선형행렬부등식을 이용한 불확실성 이산시간 특이시스템의 강인 보장비용 상태궤환 제어기 설계

論 文
57-8-19

Design of Robust Guaranteed Cost State Feedback Controller for Uncertain Discrete-time Singular Systems using LMI

金 鍾 海†
(Jong-Hae Kim)

Abstract – In this paper, we consider the design method of robust guaranteed cost controller for discrete-time singular systems with norm-bounded time-varying parameter uncertainty. In order to get the optimum(minimum) value of guaranteed cost, an optimization problem is given by linear matrix inequality (LMI) approach. The sufficient condition for the existence of controller and the upper bound of guaranteed cost function are proposed in terms of strict LMIs without decompositions of system matrices. Numerical examples are provided to show the validity of the presented method.

Key Words : Discrete-time singular systems, Guaranteed cost control, Parameter uncertainty, LMI

1. 서 론

산업현장에서 많이 발생하는 제약적 제어문제, 전기회로, 섭동 제어이론과 대규모 시스템 등은 특이시스템으로 모델링 되어진다. 또한, 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 특징들로 인하여 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근까지 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다[1-9]. 일반적인 상태공간 문제와 비교해 보면, 특이시스템은 더욱 복잡하고 다양한 구조를 가진다. 더욱이, 특이시스템의 다양한 동적 성능지수의 연구분야는 상태공간 시스템에서 발생하지 않는 임펄스 모드(impulsive mode)와 비동적 모드(non-dynamic mode)로 인하여 상태공간 시스템보다 제어기 설계방법이 어렵다[1]. 또한, 비선형 방정식을 적절히 선형화하는 과정에서 계수의 문제가 발생하는 특이시스템에 직면하면 제어기 설계를 위하여 특이현상을 없애는 제약조건을 주거나 원래 시스템의 동특성을 무시하여 시스템의 불확실성이나 모델링 오차 등이 증가하여 실제 적용시에 예상하지 못한 임펄스나 히스테리시스 등의 물리적 현상이 일어나고, 이런 현상은 기존 상태공간 모델로는 적절히 다룰 수가 없다[2,3].

특이시스템의 대부분의 연구결과들이 연속시간 시스템에 대하여 이루어지다가 최근에 이산시간 시스템에 대한 연구결과 들이 나오고 있다. 특히, Hsiung[4]와 Xu와 Yang[5]은 이산시간 특이시스템에 대한 이산시간 특이시스템의 유계실수정리(bounded real lemma)를 제시하였다. 또한, 기존 결과들의 등호조건을 없애는 완벽한 LMI 형태의 유계실수정리를 위한 방법은 Zhang과 Jia[6]가 제안하였다. Xu 등[7,8]은 시스템의 상태행렬에 시불변 노옴 유계의 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 안정화를 보장하는 상태궤환 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 제어기가 존재할 조건들이 행렬부등식이나 리카티 부등식으로 표현되어져 있어서 몇 가지 변수들을 미리 설정하지 않고는 최적의 제어기를 구하기 힘들다는 단점이 있다. 따라서, 본 논문의 첫 번째 목적은 모든 변수의 견지에서 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식(linear matrix inequality)으로 제어기의 충분조건을 표현하는 것이다. 최근, Wo 등[9]은 시불변 노옴 유계 형태의 변수 불확실성을 가지는 이산시간 대규모 특이시스템에 강인 안정화를 위한 제어기 설계방법을 제시하였다. 따라서, 본 논문의 두 번째 목적은 일반적으로 변수 불확실성에서 사용하는 정합조건의 시변 노옴 유계를 가지는 불확실성을 다룬다. 또한, 대부분의 특이시스템의 연구결과가 수식전개의 편이성을 위하여 시스템 행렬의 특이치 분해(singular value decomposition)를 사용한다. 따라서, 본 논문의 다른 목적은 시스템 행렬의 분해로 인해서 발생하는 문제를 없애는 제어기의 존재조건을 선형행렬부등식으로 표현하는 것이다. Chang과 Peng[10]의 연구결과 이래로 보장비용 제어문제는 상당히 광범위하게 다루어져 왔다. 특히, Kim[11]과 Shi 등[12]은 정합조건의 시변 노옴 유계의 변수 불확실성과 시간지연을 가지는 불확실성 이산시간 시스템에 대한 보장비용 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 선형행렬부등식 조건으로부터 제어기를 설계하는 연구결과는 미비하다. 따라서, 본 논문의 마지막 목적은 보장비용 함수의 상한치(upper bound)를 최소화하고 시변 변수 불확실성을 갖는 이산시간 특이시스템의 강인 보장비용 제어기를 설계하는 것이다. 정합조건형태의 시변 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 안정성과 보장비용 함수의 최적값(optimal value)을 주는 강인 보장비용 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 모든 변수를 동시에 구하는 기법을 본

† 교신저자, 正會員 : 鮮文大學校 電子工學部 副敎授・工博
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr
接受日字 : 2008年 1月 31日
最終完了 : 2008年 6月 16日

논문에서 제시한다. 마지막으로, 제안한 제어기 설계방법의 타당성 검증을 위하여 예제를 보인다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $\deg(\cdot)$, $\det(\cdot)$ 및 $rank(\cdot)$는 $(\cdot)$에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant) 및 계수(rank)를 나타낸다. 그리고, I, I_r, R^r 및 $R^{n\times n}$은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, $r\times r$ 차원을 가지는 단위행렬 및 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터, $n\times n$ 차원을 가지는 실수 행렬을 각각 의미한다. $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이다.

2. 문제설정

시변 변수 불확실성(time-varying parameter uncertainty)을 가지는 이산시간 특이시스템

$$Ex(k+1)=[A+\Delta A(k)]x(k)+Bu(k) \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in R^n$는 상태변수, $u(k)\in R^m$는 제어입력변수, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고, 모든 시스템 행렬은 적절한 차원(dimensions)을 가진다. 변수 불확실성은 노옴(norm)의 유계(bound)를 가지며 정합조건(matching condition)을 만족하는

$$\Delta A(k)=DF(k)H \tag{2}$$

의 형태이고, D와 H는 알고 있는 상수행렬(known constant trices)이고, $F(k)$는

$$F(k)^T F(k)\le I \tag{3}$$

을 만족하는 모르는 행렬이다. 또한, 보장비용 성능지수는

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[x(k)^T Qx(k)+u(k)^T Ru(k)] \tag{4}$$

이다. 여기서 Q와 R은 양의 정부호(positive-definite) 행렬이다. 따라서, 보장비용 함수 (4)를 최소화하는 강인 보장비용 상태궤환 제어기는

$$u(k)=Kx(k) \tag{5}$$

로 표현하고, 설계하는 강인 보장비용 제어기의 목적은 이산시간 특이시스템의 변수불확실성이 존재함에도 불구하고 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 보장비용 성능지수를 최소화하고 안정성을 만족하는 것이다. 이산시간 특이시스템 (1)과 제어기 (5)로 구성되는 폐루프(closed-loop) 시스템은

$$Ex(k+1)=(A+BK+\Delta A(k))x(k) \tag{6}$$

과 같다.

정의 1: 폐루프 특이시스템 (6)이 안정하고 보장비용 성능지수 (4)의 $J\le J^*$를 만족하는 상한치가 존재하는 제어 $u^*(k)$와 양의 실수 J^*가 존재하면, J^*는 보장비용의 상한치이고 $u^*(k)$는 불확실성 이산시간 특이시스템에 대한 강인 보장비용 제어이다.

정의 2[7,8]: $Ex(k+1)=Ax(k)$의 이산시간 특이시스템의 성질을 정의한다.

i) $\det(zE-A)\ne 0$이면 $Ex(k+1)=Ax(k)$는 정규적(regular)이다.

ii) $rank(E)=\deg[\det(zE-A)]$이고 정규적이면 $Ex(k+1)=Ax(k)$는 코잘(causal)이다.

iii) 정규적이고, $\det(zE-A)$의 모든 근이 단위원 내에 존재하면 $Ex(k+1)=Ax(k)$는 안정하다.

정의 3[4,5,6]; $Ex(k+1)=Ax(k)$의 시스템이 정규적, 코잘 및 안정성을 만족하면 시스템은 허용가능(admissible)하다라고 정의한다.

본 논문에서 수식전개를 위한 편리한 보조정리 몇 가지를 소개한다.

보조정리 1[4,5]: $Ex(k+1)=Ax(k)$이 허용가능하기 위한 필요충분조건은

$$\begin{aligned} &E^T XE\ge 0\\ &A^T XA-E^T XE<0 \end{aligned} \tag{7}$$

을 만족하는 대칭행렬 $X\in R^{n\times n}$가 존재하는 것이다.

보조정리 1은 이산시간 특이시스템의 안정성을 만족하기 위한 선형행렬부등식 문제를 만드는 것이 힘들뿐 아니라 식 (7)에는 등호도 포함되어 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, Zhang과 Jia[6]가 제시한 다음의 보조정리 2를 본 논문의 수식전개를 위하여 사용한다.

보조정리 2[6,9]: $Ex(k+1)=Ax(k)$이 허용가능하기 위한 필요충분조건은

$$A^T(P-Y^T SY)A-E^T PE<0 \tag{8}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrix) $P\in R^{n\times n}$와 대칭행렬 $S\in R^{(n-r)\times(n-r)}$이 존재하는 것이다. 여기서, $Y^T\in R^{n\times(n-r)}$는 $E^T Y^T=0$과 $rank(Y^T)=n-r$을 만족하는 하나의 행렬이다.

보조정리 3[9]: 대칭행렬 X의 역행렬이 존재하고, $\epsilon I-X>0$을 만족하는 양의 상수 ϵ이 존재하면, 아래의 조건

$$\begin{aligned} &(A+\Delta A(k))^T X(A+\Delta A(k))\\ &\le A^T[X+X(\epsilon I-X)^{-1}X]A+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k) \end{aligned} \tag{9}$$

을 만족한다.

3. 비약성 강인 보장비용 제어기 설계

본 절에서는 기존의 논문에서 사용한 시스템 행렬의 분해(decomposition)를 사용하지 않고 구하려는 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식 접근방법으로 불확실성 이산시간 특이시스템의 강인 보장비용 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법에 대한 알고리듬을 제시한다. 폐루프 시스템에 대하여 보장비용 성능지수의 최소화를 보장하고 허용가능한

이산시간 강인 보장비용 제어기 설계방법을 제안한다.

정리 1: 변수 불확실성을 가지는 이산시간 폐루프 특이시스템 (6)에 대하여, 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Omega & A^TX+K^TB^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ과 제어기 이득 K가 존재하면, 제어기 (5)는 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대하여 허용가능하고 이산시간 폐루프 특이시스템의 보장비용 성능지수의 최소화를 보장한다. 여기서,

$$\begin{aligned} \Omega = {} & A^TXA+A^TXBK+K^TB^TXA+K^TB^TXBK+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k) \\ & +Q+K^TRK-E^TPE \\ X = {} & P-Y^TSY. \end{aligned}$$

또한, 보장비용의 상한치는

$$J \le x(0)^TE^TPEx(0) \tag{11}$$

이 된다.

증명: 변수 불확실성을 가지는 이산시간 폐루프 특이시스템 (6)의 강인 안정성과 보장비용 성능지수의 최소화를 위하여 보조정리 2의 성질을 이용하면

$$[A+BK+\Delta A(k)]^TX[A+BK+\Delta A(k)]-E^TPE+Q+K^TRK<0 \tag{12}$$

의 관계를 가진다. 행렬부등식 (12)는

$$\begin{aligned} & x(k+1)^TE^TXEx(k+1)-x(k)^TE^TPEx(k) \\ & < x(k)^T[-Q-K^TRK]x(k)<0 \end{aligned} \tag{13}$$

을 의미한다. 또한 식 (12) 좌변의 첫 번째 수식은 보조정리 3으로부터

$$\begin{aligned} & [A+BK+\Delta A(k)]^TX[A+BK+\Delta A(k)] \\ & \le (A+BK)^T[X+X(\epsilon I-X)^{-1}X](A+BK)+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k) \end{aligned} \tag{14}$$

이다. 따라서, 식 (14)를 이용하면 식 (12)는

$$\begin{aligned} & (A+BK)^T[X+X(\epsilon I-X)^{-1}X](A+BK) \\ & +\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)+Q+K^TRK-E^TPE<0 \end{aligned} \tag{15}$$

와 같이 변형되고, 슈어 여수(Schur complement) 정리[13]를 이용하면 식 (15)는 식 (10)이 된다. 또한, 식 (13)의 양변을 0에서 T_f-1까지 아래와 같이 합하면

$$\begin{aligned} & -\sum_{k=0}^{T_f-1}x(k)^T[Q+K^TRK]x(k) > x(T_f)^TE^TPEx(T_f)-x(0)^TE^TPEx(0) \\ & -\begin{bmatrix} x(T_f) \\ x(T_f-1) \\ \vdots \\ x(1) \end{bmatrix}E^TY^TSYE\begin{bmatrix} x(T_f) \\ x(T_f-1) \\ \vdots \\ x(1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

을 얻는다. $T_f \to \infty$(또는 $T_f-1 \to \infty$)일 때, 폐루프 시스템은 안정하므로 $x(T_f)^TE^TPEx(T_f) \to 0$이 되고 보조정리 2에서 $E^TY^T=0$이므로 식 (16)의 마지막 항도 영이 되어서 결과적으로 식 (11)을 얻는다. ■

정리 1의 식 (10)은 구하고자 하는 변수의 견지에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하고 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화(convex optimization)가 불가능하므로 해를 구하기가 쉽지 않다. 또한, 보장비용 함수의 최소화를 위하여 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 최적화 문제로 변형하여야 한다. 따라서, 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 완벽한 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 강인 보장비용 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 아래 정리 2에서 제시한다.

정리 2: 시간지연을 가지는 시변 불확실성 특이시스템 (1)에 대하여, 다음의 최적화문제

minimize ρ

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & A^TP-A^TY^TSY & 0 & A^TPB-A^TY^TSYB \\ * & P-Y^TSY-\epsilon I & PB-Y^TSYB & 0 \\ * & * & \Gamma_2 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_2 \end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

$$-\rho+x(0)^TE^TPEx(0)<0 \tag{18}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 실수 ϵ과 ρ가 존재하면, 제어기 이득은

$$K=-[R+B^T(P-Y^TSY)B]^{-1}B^T(P-Y^TSY)A \tag{19}$$

로 표현된다. 여기서,

$$\begin{aligned} & \alpha = \|D^TD\|, \\ & \Gamma_1 = A^TPA-A^TY^TSYA+Q+\alpha\epsilon H^TH-E^TPE, \\ & \Gamma_2 = -R-B^TPB+B^TY^TSYB. \end{aligned}$$

증명: 식 (10)의 행렬부등식은

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^TXA+A^TXBK+K^TB^TXA+K^TB^TXBK \\ +\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)+Q+K^TRK-E^TPE \end{pmatrix} & A^TX+K^TB^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} = & \begin{bmatrix} A^TXA+Q+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)-E^TPE & A^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} \\ & +\begin{bmatrix} K^T(R+B^TXB)K+A^TXBK+K^TB^TXA & K^TB^TX \\ * & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} = & \begin{bmatrix} A^TXA+Q+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)-E^TPE & A^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} \\ & +\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ * & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix}(R+B^TXB)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix}^T \\ & -\begin{bmatrix} A^TXB \\ XB \end{bmatrix}(R+B^TXB)^{-1}\begin{bmatrix} A^TXB \\ XB \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{22}$$

와 같이 된다. 여기서,

$$\Lambda_1 = K^T(R+B^TXB)K + K^TB^TXA + A^TXBK + A^TXB(R+B^TXB)^{-1}B^TXA$$
$$\Lambda_2 = K^TB^TX + A^TXB(R+B^TXB)^{-1}B^TX.$$

또한, 식 (22)의 두 번째 행렬 표현은 식 (19)의 제어기 형태에 의하여 영행렬이 된다. 따라서, 식 (22)는

$$\Delta A(k)^T\Delta A(k) = H^TF(k)^TD^TDF(k)H \le \alpha H^TH \tag{23}$$

의 불확실성의 관계와 아래의 관계에 의하여

$$\begin{bmatrix} A^TXA+Q+\epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)-E^TPE & A^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} \tag{24}$$
$$-\begin{bmatrix} A^TXB \\ XB \end{bmatrix}(R+B^TXB)^{-1}\begin{bmatrix} A^TXB \\ XB \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix}(R+B^TXB)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix}^T$$
$$\le \begin{bmatrix} A^TXA+Q+\alpha\epsilon H^TH-E^TPE & A^TX \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} \tag{25}$$
$$+\begin{bmatrix} A^TXB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix}(R+B^TXB)^{-1}\begin{bmatrix} A^TXB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^TXA+Q+\alpha\epsilon H^TH-E^TPE \\ +A^TXB(R+B^TXB)^{-1}B^TXA \end{pmatrix} & A^TX \\ * & \begin{pmatrix} X-\epsilon I \\ +XB(R+B^TXB)^{-1}B^TX \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{26}$$

이 된다. 따라서, 식 (26)으로부터

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^TXA+Q+\alpha\epsilon H^TH-E^TPE \\ +A^TXB(R+B^TXB)^{-1}B^TXA \end{pmatrix} & A^TX \\ * & \begin{pmatrix} X-\epsilon I \\ +XB(R+B^TXB)^{-1}B^TX \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$

은 슈어 여수 정리[13]를 이용하여 식 (17)을 얻는다. 보장비용의 상한치는 식 (11)과

$$x(0)^TE^TPEx(0) < \rho \tag{28}$$

의 관계에 의하여 식 (18)이 구해진다. ■

참조 1: 정리 2는 $E=I$인 경우의 이산시간 비특이시스템에 대한 강인 보장비용 제어기 설계 문제도 직접 제어기를 설계할 수 있는 일반적인 강인 보장비용 제어기 설계 알고리듬이다. 또한, 기존의 논문들에서 사용하고 있는 시스템 행렬의 분해 없이 직접 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 실제 제어기 설계시에는 보장비용 함수의 하중행렬(weighting matrices)인 Q와 R의 적절한 선택으로 이산시간 특이시스템의 제어기를 설계할 수 있다.

참조 2: 식 (17)과 식 (18)은 구하고자 하는 모든 해 P, S, ϵ, ρ, R, Q의 측면에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태이다. 따라서, 강인 보장비용 제어기는 LMI 도구상자(Toolbox)[14]로부터 직접 계산할 수 있다. 또한, 본 논문에서 제시하는 제어기 설계방법은 기존의 결과에서 이산시간 시스템의 안정성을 행렬부등식(matrix inequality)이나 리카티 부등식(Riccati inequality)으로 제시하는 비볼록(non-convex) 최적화 문제를 완벽한 하나의 최적화 문제로 변경한다. 또한, 구하고자 하는 모든 변수를 미리 설정하지 않더라도 보장비용 성능지수를 최소화하는 최적의 제어기를 설계 할 수 있다.

예제 1: 제안한 알고리듬의 간단한 수치예제를 통하여 강인 보장비용 제어기 설계방법에 대하여 설명한다. 변수불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 15 & 4 & 7 \end{bmatrix} x(k+1) = \left\{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.1 & 0.25 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} F(k)\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\right\} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} u(k) \tag{29}$$

를 다룬다. 예제 1에서는 하중행렬을 미리 설정하여 제어기 설계방법을 보여주고, 보장비용 함수의 최적 값을 구하기 위한 모든 변수의 선형행렬부등식 문제는 예제 2에서 소개한다. 초기상태 $x(0)=[1 \;\; 0.1 \;\; 0.5]$, 하중행렬 $R=1$, $Q=0.1I_3$ 및 보조정리 2를 만족하는 행렬을 $Y=[1 \; -2 \;\; 0]$로 잡으면, 정리 2의 최적화 문제가 구하려는 모든 해의 견지에서 선형행렬부등식의 형태이므로 모든 해는 선형행렬부등식 도구상자[14]로부터

$$P = \begin{bmatrix} 1.2300\times10^{8} & -2.4600\times10^{8} & -2.9164\times10^{1} \\ * & 4.9199\times10^{8} & 5.8025\times10^{1} \\ * & * & 9.5144\times10^{-2} \end{bmatrix} \tag{30}$$
$$S = 1.2300\times10^{8}$$
$$\epsilon = 501.6460$$
$$\rho = 0.3817$$

과 같이 얻는다. 따라서, 주어진 하중행렬에 대한 보장비용 함수의 상한치와 불확실성 이산시간 특이시스템의 보장비용 상태궤환 제어기는

$$J^* = \rho = 0.3817 \tag{31}$$
$$u(k)^* = -[R+B^T(P-Y^TSY)B]^{-1}B^T(P-Y^TSY)Ax(k) = \begin{bmatrix} 0.5957 & 1.5877 & 2.7680 \\ -0.5988 & -1.5947 & -2.7859 \end{bmatrix} x(k)$$

이다. 그리고, 강인 보장비용 제어기는 주어진 하중행렬에 대하여, 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템을 안정화하고 보장비용 함수의 상한치를 최소화한다.

예제 2: 최적의 보장비용을 구하기 위해서 하중행렬도 선형행렬부등식 방법으로 구하는 예제 1과 동일한 문제를 다룬다. 정리 2에서 R과 Q도 변수로 보고 선형행렬부등식을 풀면

$$P = \begin{bmatrix} 6.5620\times10^{-17} & -1.3124\times10^{-16} & -4.5399\times10^{-27} \\ * & 2.6248\times10^{-16} & 8.5586\times10^{-27} \\ * & * & 1.5674\times10^{-28} \end{bmatrix} \tag{32}$$
$$S = 6.5744\times10^{-17}$$
$$\epsilon = 1.5736\times10^{-25}$$
$$\rho = 4.4517\times10^{-29}$$
$$R = 1.0910\times10^{-13}$$
$$Q = \begin{bmatrix} 1.9428\times10^{-28} & 3.1796\times10^{-28} & -4.9598\times10^{-28} \\ * & 5.2811\times10^{-28} & -7.9022\times10^{-28} \\ * & * & 1.5791\times10^{-27} \end{bmatrix}$$

와 같은 해를 구한다. 여기서, 최적의 보장비용 함수는 식 (32)에서 $J^{*}=\rho=4.4517\times10^{-29}$이고 보장비용 제어기의 이득은

$$K=\begin{bmatrix}-1.9959\times10^{-8} & -1.6888\times10^{-8} & -1.3333\\ 1.9959\times10^{-8} & 1.6888\times10^{-8} & 1.3333\end{bmatrix} \quad (33)$$

으로 구해질 수 있다. 따라서, 실제 적용문제에서는 하중행렬과 보장비용 값을 적절히 조절하여 제어기를 설계할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 정합조건 형태의 시변 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 보장비용 제어기 설계 알고리듬을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하였다. 제시하는 알고리듬은 기존의 특이시스템에서 전개했던 시스템 행렬의 분해하는 과정을 거치지 않고 직접적으로 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 또한, 제어기가 존재할 조건은 구하려는 모든 변수의 측면에서 하나의 완벽한 선형행렬부등식 형태이므로 동시에 모든 해를 구할 수 있다. 제안한 강인보장비용 제어기는 정규성, 코잘, 점근적 안정성과 보장비용 성능지수의 최소화를 보장한다. 예제를 통하여 제시한 알고리듬의 타당성을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 지식경제부 지방기술혁신사업 (RTI04-01-02) 지원으로 수행되었음

참 고 문 헌

[1] L. Dai, *Singular Control Systems*, Lecture Notes in control and Information Science, Springer: New York, 1989.

[2] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[3] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc.-Control Theory & Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.

[4] K. L. Hsiung, "Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems," *Proc. of the 37th CDC*, pp. 289-290, 1998.

[5] S. Xu and C. Yang, "H_∞ state feedback control for discrete singular systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1405-1409, 2000.

[6] G. Zhang and Y. Jia, "New results on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict matrix inequality conditions," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 634-638, 2002.

[7] S. Xu and C. Yang, "Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 35, pp. 1613-1617, 1999.

[8] S. Xu, C. Yang, Y. Niu, and J. Lam, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems," *Automatica*, vol. 37, pp. 769-774, 2001.

[9] S. Wo, Y. Zou, M. Sheng, and S. Xu, "Robust control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 344, pp. 97-106, 2007.

[10] S. S. L. Chang and T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 17, pp. 474-483, 1972.

[11] J. H. Kim, "Robust guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with time delays," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E84-A, pp. 1-5, 2001.

[12] P. Shi, E. K. Boukas, Y. Shi, and R. K. Agarwal, "Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 157, pp. 435-451, 2003.

[13] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies 15 in Applied Mathematics, 1994.

[14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학부 부교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr