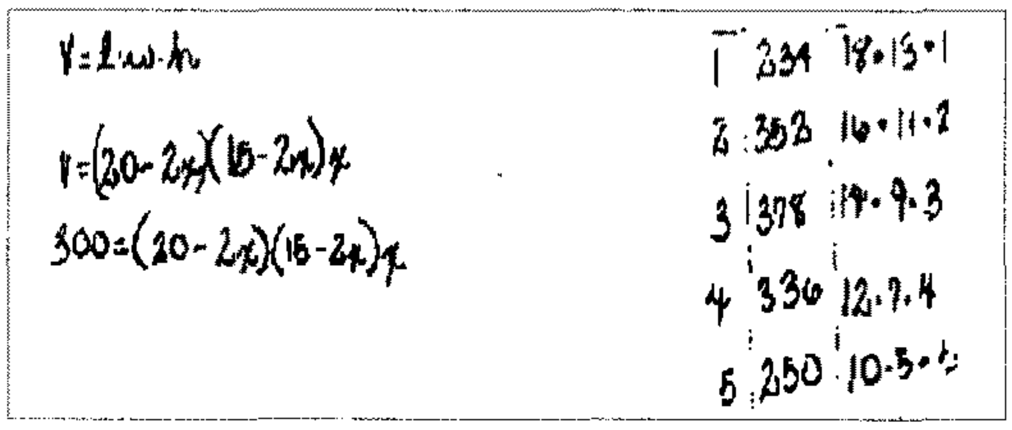
x	y
0	-300
.5	-167
1	-66
1.5	6

$y = 0$
x = between 1 - 1.5

[그림 V-5] 표만들기로 범위확인(US_7)

2명은 표만 만들고 답을 구하지 못하였다. 학생 U_9은 부피가 300이려면 x가 1과 2사이, 또는 4와 5 사이에 있어야 함을 알 수 있는 표를 작성([그림 V-6])하고도 이를 해석하지 못하고 답을 쓰지 못하였다. 결국 표 만들기는 문제해결에 다소 유용한 정보를 줄 수 있으나 결정적

인 전략은 되지 못하였다. 오히려 x의 초기값과 증분 설정에 따라 1개의 범위를 구한 경우 그 범위의 값 하나를 찾은 경우 거기에 만족할 수 있다.



[그림 V-6] 표만 제시(US_9)

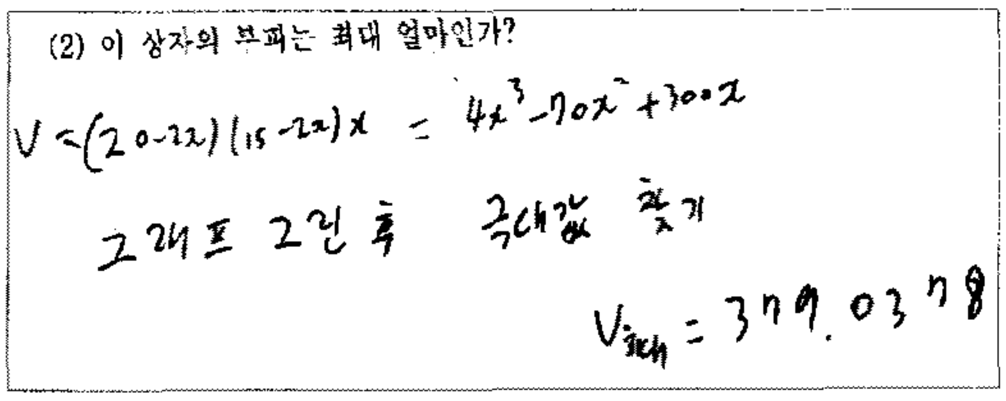
미국 학생 3명이 풀이과정에서 'Newton 방법'을 언급하였다.

<표 V-1>에 두 집단의 풀이 방법을 요약하였다.

2. 최적화문제

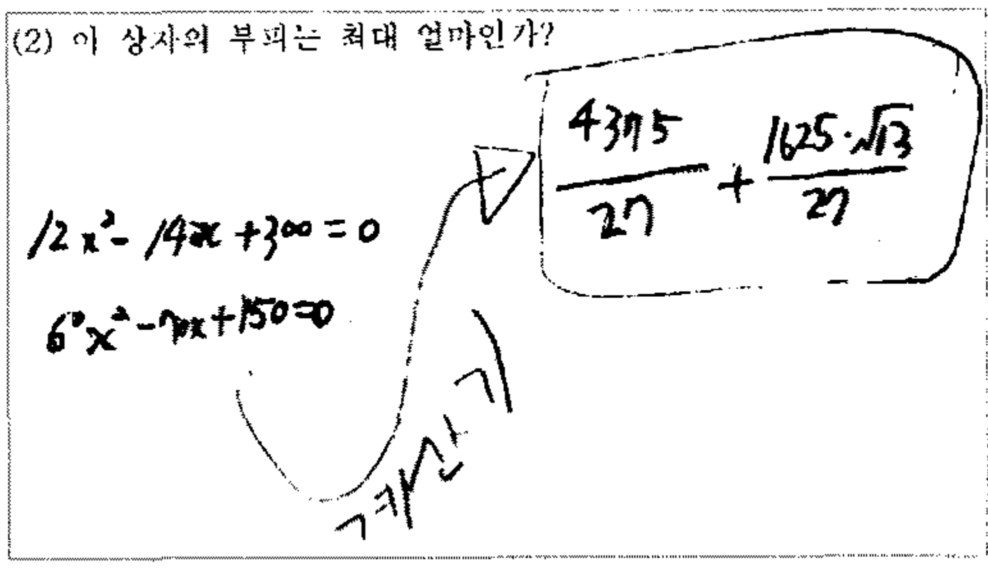
가. 한국학생의 최적화문제 해결

최대부피를 구하는 최적화 문제에서 7명이 풀이를 시도하였는데 7명 모두 함수식을 바르게 표현했다. 그 중 1명(KS_4)은 오직 그래프를 이용하여 정답을 제시하였다([그림 V-7]).



[그림 V-7] 그래프로 구한 최적해(KS_4)

4명이 도함수 y'를 이용하여 최댓값을 구하려고 하였는데, 그 중 2명은 $y'=0$의 해가 간단히 나오지 않자 그래프로 답을 구하였고([그림 IV-4-3]), 1명은 $y'=0$의 해를 지필로 구하려다 계산오류로 실패하였다. 다른 한 명은 CAS의 기호조작기능을 사용하여 근호가 포함된 값을 최댓값을 구하였다([그림 V-8]).



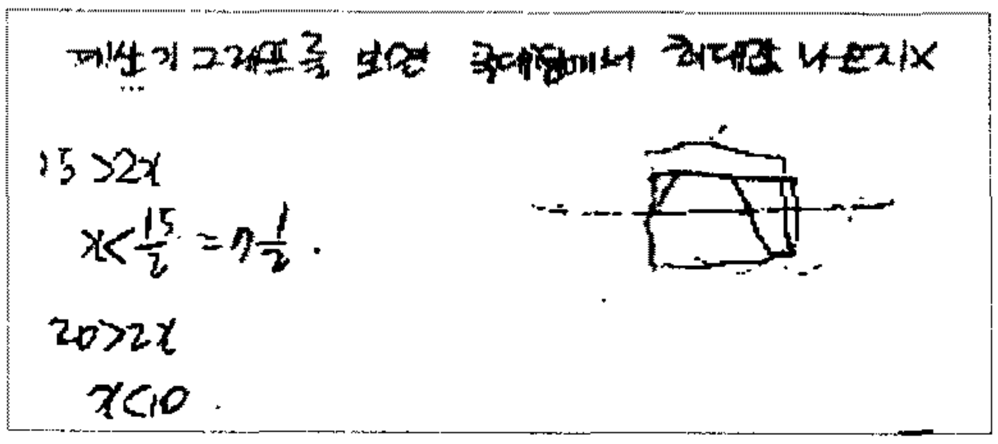
[그림 V-8] CAS로 구한 대수적인 해(KS_1)

그래프창(V-Window) 설정이 부적절하여 문

<표 V-1> 3차방정식의 근사해 구하기 해법

S고등학교 2학년생 (한국)			L 고등학교 11학년생 (미국)		
해법	인원	결과	해법	인원	결과
그래프교점	4	1.4498…, 4.4652…(정답)	그래프교점 / 또는 Solver (19명)	3	1.4498…, 4.4652… (정답)
				5	1.44…, 4.46…, 11.58… (x값 3개)
Numsolve	4	1.4498…(1개 근사해)		10	1.44… (1개 근사해) (*4명 포함)
				1	지필전개 오류
			표 만들기	(*4)	1.44…(범위추정 후 그래프 이용)
				2	답을 구하지 못함.
			지필 대수조작	4	답을 구하지 못함
			문자표현 시도	1	풀이없음

제해결에 실패한 사례도 있다. [그림 V-9]에서 KS_7은 극댓값이 그래프창의 y범위를 벗어나 화면에 극대점이 나타나지 않자 "극대점에서 최대값이 나오지 않는다(×)"며 답을 구하지 못하였다.



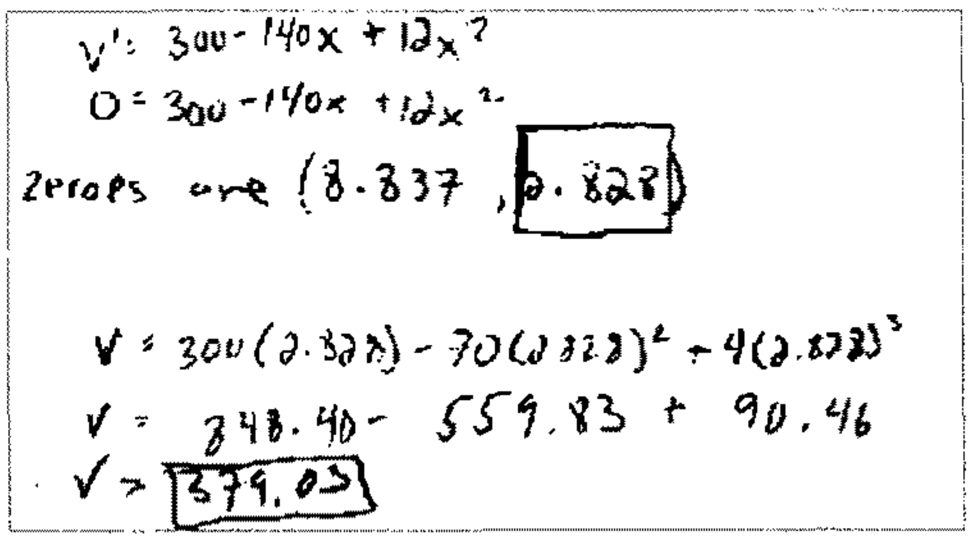
[그림 V-9] 부적절한 Window 설정(KS_7)

한국학생들의 최적화문제 풀이를 <표 V-2>에 요약하였다.

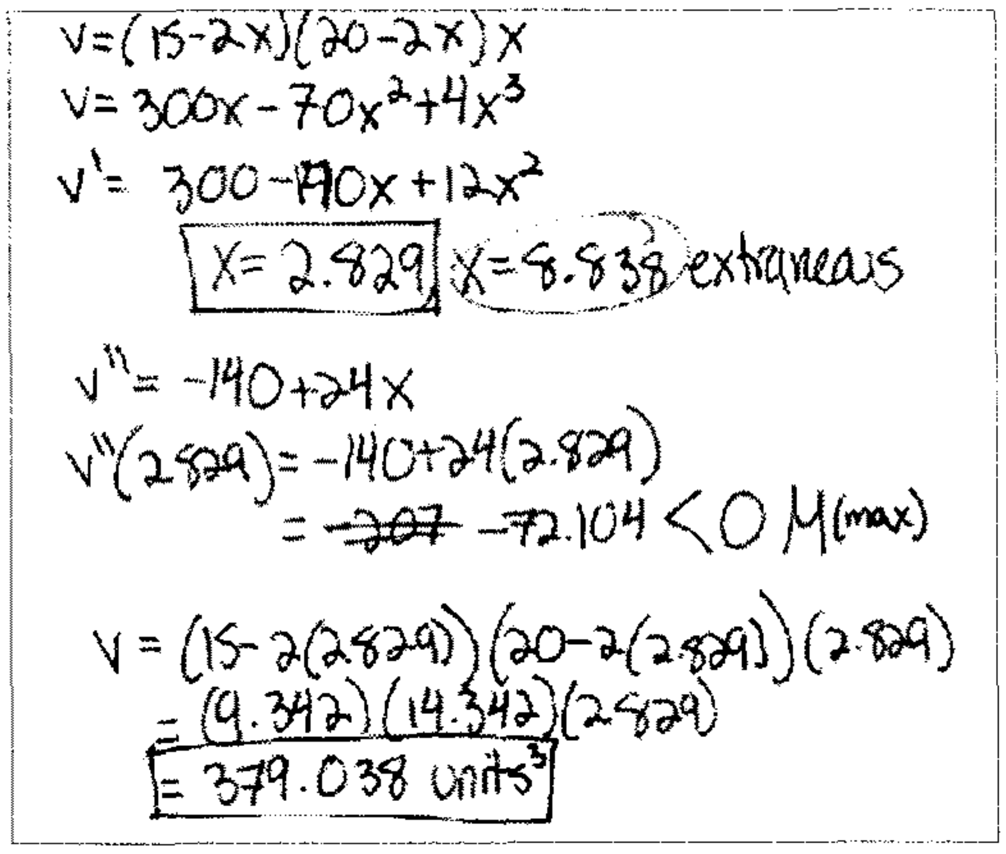
나. 미국학생의 최적화문제 해결

21명이 이 문제의 풀이를 시도하여, 1명은 표를 만드는데 그쳤고 20명이 상자의 부피를 식으로 바르게 나타냈으며, 부피의 최댓값을 바르게 구한 학생은 모두 12명이었다.

문제해결을 시도한 학생 중 2명은 그래프를 이용하여 정답을 구했다. 17명이 지필계산으로 도함수 (y'[그림 V-10], 또는 y'와 y''[그림 V-11])를 구하여 $y'=0$의 근사해 x를 구하여 대입하여 극댓값을 구하였다. 이 과정에서 학생들은 구한 x값을 원래 식에 대입한 식도 쓰고 계산결과도 기록하였다. 10명이 이 과정의 수치계산에 CAS를 사용하였다. 도함수를 구하여 풀이를 시도한 학생 중 7명은 y' 또는 y''을 계산하였으나 의미를 제대로 파악하지 못하여 문제해결에 실패하였다. 미국학생들의 최적화문제 풀이를 <표 V-3>에 요약하였다.



[그림 V-10] US_5(도함수=0, 대입)



[그림 V-11]이차도함수로 극대점 찾기(US_{19})

<표 V-2> 최적화문제 풀이 (한국학생)

식 세우기		접근방법	인원	결 과	비고
바른 식	7	그래프 이용	1	379.0378 (극대점의 y좌표)	정답
			1	답 못구함 (극대점 찾기 실패)	Window설정 부적절
		그래프이용(y'구함)	2	379.0378	정답
		$y'=0$, y계산	1	$(4375+1625\sqrt{13})/27$ (대수적 해)	(CAS사용)정답
			1	최종답 없음.	지필계산시도
		무응답	1	-	
무응답	1	무응답	1	-	전혀 응답없음.

본 연구에서 CAS는 모델링 문제해결의 도구로 사용되었다. CAS는 그래프해법이나 명령어를 지원함으로써 결과적으로 수학적 모델링을 도울 수 있었다. 그러나 문제해결에 필요한 개념이나 통찰이 없이 CAS를 사용하는 것은 문제해결에 전혀 도움이 되지 못하였다.

3. 연구문제 결과

- CAS 환경에서 학생들이 보이는 대수문제 해결 과정의 특징은 무엇인가?

첫째, 문제 상황에 적절한 수학모델 구성에 있어 식의 구성에는 큰 어려움을 보이지 않았으며 두 집단 사이에 큰 차이를 보이지 않았다. 정의역을 조건으로 명시하여 주목한 경우가 매우 적었다. 그러나 비록 조건을 명시하지는 않았지만 최종 답에서 조건을 적용한 사례는 많았다. 특히 한국 학생은 그래프 교점으로 풀이에 접근한 학생 모두가 조건을 적용하여 2개의 값(정답)을 최종적으로 제시하였으나 미국 학생의 경우 3개 교점에서 x값 3개를 구하거나 1개만 답으로 한 경우가 많았다.

둘째, 수학적 분석과 풀이과정에서 두 집단 사이에 전략적 차이가 발견되었다. 한국 학생은 알고리즘에 크게 의존하고 풀이과정도 간략히 기록한 데 반하여 미국 학생은 풀이에 규칙의 적용과 확인 과정을 포함시키고 상대적으로 답안을 상세히 기록하였다.

예를 들어 한국 학생은 극대점을 그래프 개형으로 단번에 찾은 반면, 미국학생 상당수는 y''를 구하여 극대극소를 판단하였다. 미국학생 다수가 방정식의 해를 구하기 전에 표를 작성하여 범위를 확인하였으며 함수값을 구하는 경우에도 값의 대입을 나타내는 중간식을 기록하고 최종 답을 기록하였다. 한국학생 중 대응표를 작성한 학생은 아무도 없었다. 이 차이는 두 집단의 도구장착의 정도 차이, 누적된 학습경험의 차이, 또는 둘 다에 기인한 것일 수 있다.

셋째, 수학적 풀이 결과의 해석 및 적용 단계에서 학생들은 문맥에 대한 이해가 부족한 사례가 발견되었다. 그런데 한국학생은 부피를 CAS로 구한 근호가 포함된 식으로 제시하여 실생활 상황에 대한 인식부재로, 미국학생은 방정식의 해가 정의역을 벗어나는 답을 제시하는 등 상황 관련 정의역에 대한 인식부재로 그 양상을 달리 하였다.

넷째, 두 집단 모두 제한적인 대수통찰력을 보이고 있었는데, 그 양상이 다소 달리 나타났다. 한국학생의 경우 의사소통에 어려움을 보인 경우가 많았다. 답안기록을 알아보기 어려운 정도로 글씨를 흘려 쓰거나 중간과정이 부정확하고 계산이 기계적이었으며 중간 과정 없이 답만 쓴 경우도 많았다. 반면, 미국학생들은 또렷한 필체로 답안을 기록하였으며 상대적으로 길게 풀이과정을 서술하였다.

미국 학생들은 풀이과정에서 표를 사용하는

<표 V-3> 최적화문제 풀이 (미국학생)

식세우기		접근방법	인원	결과	비고
바른 식	20	그래프	2	379.03 (극대점 y좌표)US6,10	정답
		$y'=0$, y계산	10	379.03, 379.037 (y계산)	정답 (x=2.82대입)
			7	최종답이 거나 오답.	y', y''의미 모름
표	1	무응답	1	-	
무응답	5	-	1	-	-

사례가 많았으며 자주 답을 확인하였으며, 기호와 의미의 연결에 어려움을 보이는 사례가 많았다.

- CAS 활용방식에서 학생들이 보이는 특징은 무엇인가?

첫째, 두 집단 모두 문제해결 첫 단계부터 CAS를 사용한 경우는 없었으며 기본적으로 지필계산을 선호하였다. 그러나 미국 학생의 경우 수량계산을 위한 계산기 사용이 자연스러운 반면 한국학생들은 CAS를 단순계산에 사용하는 것을 부담스럽게 여겼다. 한국학생은 지필조작으로 수행이 매우 복잡한 경우-근호가 있는 식의 대입-에 대수조작을 CAS로 대신하여 답을 구하였다.

둘째, 미국학생들은 근사해 풀이방식(Newton Method)을 인식하였으나 한국학생들은 근사해의 계산방식을 전혀 의식하지 못하고 있었다. 따라서 한국학생의 경우 근사해를 하나만 제시하는 명령어와 모든 근사해를 제시하는 명령어의 차이에 주목하지 않았다.

셋째, 학생들은 지필환경에서의 문제풀이 방식을 CAS 환경에서도 그대로 유지하는 경향을 보였다. 지필조작으로 방정식 $f(x)=g(x)$의 풀이를 위해서는 식을 $f(x)-g(x)=0$으로 변형하여 근을 구한다. 그런데 학생들은 CAS 환경에서 그래프로 해를 구하는 경우에도 미국 학생 1명을 제외하고 모두 학생이 $y=f(x)-g(x)$와 $y=0$(x축)의 교점을 이용하여 답을 구하였다. 이는 근본적으로 지필환경에서의 해법인 것이다.

- CAS장착이 대수모델링에 각각 어떤 가능성과 억제력으로 나타나는가? 억제력이 학습기회로 활용될 수 있는가?

본 연구에서 학생들의 문제해결과정과 CAS 활용방식을 분석한 결과, CAS장착은 지필기법을 키누르기로 대체하는 것 이상으로 문제해결에 가능성과 억제력으로 작용하였다. 그러나 도구장착에 의한 억제력은 새로운 학습의 기회가 되기도 한다.

- 가능성

CAS의 계산과 그래프 지원기능은 수학교육에서 수학적 모델링을 용이하게 하고 지도계열을 변화시킬 수 있게 하며 그 가능성이 본 연구에서도 드러났다.

또 CAS는 수학적 연결을 실현하게 한다. 지필환경에서 다루기 쉽지 않은 표-그래프-식 사이의 연결을 용이하게 한다. 학생들에게 표상사이의 연결 기회를 제공하고 이에 주목하게 할 수 있게 함으로써 대수적 통찰(Pierce & Stacey, 2002)의 범위를 확장시킬 수 있다. 일부 학생들의 경우 표를 작성하고도 풀이에 도움이 되는 정보를 얻지 못하였으나 이들은 표-그래프-식 사이의 유기적인 관계를 인식하고 있음을 보여준다. CAS 환경은 표상으로부터 정보해석과 표상사이의 연결능력이 수학교육의 중요한 주제가 되게 한다.

CAS는 계산알고리즘보다 의미에 주목하게 한다. CAS가 제공하는 다양한 표상은 이미 학습한 정리를 문제 상황에 적용 가능하게 하여 정리의 의미가 지속적으로 수학활동에서 드러나게 된다. 미국학생 다수가 '폐구간 [a, b] 에서 연속인 함수 f에 대하여 f(a)와 f(b) 사이의 값을 k 라고 하면 f(x) = k 를 만족하는 x 가 a와 b 사이에 적어도 한 개 존재한다'는 중간값 정리를 적용하여 방정식의 해의 범위를 추측하였는데 이는 CAS가 표 작성을 도왔기 때문에 가능하다.

• 억제력과 기회

CAS를 사용하기 위하여 요구되는 지식과 방법이 있다. 그 지식과 방식이 사용자의 기존 인식과 차이가 날 때 CAS 장착이 학습을 억제하는 힘(억제력)으로 작용도 한다. 억제력은 대부분 학생들이 CAS 사용으로 예기치 않은 답을 얻게 되는 상황에서 나타난다. 그러나 그 억제력은 종종 '수학적으로 의미있으나 잘 드러나지 않던' 중요한 주제를 다룰 수 있게 하는 기회가 된다. 본 연구에서 CAS 정착의 억제력이자 동시에 중요한 수학주제의 학습기회를 제공하는 사례를 발견하였다.

첫째, CAS는 실수의 두 가지 표현 양식에 주목하게 한다. CAS를 사용하는 경우 학생들은 사용 목적과 문맥에 따라 CAS의 실수의 표현 방식을 소수 표현이나 (근호 등을 포함한) 대수적 표현 중 하나로 선택해야 한다([그림 V-12]). 그러므로 실수의 표현방식에 대한 이해와 문맥의 인식이 CAS로 인해 새롭게 주목을 받게 되는 측면이다. ClassPad에서는 기본설정을 소수와 복소수([그림 V-12])로 하게 되는데 설정에 따라 답이 달라진다. [그림 V-12]의 (iv)에 이 연구에 사용된 3차 방정식의 해가 두 가지 설정에서 동일하게 나타났는 데 이는 3차 방정식을 포함하여 방정식의 대수적 해법 가능성에 대한 논의로 심화시킬 기회를 제공한다.

둘째, CAS 도입은 근사해의 계산방식에 주목하게 한다. 모델링 상황에서 필요한 답은 소수(근사해)이지 기호 중심의 대수적 표현이 아니다. CAS는 방정식 풀이를 지필조작에서 키조작으로 대체하게 하면서 학생들로 하여금 명령어 'NumSolve'와 'solve'(ClassPad 경우)의 차이에 주목하게 한다. 전자는 Newton 방법에 의한 1개의 근사해를, 후자는 모든 근사해(또는, 설정에 따라, 모두 대수적 해)를 출력하게 되는데, 이러한 과정에서 근사해의 필요성과 근사해 계산방식이 새로운 주제로 떠오르게 된다.

셋째, CAS는 문제해결의 강력한 도구로 그래프를 사용할 수 있게 한다. 그러나 CAS의 그래프 기능이 유용한 도구가 되기 위하여 사용주체의 기본적 수감각과 주어진 함수의 성질과 특징에 대한 이해가 필수적으로 요구된다. 그래프해법은 식의 입력과 그래프의 해석 능력

	복소수(Complex) 설정	소수(Decimal) 설정
i	solve(x^2-2=0,x) $\{x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}\}$	solve(x^2-2=0,x) {x=-1.414213562,x=1.414▸
ii	solve(x^2-2=0,x)|(x>0) $\{x=\sqrt{2}\}$	solve(x^2-2=0,x)|(x>0) {x=1.414213562}
iii	solve(x^3+1=0,x) $\left\{x=-1, x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}, x=\frac{1}{2}+\right.$▸	solve(x^3+1=0,x) {x=-1}
iv	solve(x(20-2x)(15-2x)=▸ {x=1.449840476,x=4.4652▸	solve(x(20-2x)(15-2x)=▸ {x=1.449840476,x=4.4652▸

[그림 V-12] 수의 두 가지 표현양식 (소수-수식표현)

뿐 아니라 적절한 화면설정을 요구한다. 적정한 모양의 그래프가 화면(V-Window)에 그려지도록 x, y 범위를 사전에 대략 추측할 수 있어야 한다. 적정 그래프가 화면(윈도우창)에 전혀 나타나지 않거나 일부만 나타나는 경우에도 Intersection, Maxima등 명령어로 화면을 벗어난 부분의 그래프정보를 얻을 수 있다. 그러나 이때 CAS는 블랙박스가 되어 문제해결에 의미를 갖기 어렵다.

VI. 결론 및 논의

우리나라 중학생들의 수학성취도는 높게 나타나지만 자신감이나 수학선호도는 최하위권에 이르며(Mullis, et al,, 2004), 중등수학에서 최고 수준의 성취도를 보이던 우리나라 학생들이 대학생이 되어서 수학학력은 매우 우려할만한 수준(한국대학신문, 2004.7.14; 한국일보, 2007.4.12 등)에 있다는 사실은 우리나라 중등 수학교육을 점검하고 방향을 재설정할 필요가 있음을 시사한다.

CAS등 기술공학이 편재한 사회에서도 대수는 여전히 핵심적인 위치에 있다. 그러나 기법 중심의 전통적 대수교육의 방향은 재고해야 한다. 최근 한 국제비교연구(Greenes, Chang & Ben-Chaim, 2007) 결과는 우리나라의 대수교육을 현주소를 보여준다. 이 연구결과 우리나라 중학생들은 1차 함수의 기울기, 절편 등을 구하는 계산문제에서는 미국학생보다 다소 우위를 보이나 기울기의 해석과 응용에 있어서는 미국과 이스라엘 학생보다 낮은 성취를 보였다. 알고리즘에는 강하나 응용에 약하며, 과정을 생략하거나 간략히 답쓰기, 읽기 어려울 정도로 불분명한 답안기록, 아무것도 기록하지 않은 무응답 사례가 지나치게 많은 것이 우리나라 학생들의 특징적인 반응으로 나타났다. 본 연구에서도 기계적 계산, 과정을 생략하거나 간략히 답쓰기, 읽기 어려울 정도로 불분명한 답안기록 등이 나타나 대수교육의 실태를 점검하고 근본적인 방향을 재설정할 필요성이 크게 대두된다.

CAS의 도입은 중등수준에서 대학까지 학교수학을 모델링 중심으로 바꾸고 수학의 응용 수준을 크게 상승시킨다. 호주 빅토리아주의 CAS에 기반한 고등학교 수학시험 문항을 보면 미적분 기본 공식을 표로 제공하고 상당 수준의 수학을 다루고 있음을 알 수 있다(http://www.vcaa.vic.edu.au/vce/studies/mathematics/cas/casexams.html). 미적분에서 공식을 빼고, 계산기법을 CAS에 넘기고 남는 것이 무엇이며 그것의 가치가 무엇인가를 숙고할 필요가 있으며, 동일한 관점에서 수학교육 전반을 CAS 환경을 가정하여 방향 탐색을 할 필요가 있다. 학생들이 다룰 수 있는 문제의 질과 수준이 곧 미래의 국가경쟁력이 될 것이며 현재 수학교육의 힘이 될 것이기 때문이다.

CAS가 학습도구로 사용하기 위하여 도구로 발생되어야 한다고 보고 그 과정을 도구장착과 도구화의 두 측면에서 분석한 연구(Artigue, 2001; Drijvers, 2003; Trouche, 2003)는 CAS 도입이 수학교육에 효과로 나타나기 위하여 구체적인 연구의 선행이 필수적임을 말해준다.

본 연구에서 두 나라학생들의 문제해결 전략에 차이를 보인 것은 두 나라 학생들의 학습경험에서 도구장착 정도의 누적된 차이가 교육과정(교과서 활동)과 문제해결전략의 차이로 드러난 것일 수 있다. 이 연구에서 CAS 장착은, 예를 들어 표의 사용같은 새로운 전략은 현재 도구 지원 여부보다는 지금까지의 학습경험, 즉 고등학교 수준의 문제해결에서 표 사용 경험여부가 전략 선택의 기준으로 작용한 것으로 판

단된다. 그 이유는 미국 학생의 경우 수업시간에 지속적으로 TI-83을 사용하여 왔고 거의 모든 학생이 표 작업을 하였으며 또 표 작업은 계산기 지원이 있기 때문에 가능한 전략이기 때문이다.

본 연구는 CAS 도입을 위한 기초연구로 여러 후속연구를 필요로 한다. 도구 자체의 기능과 가능성을 익히고 수학 교과에 이를 활용하는 두 가지 방향의 작업이 필수적이다. 우리나라 학생들의 경우 계산기 사용효과가 부정적으로 나타난 국제연구결과나 적절한 CAS 명령어 ("solve")를 선택하지 않은 것은, 도구장착 단계에서 CAS 계산기 기능이나 가능성을 익히는 물리적 부담 외에 교육과정이 허용하지 않는 기기를 사용하는 것에 대한 심리적 부담이 함께 작용했을 개연성이 있다. 도구장착에 영향을 주는 물리적, 심리적 요인을 규명하는데 심층적 연구가 이루어져야 할 것이며 도구장착의 가능성과 억제력, 학습기회 확대의 기회 탐색이 다양한 문제 상황에서 이루어져야 할 것이다.

도구장착으로 가능성과 억제력은 대수교육과정의 변화를 요구한다. 호주 사례에서 보는 바와 같이 CAS의 가능성은 매우 수준 높은 응용문제를 다룰 수 있게 하며, 실수의 소수표현 같은 억제력은 Newton방법 등 근사해로 학교수학의 영역을 확장시킨다. 그러므로 CAS 도입으로 인한 교육과정과 평가의 변화를 반영한 구체적인 자료개발과 평가문항개발을 포함한 연구가 수행되어야 한다.

또 모델링 상황에서 CAS를 활용하게 한 본 연구와 달리 CAS를 패턴 발견이나 일반화의 도구로 사용하는 경우 CAS가 학습자의 지식과 사고방식에 작용하여 새로운 지식을 창출하는 도구화 과정을 규명하는 국내 후속연구가 필요하다.

변화하는 사회가 요구하는 수학적 능력이 지식이나 절차의 덩어리가 아니라 수학적 소양과 문제해결능력이라는 데 최근 수학교육 학계와 사회가 견해를 같이 하고 있다. 정보기술공학 사회에서 기술공학은 더 이상 수학을 위협하는 경쟁적 위치에 있는 것이 아니라 수학학습과 문제해결을 돕는 도구이며, 기호조작을 포함하여 탁월한 수학적 기능을 제공하는 CAS 역시 수학을 돕는 도구로 활용되어야 한다. Usiskin(1999)은 산술이 루틴이 되어 인류에게 강력한 도구가 된 것은 역사적으로 십진기수법과 지필도구의 출현이었다는 점을 상기시키면서, 이제 새로운 기술공학 도입으로 인해 대수교육의 변화가 불가피하다고 하였다. 언제, 어디서, 얼마나, 어떻게, 무슨 목적으로 CAS를 활용하게 할 것인가에 관한 광범위한 논의가 교육과정개발과 함께 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

교육부(1997). **수학과 교육과정 제 7차교육과정**. (교육부 고시 제 1997-15호 [별책 9]). 서울: 대한교과서주식회사.

_______(1997). **수학과 교육과정 제 7차교육과정**. (교육부 고시 제 1997-15호 [별책 9]). 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **초중등학교 수학과교육과정** (교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8] 대한교과서주식회사.

손재연 · 김민정(2006). Hand-Held CAS 교수-학습 실제(1)-표상연결을 통해 **수학교육프로시딩**. 한국수학교육학회.

손홍찬(2005) 수학교수학습에서 CAS 활용이 가지는 교수학적 의미. **청람수학교육 제 17집**. pp.31-58. 수학교육연구소: 한국교원대학교.

장경윤(2007). ICT 시대의 대수교육의 방향과 과제. **학교수학. 9**(3) pp.409 -426. 대한수학교육학회.

하준홍(2004). 제7차 중등교과과정을 지원할 수학학습 Web용 CAS콘텐츠 개발. **교수현장연구학기제 연구결과보고서.** vol.2004(1) pp.343-370. 한국기술교육대학교 산학협동연구센터.

한국교원대학교(2005). **청람수학교육. 제 18집.** 제 18회 수학교육세미나. CAS를 활용한 수학교육의 이론과 실제. 한국교원대학교 수학교육연구소.

한국대학신문(2004.7.14). "한국 대학생 이공계 학력 '바닥'".

한국일보(2007.4.12). "전국 20개대 976명 수학평가서 평균 40점....상위권 대학에서도 편차 76점이나"

한세호(2005). 중등수학교수학습에서 CAS의 활용. **청람수학교육 제 17집.** pp.117-140. 수학교육연구소: 한국교원대학교

허만성(2000). 컴퓨터대수체계(CAS) 모듈이 포함된 Graphing Calculator를 활용한 교실수업모형. 수학교육논문집. **수학교육논문집.** vol.10. pp.515-517. 한국수학교육학회

Artigue, M. (2001). Learning Mathematics in a CAS environment. CAME Symposium 2001: Theme 1 Presentation.

________ (2005). The Integration of Symbolic Calculators into Secondary Education: Some Lessons from Didactical Engineering. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche. (eds.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Chapter 9. (pp.231-304). Mathematics Education Library* vol. 36. New York: Springer Science+Business Media, Inc.

Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Utrecht: CD-β Press 3-25.

Fey, J. & Hirsch, C. (1992). *Calculators in Mathematics Education.* 1992 Yearbook, Reston, VA: NCTM.

Greenes, C., Chang, K. & Ben-Chaim, D. (2007). International Survey of High School Students' Understanding of Key Concepts of Linearity. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Suh. (eds.) *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* vol. 2. (pp. 273-280), Seoul: PME.

Harvey, J. (1992). Mathematics Testing with Calculators: Reasoning the Hostages. In T. Romberg. (ed.). (1992) *Mathematics Assessment and Evaluation: Imperatives for Materials.* (pp.139-) SUNY Press.

Heid, M. (1996). *Algebra in a Technological World: Addenda Series Grades 9-12.* Reston, VA: NATM.

Lagrange, J. (2001). A multi-dimensional study of the use of IC techologies: The case of computer algebra. In J. Novotna (Ed), Proceeding of the second conference of the Europenn Society for Research in Mathematics Education (pp. 170-182). Marianske Lazne, Czech Republic: Charles University.

________. (2005). Using Symbolic Calculators to Study Mathematics. In D. Guin,, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic*

Calculators. (pp. 113-136). New York: Springer Science+Business Media, Inc..

Mullis, I., Martin, M.,Gonzalez, & Chorostowski, S. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings form IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.* TIMSS and PIRLS International Study Center, Boston College.

Mullis, I., Martin, M.,Gonzalez, E., O'Connor, K., Chorostowski, S., Gregory, K., Garden, R. & Smith, R. (2001). *Mathematics Benchmarking Report: TIMSS 1999-Eighth Grade. Achievement for U.S. States and Districts in an International Context.* International Study Center, Boston College.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM

Oldknow, A. & Flower, J. (eds.) (1996) *Symbolic Manipulation by Computers and Calculators.* Locester, UK: The Mathematical Association.

Pierce, R. U., & Stacey, K. C. (2002). "Algebraic insight: The algebra needed to use computer algebra systems." *The Mathematics Teacher*, 95(8), 622.

Tall, D.(1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, Monaghan & Pierce. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, Assessment, and Learning. *In The future of the teaching and learning of algebra.* (pp.153-186). The 12th ICMI Study, the university of Melbourne, Australia.

Trouche,L.(2003, June). Managing the Complexity of Human/machine Interaction in a Computer Based Learning Environment(CBLE): Guiding Studnets' Process Command Through Instrumental Orchestrations. CAME 2003 at IUFM Reisms, France.

Usiskin, Z. (1999). "Why is algebra important to learn?" In B. Moses. *Algebraic Thinking: Grades K~12.* pp.22-30. Reston, VA: NCTM NCSM.

http://www.lkl.ac.uk (CAME 홈페이지)

http://www.vcaa.vic.edu.au/vce/studies/mathematics/cas/casexams.html

Comparative Study in Algebra Education with CAS: Korea and US cases

Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This study was designed to gain insight to adopt CAS into secondary level algebra education in Korea. Most inactive usage of calculators in math and most negative effects of calculators on their achievements of Korean students were shown in International studies such as TIMSS-R. A comparative study was carried out with consideration of mathematical backgrounds and technological environments. 8 Korean students and 26 US students in Grade 11 were participated in this study. Subjects' Problem solving process and their strategies of CAS usage in classical Box-problem with CAS were analyzed. CAS helped modeling by providing symbolic manipulation commands and graphs with students' mathematical knowledge.

Results indicates that CAS requires shifts focus in algebraic contents: recognition of decimal & algebraic presentations of numbers; linking various presentations, etc. The extent of instrumentation effects on the selection of problem solving strategies among Korea and US students. Instru-mentation

* key words : secondary algebra(중등 대수) comparative study(비교연구) technology(기술공학) Computer Algebra System(CAS)(컴퓨터대수체계) cubic equation(3차방정식) maxima(극댓값) White Box/Black Box(화이트박스/블랙박스) Instru-mentalization(도구화) instrumentation(도구사용) problem solving process(문제해결과정)

논문접수 : 2008. 5. 19
심사완료 : 2008. 6. 16