

웨이블릿 기반 극점 배치 기법에 의한 선형 시스템 해석

論 文

57-8-20

Linear system analysis via wavelet-based pole assignment

金 範 洙* · 沈 逸 周†

(Beom-Soo Kim · Il-Joo Shim)

Abstract - Numerical methods for solving the state feedback control problem of linear time invariant system are presented in this paper. The methods are based on Haar wavelet approximation. The properties of Haar wavelet are first presented. The operational matrix of integration and its inverse matrix are then utilized to reduce the state feedback control problem to the solution of algebraic matrix equations. The proposed methods reduce the computation time remarkably. Finally a numerical example is illustrated to demonstrate the validity and applicability of the proposed methods.

Key Words : Linear system, State feedback, Pole placement, Haar wavelet, Stein equation

1. 서 론

함수 공간의 직교 기저 함수는 공학 분야에 있어서 매우 중요한 역할을 한다. 예를 들어 주파수 영역에서 시스템을 분석하는데 탁월한 방법 중의 하나는 삼각 함수를 기저로 갖는 푸리에 해석이다. 수학적 해석 방법론 중의 하나인 웨이블릿도 직교 기저 또는 정규 직교 기저 함수를 바탕으로 순수 수학뿐만 아니라 공학과 경제학 등에서 활발히 응용되고 있다. 이는 웨이블릿 급수가 점별(point-wise) 수렴 가능하고 주어진 함수를 시간과 주파수 영역 양쪽에서 국부성(localization)을 잘 나타낼 수 있으며 웨이블릿으로 어떤 함수를 표현하는데 있어서 적은 수의 계수로도 충분하다는 특징을 갖고 있기 때문이다[1].

웨이블릿을 이용해서 선형 동적 시스템 문제를 포함하여 미분 방정식이나 편미분 방정식의 해를 구하는 연구결과가 많이 보고되고 있다[1-6]. 1910년 A. Haar[7]에 의해 소개된 Haar 함수로 구성된 Haar 웨이블릿은 직교 웨이블릿 중에서 가장 간단한 형태로서 이를 선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템에 적용할 수 있는 계기는 Haar 직교 기저 함수들의 적분 함수를 쉽게 구할 수 있고 또한 직교 기저 함수와 적분 함수들을 이산화한 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들 각각에 대해 재귀적 관계를 입증함으로써 해상도가 증가해도 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들을 쉽게 구할 수 있음을 보임에 있다[2-5]. 따라서 Haar 웨이블릿을

선형 동적 시스템에 적용하면 선형 미분 방정식의 해를 구하는 문제는 상태 방정식이 Stein 방정식 문제로 변환되어 단순 대수 방정식의 문제로 귀결된다. 그러나 해상도가 증가할수록 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬의 차원은 2의 멱수로 증가하게 되므로 이는 매우 많은 계산량과 저장공간을 필요로 한다.

Chen-Hsiao는 Haar 함수 행렬 구조의 특수성 및 재귀적 관계를 이용하여 Stein 방정식을 차원이 각각 반씩 줄어든 대수 행렬 방정식과 Stein 방정식으로 분리하는 반복적 기법을 이용하여 행렬의 차원을 계속 줄여 나간 후 저차의 방정식에서 해를 구한 것들을 합성함으로써 전체 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다[2]. 그런데 Chen-Hsiao의 방법에서는 Stein 방정식을 분리할 때마다 저차의 대수 행렬 및 Stein 방정식의 해를 구하기 위해서는 역행렬을 구하는 과정을 반복해야 한다. [5]에서는 적분 연산 행렬을 이전 해상도에서의 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들로 해석적으로 표현할 수 있음을 증명함으로써 적분 연산 행렬의 역행렬을 재귀적으로 쉽게 구할 수 있음을 보였다. 따라서 적분 연산 역행렬과 변수 치환을 이용하면 고정된 입력을 갖는 동적 시스템에서 변환된 Stein 방정식을 해상도 n 에서 2^n 개의 대수 방정식으로만 변환한 후 여기서 구한 해를 합성하여 전체 해를 구할 수 있다.

본 논문에서는 선형 동적 시스템에 Haar 웨이블릿을 적용하여 상태 궤환 입력을 구하는 방법들을 제안한다. 첫 번째 방법은 상태 궤환 입력을 갖는 선형 동적 시스템을 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬을 이용해서 Stein 방정식으로 변환한다. 변환 과정에서 Haar 기저 함수의 특징과 시스템 초기치에 의해서 방정식의 일부가 희소행렬로 나타나게 되어 상태 궤환과 제어 입력을 저차화된 방정식에서 구한 해

* 正 會 員 : 경상대학교 기계항공공학부 조교수 · 工 博
해양산업연구소

† 교신저자, 正 會 員 : 대림대학 자동화시스템과 전임강사 · 工 博
E-mail : ijshim@daelim.ac.kr

接受日字 : 2008年 3月 12日

最終完了 : 2008年 5月 14日

를 합성하여 구할 수 있음을 보인다. 두 번째 방법은 적분 연산 역행렬과 이에 따른 상부 삼각행렬의 특성을 이용하여 해상도 n 에서 2^n 개의 대수 방정식으로 변환한 후 여기서 구한 해를 합성하여 전체 해를 구할 수 있음을 보인다.

2. Haar 웨이블릿 함수

Haar 웨이블릿은 직교 웨이블릿 중에서 가장 간단한 형태로서 척도구성함수(scaling function)는 다음과 같이 정의된다. 척도구성함수를 부 웨이블릿(father wavelet)이라 칭하기도 한다.

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

이 척도함수에 대한 모 웨이블릿(mother wavelet)은 다음과 같고 척도구성함수와 모 웨이블릿은 웨이블릿이 가져야 하는 직교성을 만족한다. 이 둘을 부모 웨이블릿(parent wavelet)이라 한다.

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 0.5) \\ -1 & t \in [0.5, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

힐버트(Hilbert) 공간 $L_2([0, 1))$ 에서 Haar 웨이블릿은 부모 웨이블릿과 모 웨이블릿을 척도구성(dilation)과 평행이동(translation)한 $h_i(t)$ 들로 이루어진 직교 기저 함수들의 집합이다.

$$h_i(t) = h_1(2^j t - m) = \begin{cases} 1 & t \in [t_a, t_b) \\ -1 & t \in [t_c, t_d) \\ 0 & t \notin [t_a, t_c) \end{cases} \quad (3)$$

여기서 $i = 2^j + m$ 이고, 정수 $j \geq 1$ 과 $0 \leq m < 2^j$ 은 각각 척도구성 및 평행이동 모수이며, 시간 경계 구간은 $t_a = m2^{-j}$, $t_b = (0.5 + m)2^{-j}$, $t_c = (1 + m)2^{-j}$ 이다. (1)에서 Haar 함수의 받침이 $[0, 1)$ 이므로 $L_2([0, 1))$ 공간에 속하는 제곱적분 가능한 함수 $y(t)$ 는 Haar 기저 함수들의 선형 결합으로 표현 할 수 있다.

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i h_i(t) \quad (4)$$

Haar 함수가 직교 기저 함수이므로 Haar 계수 u_i 들은 주어진 함수 $y(t)$ 와 Haar 함수와의 내적으로 유일하게 구할 수 있다.

$$u_i = 2^J \int_0^1 y(t) h_i(t) dt \quad (5)$$

Haar 계수 벡터 U_s 와 Haar 함수 벡터 $h_s(t) \in R^{s \times 1}$ 를 다음과 같이 정의하고

$$U_s = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{s-1}]^T \quad (6)$$

$$h_s(t) = [h_0(t) \ h_1(t) \ \dots \ h_{s-1}(t)]^T$$

(4)에서 무한급수로 전개된 함수 $y(t)$ 를 해상도 J 수준, 즉 $s (= 2^J)$ 개의 Haar 함수로 근사화하면 다음과 같이 벡터 형태로 표현할 수 있다.

$$y(t) \approx \sum_{i=0}^{s-1} u_i h_i(t) = U_s^T h_s(t) \quad (7)$$

Haar 함수 벡터를 적분한 함수를 Haar 기저 함수 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_0^t h_s(\tau) d\tau \approx P_s h_s(t) \quad (8)$$

여기서 P_s 를 $s \times s$ 차원을 갖는 적분연산행렬 (operational matrix)이라 하고 다음과 같은 재귀적 특성을 갖는다[2].

$$P_1 = \left[\frac{1}{2} \right], P_s = \begin{bmatrix} P_{s/2} & -\frac{1}{2s} H_{s/2} \\ \frac{1}{2s} H_{s/2}^{-1} & 0_{s/2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 $0_{s/2}$ 은 $s/2$ -정방 영 행렬이고, Haar 행렬 H_s 은 받침 구간을 s 개의 균등한 시간 간격에서 Haar 함수 $h_i(t)$ 를 이산화한 벡터를 열벡터로 하는 s -정방 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$H_s = [h_s(t_0) \ h_s(t_1) \ \dots \ h_s(t_{s-1})] \quad (10)$$

여기서 $\frac{i}{s} \leq t_i \leq \frac{i+1}{s}, 0 \leq i \leq s-1$ 이고 이 Haar 행렬도 다음과 같은 재귀적 관계를 갖는다[1].

$$H_s = \begin{bmatrix} H_{s/2} \otimes [1 \ 1] \\ I_{s/2} \otimes [1 - 1] \end{bmatrix}, H_1 = [1] \quad (11)$$

여기서 $I_{s/2}$ 은 단위 행렬이고, $A \in R^{n \times m}$ 일 경우 \otimes 는 다음과 같이 정의되는 Kronecker 곱을 나타낸다[8,9].

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

또한 Haar 역행렬은 다음과 같이 Haar 전치행렬과 대각행렬 Q_s 의 곱으로 표현된다[1].

$$H_s^{-1} = \frac{1}{s} H_s^T Q_s \quad (12)$$

여기서 $Q_s = \text{diag}(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{p-1}}, \dots, \frac{1}{2^{p-1}}), p = \log_2 s$ 이다.

식 (9),(11) 과 (12)에 따르면 Haar 행렬의 재귀적 관계 및 역행렬을 해석적으로 표현할 수 있고 적분연산 행렬도 재귀적으로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 다음 정리는 적분연산 행렬에 대해서도 그 역행렬을 해석적으로 나타낼 수 있음을 보인다.

정리 1. (9)에서 정의된 Haar 연산 행렬 P_s 의 역행렬은 다음과 같다. (증명 [5] 참조)

$$P_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{s/2} & 2s H_{s/2} \\ -2s H_{s/2}^{-1} & 4s^2 H_{s/2}^{-1} P_{s/2} H_{s/2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

해상도가 증가할수록 Haar 행렬과 Haar 적분 연산 행렬이 크기는 2의 멱수로 증가한다. 그런데 Haar 행렬은 (11)에

서와 같이 재귀적 관계를 갖으며 Haar 역행렬 역시 (12)에 서와 같이 Haar 전치행렬과 대각행렬의 행렬 곱으로 쉽게 구할 수 있다. 또한 Haar 적분 연산 역행렬은 정리 1 을 이용하여 Haar 연산행렬의 부분 행렬들로 쉽게 구할 수 있다.

3. 선형 시스템의 극배치 문제

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^q$ 는 각각 상태 및 제어 입력 벡터이고, $\mathbf{A} \in R^{n \times n}, \mathbf{B} \in R^{n \times q}$ 는 계수 행렬이며 초기치는 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 이다. 시스템 안정성 향상이나 과도 응답 개선 등을 목적으로 원하는 폐루프 시스템의 고유치를 갖게 하는 문제는 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 가 제어가능하면 제어입력은

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (15)$$

로서 폐환 행렬 \mathbf{K} 를 구하는 극배치 문제이며 선형 대수 측면에서 보면 폐루프 시스템 행렬 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ 가 원하는 스펙트럼을 갖게 하는 것이라 볼 수 있다. 따라서 (15)로 주어진 제어 입력을 (14)에 인가했을 때 이 시스템의 상태방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (16)$$

상기 폐루프 시스템에서 상태 제적을 Haar 웨이블릿을 이용하여 함수 벡터 $\mathbf{x}(t)$ 를 Haar 기저 함수들의 선형 결합으로 나타낼 수 있음을 이용하여 구한다. (16)의 양변을 적분하면

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (17)$$

이고 여기서 상태 벡터를 미지 행렬 $\mathbf{V} \in R^{n \times s}$ 을 도입하여 Haar 행렬로 근사화 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{V}\mathbf{h}_s(t) \quad (18)$$

적분 방정식 (17)에 (8),(18)을 대입하면 상태 방정식은 대수 행렬 방정식 문제로 변환된다.

$$\mathbf{V}\mathbf{h}_s(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{V}\mathbf{P}_s\mathbf{h}_s(t) \quad (19)$$

식 (19)를 Haar 함수로 표현하기 위해서 차원이 $n \times s$ 인 $\mathbf{X}_0 = [\mathbf{x}_0 \mathbf{0} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]$ 를 도입하면 초기치를 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0\mathbf{h}_s(t)$ 와 같이 Haar 함수로 표현할 수 있고, $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ 라 정의한 후 $\mathbf{h}_s(t)$ 를 공통으로 묶으면 (19)는

$$\mathbf{V} - \mathbf{A}_c\mathbf{V}\mathbf{P}_s = \mathbf{X}_0 \quad (20)$$

와 같이 Stein 방정식으로 간단히 표현된다. 일반적으로 이 방정식의 해는 다음과 같이 Kronecker 곱으로 구할 수 있다[9].

$$\text{vec}(\mathbf{V}) = (\mathbf{I}_s \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{P}_s \otimes \mathbf{A}_c)^{-1} \text{vec}(\mathbf{X}_0) \quad (21)$$

여기서 $\text{vec}(\cdot)$ 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{vec}(\mathbf{V}) = [v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n1}, v_{1s}, v_{2s}, \dots, v_{ns}]^T \quad (22)$$

(20)를 풀기 위해서는 ns -정방 행렬의 역행렬 계산이 필요한데 이는 해상도가 증가하면 Stein 방정식의 차수가 매우 커지므로 매우 많은 계산량을 필요로 한다.

방법 1. 초기치에 따른 희소 행렬 구조를 이용한 방법

상태 제환을 적용했을 때 Stein 방정식의 우변인 \mathbf{X}_0 는 첫번째 열을 제외하고는 나머지는 모두 0 벡터인 희소 (sparse) 행렬이므로 다음과 같이 표기하고

$$\mathbf{V}_{(1)} = \mathbf{V}, \mathbf{X}_{(0)} = \mathbf{X}_0, \mathbf{A}_{c(0)} = \mathbf{A}_c \quad (23)$$

$\mathbf{V}_{(1)}, \mathbf{X}_{(0)}$ 를 각각 다음과 같이 $n \times \frac{s}{2}$ 차원을 갖는 부분행렬로 분할한 후

$$\mathbf{V}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{(1)}^{(l)} \\ \mathbf{V}_{(1)}^{(r)} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(0)}^{(l)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

(9)와 (24)를 이용하여 정리하면 행렬 방정식 (20)은 다음과 같이 저차화된 행렬 방정식들로 분리할 수 있다.

$$\mathbf{V}_{(1)}^{(l)} - \mathbf{A}_{c(0)}\mathbf{V}_{(1)}^{(l)}\mathbf{P}_{\frac{s}{2}} - \frac{1}{2s}\mathbf{A}_{c(0)}\mathbf{V}_{(1)}^{(r)}\mathbf{H}_{\frac{s}{2}}^{-1} = \mathbf{X}_{(0)}^{(l)} \quad (25)$$

$$\mathbf{V}_{(1)}^{(r)} = -\frac{1}{2s}\mathbf{A}_{c(0)}\mathbf{V}_{(1)}^{(l)}\mathbf{H}_{\frac{s}{2}} \quad (26)$$

(26)를 (25)에 대입한 후 정리하면

$$\left(\mathbf{I}_{\frac{s}{2}} + \left(\frac{1}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(0)}^2 \right) \mathbf{V}_{(1)}^{(l)} - \mathbf{A}_{c(0)}\mathbf{V}_{(1)}^{(l)}\mathbf{P}_{\frac{s}{2}} = \mathbf{X}_{(0)}^{(l)} \quad (27)$$

와 같이 되고 $\mathbf{I}_{\frac{s}{2}} + \left(\frac{1}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(0)}^2$ 가 정칙이면 (27)은 다음과 같이 Stein 방정식으로 간단히 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{V}_{(1)}^{(l)} - \mathbf{A}_{c(1)}\mathbf{V}_{(1)}^{(l)}\mathbf{P}_{\frac{s}{2}} = \mathbf{X}_{(1)}^{(l)} \quad (28)$$

여기서

$$\mathbf{A}_{c(1)} = \left(\mathbf{I}_{\frac{s}{2}} + \left(\frac{1}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(0)}^2 \right)^{-1} \mathbf{A}_{c(0)},$$

$$\mathbf{X}_{(1)}^{(l)} = \left(\mathbf{I}_{\frac{s}{2}} + \left(\frac{1}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(0)}^2 \right)^{-1} \mathbf{X}_{(0)}^{(l)} \quad \text{이다.}$$

(28)에서 $\mathbf{X}_{(1)}^{(l)}$ 의 첫번째 열이 $\left(\mathbf{I}_{\frac{s}{2}} + \left(\frac{1}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(0)}^2 \right)^{-1} \mathbf{x}_0$ 이고 나머지는 0 인 행렬이므로 (28)의 해는 (28)-(26) 과정을 적용하여 구할 수 있다. 여기서 $\mathbf{V}_{(1)}^{(l)}$ 을 $\mathbf{V}_{(1)}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{(2)}^{(l)} \\ \mathbf{V}_{(2)}^{(r)} \end{bmatrix}$ 로 $\mathbf{X}_{(1)}^{(l)}$ 을 $\mathbf{X}_{(1)}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(2)}^{(l)} \\ \mathbf{0}_{s/4} \end{bmatrix}$ 로 분할하고 (8)에 의해서

$$\mathbf{P}_{\frac{s}{2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\frac{s}{4}} & -\frac{1}{s}\mathbf{H}_{\frac{s}{4}} \\ \frac{1}{s}\mathbf{H}_{\frac{s}{4}}^{-1} & \mathbf{0}_{\frac{s}{4}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

이므로 (28)은 다음과 같이 차원이 반으로 줄어든 두 개의 행렬방정식으로 분리될 수 있다.

$$\mathbf{V}_{(2)}^{(r)} = -\frac{1}{s}\mathbf{A}_{c(1)}\mathbf{V}_{(2)}^{(l)}\mathbf{H}_{\frac{s}{4}} \quad (30)$$

$$\mathbf{V}_{(2)}^{(l)} - \mathbf{A}_{c(2)}\mathbf{V}_{(2)}^{(l)}\mathbf{P}_{\frac{s}{4}} = \mathbf{X}_{(2)}^{(l)} \quad (31)$$

여기서

$$\mathbf{A}_{c(2)} = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1}{s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{A}_{c(1)},$$

$$\mathbf{X}_{(2)}^{(l)} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{s^2} \mathbf{A}_{c(1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{X}_{(1)}^{(l)} \quad \text{이다.}$$

이와 같이 $\mathbf{I} + \left(\frac{2^{k-1}}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(k-1)}^2, (k=1,2,\dots,J)$ 가 정칙일 조건하에서 $k=J$ 이면 $\mathbf{V}_{(J-1)}^{(l)}$ 은 다음과 같이 저차화된 두 개의 행렬방정식으로 분리된다.

$$\mathbf{V}_{(J)}^{(r)} = -\frac{1}{4} \mathbf{A}_{c(J-1)} \mathbf{V}_{(J)}^{(l)} \mathbf{H}_s \frac{1}{2^J} \quad (32)$$

$$\mathbf{V}_{(J)}^{(l)} - \mathbf{A}_{c(J)} \mathbf{V}_{(J)}^{(l)} \frac{\mathbf{P}_s}{2^J} = \mathbf{X}_{(J)}^{(l)} \quad (33)$$

여기서

$$\mathbf{A}_{c(J)} = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \mathbf{A}_{c(J-1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{A}_{c(J-1)} \quad (34)$$

$$\mathbf{X}_{(J)}^{(l)} = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \mathbf{A}_{c(J-1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{X}_{(J-1)}^{(l)} \quad (35)$$

이다. 그런데 (9) 에서 $\mathbf{P}_{s/2^J} = 0.5$ 이고, $\mathbf{H}_{s/2^J} = 1$ 이므로 (32), (33)은 각각 다음과 같이 대수 방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{V}_{(J)}^{(r)} = -\frac{1}{4} \mathbf{A}_{c(J-1)} \mathbf{V}_{(J)}^{(l)} \quad (36)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{c(J)} \right) \mathbf{V}_{(J)}^{(l)} = \mathbf{X}_{(J)}^{(l)} \quad (37)$$

따라서 (20)의 해는 아래 알고리즘 1 과 같이 저차화된 단순 대수 방정식만을 풀므로써 전체 해를 구할 수 있으며 여기서 구해진 \mathbf{V} 를 (18)에 대입함으로써 상태 궤적을 구할 수 있다. 이 방법을 정리하면 아래와 같다.

알고리즘 1

1. 초기 행렬을 (23)과 같이 정의한다.
2. $\mathbf{A}_{c(k)}, \mathbf{X}_{c(k)}^{(l)}$ 를 구한다.
for (k = 1; k <= J; k++)

$$\mathbf{A}_{c(k)} = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{2^{k-1}}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(k-1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{A}_{c(k-1)}$$

$$\mathbf{X}_{(k)}^{(l)} = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{2^{k-1}}{2s} \right)^2 \mathbf{A}_{c(k-1)}^2 \right)^{-1} \mathbf{X}_{(k-1)}^{(l)}$$

end

3. $\mathbf{V}_{(J)}^{(l)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{c(J)} \right)^{-1} \mathbf{X}_{(J)}^{(l)}$ 를 구한다.
4. $\mathbf{V}_{(k)}^{(l)}, \mathbf{V}_{(k)}^{(r)}$ 를 구한다.
for (k = J; k >= 1; k=k-1)

$$\mathbf{V}_{(k)}^{(r)} = -\frac{2^{k-1}}{2s} \mathbf{A}_{c(k-1)} \mathbf{V}_{(k)}^{(l)} \mathbf{H}_s \frac{1}{2^k}$$

$$\mathbf{V}_{(k-1)}^{(l)} = \left[\mathbf{V}_{(k)}^{(l)} \quad \mathbf{V}_{(k)}^{(r)} \right]$$

end

5. $\mathbf{V} = \left[\mathbf{V}_{(1)}^{(l)} \quad \mathbf{V}_{(1)}^{(r)} \right]$ 를 구한다.

방법 2. 상부 삼각행렬 구조를 이용한 방법

Stein 방정식 (20)의 해를 알고리즘 1 방법으로 구할 때 해상도 J 에 따라서 $\mathbf{A}_{c(k)}, \mathbf{X}_{(k)}^{(l)}, k=1,2,\dots,J$ 를 구하기 위해서는 J 횟수 만큼의 역행렬 계산이 요구된다. 정리 1 과 $\mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{P}_s \mathbf{H}_s$ 가 상부 삼각행렬 구조를 갖는 특성을 이용하여 식 (20)으로 주어진 방정식을 상부 삼각 Stein 방정식으로 변환하여 해를 쉽게 구할 수 있다.

정리 1에 따르면 \mathbf{P}_s 는 정칙 행렬이므로 식 (20)의 양변에 \mathbf{P}_s^{-1} 을 곱하고 $\mathbf{Z} = \mathbf{V} \mathbf{H}_s$ 라 치환하면 식 (20)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{Z} \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{H}_s^{-1} = \mathbf{X}_0 \mathbf{P}_s^{-1} \quad (38)$$

(38) 양변에 \mathbf{H}_s 를 곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Z} \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{H}_s - \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{X}_0 \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{H}_s \quad (39)$$

여기서 $\mathbf{C}_s = \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{H}_s$ 이라 놓으면 $\mathbf{C}_s^{-1} = \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{P}_s \mathbf{H}_s$ 이므로 식 (39)는 아래와 같이 Stein 방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{Z} - \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{C}_s = \mathbf{X}_0 \mathbf{H}_s \quad (40)$$

\mathbf{C}_s 는 식 (41)과 같이 주대각 요소는 $\frac{1}{2s}$ 이고 주대각 위는 모두 $\frac{1}{s}$ 이며 주대각 아래는 0 인 상부삼각 행렬구조를 갖는다.

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s} & \frac{1}{s} & \dots & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{2s} & & \frac{1}{s} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2s} \end{bmatrix} \quad (41)$$

식 (40)으로 표현된 Stein 방정식에서 $\mathbf{Z}, \mathbf{X}_0 \mathbf{H}_s$ 를 각각 $n \times \frac{s}{2}$ 차원을 갖는 부분행렬로 분할하면

$$\mathbf{Y}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{X}_0 \mathbf{H}_s = \left[\mathbf{Y}_{(1)}^{(1)} \quad \mathbf{Y}_{(1)}^{(2)} \right] \quad (42)$$

$$\mathbf{Z}_{(0)}^{(1)} = \mathbf{Z} = \left[\mathbf{Z}_{(1)}^{(1)} \quad \mathbf{Z}_{(1)}^{(2)} \right] \quad (43)$$

와 같이 표현할 수 있고 차원이 $s \times s$ 인 \mathbf{C}_s 를 (44)와 같이 차원이 모두 $\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}$ 인 부분행렬로 분할하면 $\mathbf{C}_s^{(1)}$ 은 식 (41) 과 동일한 구조를 갖는 상부 삼각 행렬이고 $\mathbf{C}_s^{(2)}$ 는 모든 요소가 $\frac{1}{s}$ 인 행렬이다.

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^{(1)} & \mathbf{C}_s^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_s^{(1)} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$n \times s$ 차원을 갖는 Stein 방정식 (40)은 (42)-(44)를 대입하여 정리하면 각각 $n \times \frac{s}{2}$ 로 저차화된 2 개의 Stein 방정식으로 분리된다.

$$Z_{(1)}^{(1)} - AZ_{(1)}^{(1)} C_{\frac{s}{2}}^{(1)} = Y_{(1)}^{(1)} \quad (45)$$

$$Z_{(1)}^{(2)} - AZ_{(1)}^{(2)} C_{\frac{s}{2}}^{(1)} = Y_{(1)}^{(2)} + AZ_{(1)}^{(1)} C_{\frac{s}{2}}^{(2)} \quad (46)$$

먼저 (45)에서 $Z_{(1)}^{(1)}$ 을 구하고 이를 (46)의 우변에 대입하여 $Z_{(1)}^{(2)}$ 를 구함으로써 (43)과 $V=ZH_s^{-1}$ 에 의해서 Stein 방정식 (20)의 해를 구할 수 있다. 그런데 (44)의 $C_{\frac{s}{2}}^{(1)}$ 가 $\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}$ 차원을 갖는 상부 삼각 행렬이므로 (42)-(46) 과정을 반복하면 각각 $n \times \frac{s}{2}$ 로 저차화된 4 개의 Stein 방정식으로 분리할 수 있다. 즉 $k=0,1,2,\dots,J-1$ 및 $1 \leq a \leq 2^k$ 에 대해서 (47)과 같이 $n \times \frac{s}{2^k}$ 크기를 갖는 행렬 $Z_{(k)}^{(a)}, Y_{(k)}^{(a)}, Y_{(k)}^{(a*)}$ 를 아래와 같이 각각 $n \times \frac{s}{2^{k+1}}$ 크기를 갖는 부분 행렬로 분할하고

$$Z_{(k)}^{(a)} = [Z_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Z_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (47)$$

$$Y_{(k)}^{(a)} = [Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Y_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (48)$$

$$Y_{(k)}^{(a*)} = Y_{(k)}^{(a)} + AZ_{(k)}^{(a)} C_{\frac{s}{2^k}}^{(2)} = [Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Y_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (49)$$

$\frac{s}{2^k} \times \frac{s}{2^k}$ 크기의 상부 삼각 행렬도 차원이 $\frac{s}{2^{k+1}} \times \frac{s}{2^{k+1}}$ 인 부분 행렬로 분할한다.

$$C_{\frac{s}{2^k}}^{(1)} = \begin{bmatrix} C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(1)} & C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(2)} \\ 0 & C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

그러면 해상도 k 에서 Stein 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$Z_{(k)}^{(a)} - AZ_{(k)}^{(a)} C_{\frac{s}{2^k}}^{(1)} = Y_{(k)}^{(a)} \quad (51)$$

Stein 방정식 (51)은 (47)-(50)으로 정의된 행렬과 (42)-(46) 과정을 이용하면 다음과 같이 2 개의 저차화된 Stein 방정식으로 분리할 수 있다.

$$Z_{(k+1)}^{(2a-1)} - AZ_{(k+1)}^{(2a-1)} C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(1)} = Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad (52)$$

$$Z_{(k+1)}^{(2a)} - AZ_{(k+1)}^{(2a)} C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(1)} = Y_{(k+1)}^{(2a)} + AZ_{(k+1)}^{(2a-1)} C_{\frac{s}{2^{k+1}}}^{(2)} \quad (53)$$

이 과정을 반복하여 $k=J-1$ 이면 $1 \leq a \leq 2^{J-1}$ 이고 따라서 Stein 방정식 (40)을 다음과 같이 s 개의 행렬 방정식으로 분리할 수 있다.

$$Z_{(J)}^{(2a-1)} - AZ_{(J)}^{(2a-1)} C_1^{(1)} = Y_{(J)}^{(2a-1)} \quad (54)$$

$$Z_{(J)}^{(2a)} - AZ_{(J)}^{(2a)} C_1^{(1)} = Y_{(J)}^{(2a)} + AZ_{(J)}^{(2a-1)} C_1^{(2)} \quad (55)$$

여기서 $C_1^{(1)} = \frac{1}{2s}$ 이고 $C_1^{(2)} = \frac{1}{s}$ 인 상수이므로 (54), (55)는 다음과 같이 단순 대수 방정식 문제로 귀결된다.

$$\left(I - \frac{1}{2s}A\right)Z_{(J)}^{(2a-1)} = Y_{(J)}^{(2a-1)} \quad (56)$$

$$\left(I - \frac{1}{2s}A\right)Z_{(J)}^{(2a)} = Y_{(J)}^{(2a)} + \frac{1}{s}AZ_{(J)}^{(2a-1)} \quad (57)$$

따라서 (56), (57)로 표현되는 s 개의 대수 방정식의 해를 구함으로써 Stein 방정식 (20)의 해를 구할 수 있다.

알고리즘 2

1. 초기 행렬을 (42), (43)과 같이 정의한다.

2. Z 을 구한다.

for ($a = 1; a \leq 2^{J-1}; a = a+2$)

식 (56)에서 $Z_{(J)}^{(2a-1)}$ 를 구함

$Y_{(J)}^{(2a*)}$ 를 갱신함

식 (57)에서 $Z_{(J)}^{(2a)}$ 를 구함

end

3. $V=ZH_s^{-1}$ 을 구한다.

위의 알고리즘 2의 3 번째 단계에서 H_s^{-1} 는 (11)로 주어지므로 이 방법은 알고리즘 1 과 달리 역행렬 계산을 하지 않는 장점이 있다. 방법 1 과 2 에 의해서 제어 입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u(t) = -KVh_s(t) \quad (58)$$

4. 수치 예

다음과 같은 선형 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

여기서 초기치는 $x_0 = [1 \quad 0]^T$ 이다. 이 시스템의 극점은 11.3589, 2.6411 로서 불안정한 시스템이다. 원하는 극점을 $-8 \pm j7$ 로 하면 $K = [76.0 \quad 30.0]$ 으로 구해지고 이때 시스템의 해석적 해는 다음과 같다.

$$x_1(t) = e^{-8t} \cos(7t) + 2.2857e^{-8t} \sin(7t)$$

$$x_2(t) = -10.6571e^{-8t} \sin(7t)$$

해상도 $J=4, (s=16), J=7, (s=128)$ 일 때 해석적 해와 알고리즘 2 를 이용해 구한 해를 그림 1에 나타내었다. 그림 2는 $J=4, J=7$ 일 때의 제어 입력이다. 해상도가 증가할수록 Haar 웨이블릿 방법을 이용해서 구한 해가 해석적 해에 수렴함을 알 수 있다.

5. 결 론

동적 선형 시스템에서 극점 배치 기법에 의한 제어 입력을 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬의 재귀적 관계 및 역행렬을 이용하여 미분 방정식의 문제를 Stein 방정식의 문제로 변환하여 해를 구하는 방법을 제안하였다. 해상도가 증가하게 되면 Stein 방정식의 차수가 매우 커지게 되는데 알고리즘 1, 2 는 이들 방정식을 저차의 행렬 방정식으로 바꾼 후 여기서 구한 해를 합성하여 전체 해를 쉽게 구할 수 있음을 보였다.

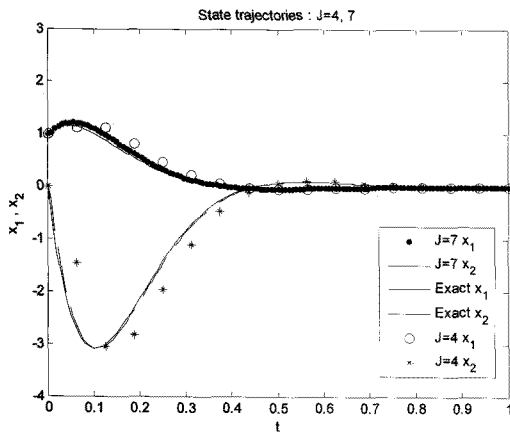


그림 1 해상도 J=4, 7일 때 상태 변수 궤적
Fig. 1 State trajectories at resolution J=4, 7

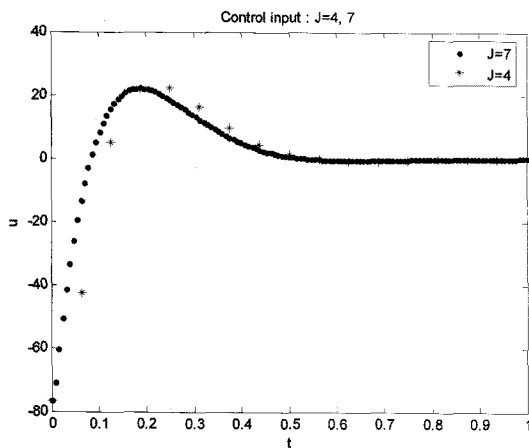


그림 2 해상도 J=4, 7일 때 제어 입력
Fig. 2 Control input at resolution J=4, 7

참 고 문 헌

[1] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, M. Alizadeh, "Numerical solution of Volterra type integral equation of the first kind with wavelet basis", Applied Math. and Comp., Vol. 194, pp. 400-405, 2007
[2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter

systems", IEE Proc. Control Theory Appl. Vol. 144, pp. 87-94, 1997
[3] M. Ohkita and Y. Kobayashi, "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations". IEEE Trans. Circuits Systems I. Fundam. Theory Appl. Vol. 9, pp. 853-862, 1986
[4] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets", IEEE Trans. Circuits Systems I. Fundam. Theory Appl. Vol. 47, pp. 246-250, 2000
[5] B.S. Kim, I.J. Shim, B.K. Choi and J.H. Jeong, "Wavelet based control for linear systems via reduced order Sylvester equation", The 3rd Int. Conf. on Cooling and Heating Techn., pp.239-244, 2007
[6] R.S. Stankovic and B.J. Falkowski, "The Haar wavelet transform: its status and achievements", Computers and Electrical Engineering, Vol. 29, No. 1, pp. 25-44, 2003
[7] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonaler Funktionensysteme", Math. Ann. Vol. 69, pp. 331-371, 1910
[8] R.A. Horn and C.R. Johnson, "Matrix Analysis", New York, Cambridge Univ. Press, 1985
[9] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 25, pp. 772-781, 1978

저 자 소 개



김 범 수 (金範洙)

1987년 고려대학교 전기공학과, 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과 (공학석사), 2002년 동대학원 전기공학과(공학박사), 2005~현재 경상대학교 기계항공공학부 조교수,

E-mail : kimbs@gsnu.ac.kr



심 일 주 (沈逸周)

1987년 고려대학교 전기공학과, 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과 (공학석사), 2005년 동대학원 전기공학과(공학박사), 2008-현재 대림대학 자동화시스템과 전임강사

E-mail : ijshim@daelim.ac.kr