

옵션 가치 및 민감도 평가 방법: 속도와 정확도 개선에 대한 고찰[†]

최영수¹⁾, 오세진²⁾, 이원창³⁾

요약

본 연구는 다양하고 복잡해지는 파생상품 추세에 상응하는 적절한 가치평가에 대한 연구의 필요성을 인지하고 가격 및 민감도 평가에 있어서 속도와 정확도를 향상시키는데 그 의의를 두고자 한다. 몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수 대신 저불일치수열인 준난수를 이용하면 시행횟수의 감소와 정확도 개선이 가능한데, 미국형 옵션이나 경로 의존형 상품 등 다차원의 난수가 필요할 경우 기존의 준난수를 사용하면 상관관계가 증가하는 문제로 적용에 한계가 있다. 이런 단점을 보완하기 위해 문제를 발생시키는 차원의 난수를 제외시켜 상관계수를 특정값 이하로 제어하는 새로운 방법을 고안하여 다차원 상품에 적용이 가능토록 하였고 미국형 풋옵션에 적용하여 새로운 방법의 유용성을 검증하였다. 또한, 몬테카를로 시뮬레이션에서 민감도 계산방법으로 우도비율법과 경로의존형 근사방법을 사용하면 속도 및 정확도가 개선됨을 보인다. 이러한 결과는 최근 시장의 추세인 기초자산이나 위험요소가 여러 개인 경우 그리고 경로의존형 및 조기상환형 상품 등에 적용 가능토록하여 몬테카를로 시뮬레이션 방법에 있어 가장 큰 단점으로 지적되는 수행시간을 단축시키고 민감도 계산의 오차를 줄여줌을 보여준다. 또한, 2개 이하의 기초자산으로 이루어진 파생상품의 가치 및 민감도 평가에 가장 효율적인 수치해석적 방법론으로 알려져 있는 유한차분법의 적용시 격자생성구간의 설정이 매우 중요하다는 사실을 비대칭 나비형스프레드에 적용하여 실증적으로 보인다.

주요용어: 옵션가치 평가; 유한차분법; 몬테카를로 시뮬레이션; 준난수; 미국형 풋옵션.

1. 서론

2003년 증권거래법 개정 후 주가연계증권(Equity Linked Securities: ELS)이 유가증권으로 인정되면서 다양한 구조의 이색옵션이 포함된 금융상품의 시장규모가 급속히 확대되고 있다. 금융감독원 통계자료에 따르면 파생증권(ELS, ELW, DLS)의 발행액을 기준으로 2003년 3조 6천억원에서 2004년 5조 5천억원, 2005년 14조 8천억원, 2006년 32조 9천억원으로 급속한 증가세를 보였으며 2007년 8월 현재에도 27조 6천억원으로 그 추세를 이어가고 있다. 주가연계증권과 상품구조가 유사한 자산운용사의 주가연계펀드(Equity

[†] 교신저자는 2008학년도 한국의국어대학교 교내학술연구비의 지원에 감사합니다.

1) (449-791) 경기도 용인시 한국외국어대학교 수학과, 교신저자: choiys@hufs.ac.kr

2) (150-878) 서울특별시 영등포구 여의도동, 메리츠증권주식회사, 장외파생팀.

3) (449-791) 경기도 용인시 한국외국어대학교 수학과.

Linked Fund: ELF), 은행권의 주가연계정기예금(Equity Linked Deposit: ELD)까지 고려할 경우 그 규모는 훨씬 커진다. 시장의 규모가 커지면서 파생상품의 가치평가(pricing) 및 위험관리 등에 이용되는 민감도(Greeks) 평가에 대한 연구 필요성이 점점 커지고 있다.

파생상품의 가치평가방법에 관한 연구는 1960년대에 시작되어, 1973년 Black과 Scholes에 의해 유럽형 콜옵션의 가격결정모형이 개발됨에 따라 획기적인 전기를 맞게 되었다. 주가연계증권 등 이색옵션이 포함된 금융상품이 투자자의 요구에 따라 날로 복잡해져 감에 따라 가치평가와 민감도 평가에 있어서 일부 특수한 형태를 제외하고는 닫힌해(closed-form solution)로 측정할 수가 없는 경우가 많아지고 있다. 이에 다양한 구조의 파생상품의 가치와 민감도를 보다 빠르고 정확하게 측정하기 위한 금융공학적인 방법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 닫힌 해로 측정할 수 없는 경우 수치해석적 근사방법이 일반적으로 활용되고 있는데 이는 크게 격자모형(lattice model), 유한차분법(Finite Difference Method: FDM), 몬테카를로 시뮬레이션(Monte-Carlo simulation) 등으로 나눌 수 있다. 격자모형의 기본인 이항모형은 Cox, Ross, Rubinstein (1979)과 Jarrow와 Rudd (1983)에 의해 개발되었고 삼항모형은 Tian (1993)에 의해 개발되었으나 격자의 크기가 줄어들더라도 수렴도가 진동하는 현상이 있었는데 Leisen과 Reimer (1996)가 이런 문제를 해결하였다. 유한차분법은 Brennan과 Schwartz (1977)에 의해 처음으로 파생상품 가치평가에 도입되었다. 유한차분법을 이용한 옵션의 가치평가 및 민감도 평가 방법은 Tavella와 Randall (2000)의 책에 잘 정리되어 있다. 특히 기초자산의 가격이 행사가격 및 경계점에 근접할 때 격자의 크기가 줄더라도 수렴도가 진동하는 현상이 있는데 이런 문제는 행사가격 및 경계점이 격자의 크기가 변하더라도 항상 격자점이 되게 함으로써 해결할 수 있음이 잘 설명되어 있다. 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 파생상품의 가치평가는 Boyle (1977)에 의해 처음 소개된 후, Boyle, Broadie and Glasserman (1997)은 유한차분 근사식(finite difference approximation)에 의한 민감도 계산의 불안정성을 보이며 경로의존형 근사방법 및 우도비율법에 의한 민감도 계산 방법론을 제시했다. Longstaff와 Schwartz (2001)은 미국형 옵션도 몬테카를로 시뮬레이션에 의해서 계산이 가능함을 보여주었다.

유한차분법은 미국형 스타일이나 버뮤다(Bermuda) 형태를 갖는 파생상품에서 최적 행사시점을 고려하여 가치를 평가하는 부분에서 다른 방법론에 비해 우수한 성과를 내는 것으로 알려져 있다. 몬테카를로 시뮬레이션은 유럽형(European) 형태의 옵션에 쉽게 적용 가능하고, 또한 배리어(barrier), 아시안(Asian) 옵션 등과 같이 옵션의 만기 시 기대수익 구조가 기초자산의 과거 경로에 영향을 받는 경우 그리고 다수의 기초자산으로 구성된 옵션의 경우 쉽게 적용 가능하다는 장점이 있다. 격자모형과 유한차분법의 경우 격자의 크기를 줄임으로써 몬테카를로 시뮬레이션의 경우 시행횟수를 증가시킴으로써 참값으로 수렴하게 되지만 옵션의 성격 즉 손익구조(payload)의 형태나 경로의존형(path dependent)인지, 기초자산의 수에 따라 계산 시간이 증가하는 단점을 가지고 있다. 또한 옵션의 위험을 다양한 측면에서 측정하는 델타(Δ), 감마(Γ), 세타(θ), 베가(ν) 등의 민감도 계산에 있어서도 격자모형과 유한차분법의 경우 격자의 크기에 따라, 몬테카를로 시뮬레이션의 차분법에 의한 산정에서는 변량의 크기에 의해 오차가 크게 나타나는 단점이 있다. 특히 파생상

품의 만기에 근접할 때, 조기상환형의 경우 조기상환 평가시점에 근접할 때, 기초자산가격이 행사가격 혹은 경계점(barrier) 근방에 근접할수록 이러한 경향이 더 크게 나타난다.

파생상품 가치평가를 위한 많은 연구와 방법론이 개발되어 왔지만 각각의 방법론은 가정을 서로 달리하고 변수들을 그 가정 속에서 일정한 형태로 통제를 하기 때문에 나름대로 논리적이며 그 가치를 인정받을 수 있다. 따라서 많은 방법론들을 하나의 기준으로 우열을 정하는 것은 어렵고 유용하지도 않다. 중요한 것은 실제 시장에서 각 투자자들이 의사결정을 하기에 용이하고 손쉽게 적용할 수 있는 논리구조를 가지고 있는 가치평가방법이 과연 어느 것인가의 문제일 뿐이다.

본 연구에서는 기존의 옵션 가치평가와 민감도 평가에 있어서 방법론 별로 단점으로 지적되고 있는 속도와 정확도를 개선시킬 수 있는 방법에 중점을 맞추어 크게 세가지를 논의하고 이에 대한 실증적 검증을 하고자 한다. 첫째, 최근 발행액이 많은 기초자산이 2개인 파생상품의 가치평가에 있어 유한차분법을 적용할 때, 근을 찾는 행렬이 삼대각구조(tridiagonal structure)를 갖지 않으므로 계산시간이 길어지는 단점이 있다. 이에 연산자분할법(operator splitting method)을 사용하여 같은 정확도를 유지하면서 계산시간을 감소시켜 줌을 보인다. 그러나, 이러한 시대적 요구에 비하여, 우리가 가지고 있는 보험요율을 위한 자료는 한정적이고 이를 사용한 예측모형도 단순 회귀모형에 국한되어 사용되고 있다는 사실은 앞으로 통계학의 발전과 이 분야에 대한 적극적인 참여가 요망된다고 하겠다.

둘째, 몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수(pseudo-random number) 대신 저불일치수열(low discrepancy sequence)인 준난수(quasi-random number)를 이용하면 유럽형 옵션의 가치 평가에서 속도 및 정확도가 매우 개선됨을 먼저 보인다. 조기상환형과 같은 미국형 옵션에서는 상관관계가 영(0)인 다차원의 난수가 필요한데 기존의 준난수는 차원이 커짐에 따라서 상관관계의 절대값이 증가하는 현상이 있어 적용하는데 한계가 있다. 이에 Joe와 Kuo (2003)방법론을 이용하여 준난수를 발생할 때 초기값을 최적화하는 방법으로 기존의 Sobol수열의 차원을 증가시켰으며, 그 중에서 상관관계에 문제가 있는 수열을 제외시켜 상관계수의 최대값을 특정값 이하로 제어하여 조기상환형과 같은 미국형옵션과 룩백(look back)과 같은 경로의존형 옵션의 가치평가에서 적용할 수 있도록 하였고 미국형 풋옵션에 적용하여 새로운 방법이 속도와 정확도가 개선됨을 보였다.

셋째, 민감도 측정값이 기존의 몬테카를로 시뮬레이션에서는 차분간격에 따라, 유한차분법에서는 격자의 크기에 따라 영향을 받는 등 비효율적이고 정확도가 낮다. 이에 유럽형옵션에서 말리아빈 미적분(Malliavin calculus)을 사용하여 차분간격에 무관한 민감도 계산방법인 우도비율법(likelihood ratio method)을, 미국형옵션에서는 경로의존형 근사법(pathwise derivatives estimates)을 제시하여 몬테카를로 시뮬레이션에서 가치평가 및 민감도를 한번의 난수생성으로 계산하는 방법을 제시하고, 마지막으로 유럽형 바닐라옵션을 이용한 옵션의 합성투자전략 중 비대칭 나비형스프레드(butterfly spread)와 미국형 풋옵션에 앞서 제안한 방법을 실증적으로 보여 주었다.

2. 본문

2.1. 유한차분법 및 몬테카를로 시뮬레이션 방법의 소개 및 비교

파생상품의 가치는 해당 상품의 특정조건 하에서 도출된 편미분방정식(Partial Differential Equation: PDE)을 만족시키는 해를 구하여 가치평가를 한다. 편미분방정식의 해를 구하기 위해서는 경계조건(boundary condition)이 필요한데 미국형옵션의 경우처럼 조기행사 옵션이 추가되면 경계조건을 확정할 수 없는 등의 문제가 발생한다. 이러한 경우 편미분방정식의 해를 구하기가 어려워지고 추가적인 가정들을 적용할 경우 해를 구하기란 불가능하거나 매우 어려워진다. 또한 옵션의 가치가 기초자산의 경로에 의존하는 경우, 기초자산이 복수인 경우 등은 정확한 해를 구할 수 없다. 이런 문제들을 해결하기 위해 수치해석적인 접근방법을 사용하는데 파생상품의 가치 평가 방법 중 수치해석적인 접근법으로는 몬테카를로 시뮬레이션과 유한차분법이 대표적이라 할 수 있다.

유한차분법은 파생상품의 가치가 만족시켜야 하는 편미분방정식을 차분방정식(difference equation)으로 변환시킨 후 수치해석적으로 풀어 가치를 평가하는 방법이다. 먼저 기초자산이 기하적 브라운운동(geometric Brownian motion)을 따른다면 기초자산의 가격 S 를 다음과 같은 확률미분방정식(Stochastic Differential Equation: SDE)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q)dt + \sigma dW_t, \quad (2.1)$$

여기서 μ 는 기초자산의 수익률(drift)항, σ 는 기초자산의 변동성, q 는 연속배당률, dW_t 는 표준 브라운운동이다. 식 (2.1)을 Itô정리에 적용하면 위험중립적 가치평가 하에서 옵션 가치가 만족시켜야 할 편미분방정식은 식 (2.2)와 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (2.2)$$

이 편미분방정식을 차분방정식으로 근사화하여 수치해석적으로 해를 구하는 방법이 유한차분법이다. 차분방정식의 예로 중앙차분방정식 (central difference equation)은 식 (2.3)과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(x_{i+1}) - V(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (2.3)$$

수치해석적 접근방법 중 난수를 생성하여 얻어지는 결과값들의 평균을 통해, 해를 찾고자 하는 방법을 몬테카를로 시뮬레이션이라 한다. 몬테카를로 시뮬레이션을 구현하는 방법을 유럽형 콜옵션의 예를 들어 간단히 소개하면, 먼저 기초자산의 가격에 대한 모형의 가정이 필요한데 여기서는 위에서 언급한 기하적 브라운운동을 따른다고 가정하자. 위험중립적 가치평가의 경우 만기 기초자산 S_T 는 로그정규분포(log-normal)를 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$S_T^{(i)} = S_0 e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T} + \sigma\sqrt{T}\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1). \quad (2.4)$$

먼저 표준정규분포를 따르는 난수인 ε_i 를 생성한 후 식 (2.4)를 이용하여 가상주가를 생성시킨다. 생성된 가상주가에 대한 만기에서의 콜옵션 가격을 계산한다. 행가가격이 K 인

콜옵션의 만기에서의 가격은 식 (2.5)이다.

$$C(S_T^{(i)}) = \max\{S_T^{(i)} - K, 0\}. \quad (2.5)$$

이런 과정을 반복적으로 시행하여 표본평균을 구한 후, 무위험 이자율로 할인하면, SLLN (strong law of large number)에 의하여 표본평균은 콜옵션 가치의 불편추정량(unbiased estimate)이 된다.

$$\hat{C}(S_0) = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max\{S_T^{(i)} - K, 0\}. \quad (2.6)$$

몬테카를로 시뮬레이션 기법은 분석적인(analytical) 해가 없는 경우 간단하면서도 유연한 해결책이다. 예를 들어 여러 개의 기초자산을 대상으로 하는 파생상품이나, 변동성 혹은 이자율이 상수가 아니라 특정한 확률과정(stochastic process)을 따를 경우와 같이 다수의 확률 요인들을 포함하는 파생상품의 가격 결정에서는 정확한 해를 구하기가 불가능하거나 어렵기 때문에 시뮬레이션기법인 몬테카를로 방법을 주로 사용한다. 또한 자산의 경로를 생성하기 쉽기 때문에 베리어옵션, 아시안옵션, 룩백옵션과 같은 경로의존형 옵션이나 자산에 점프과정 등이 포함되는 경우에도 적용 가능성이 높다는 장점이 있다. 그러나 몬테카를로 시뮬레이션은 표준오차를 줄이기 위해서 기본적으로 많은 계산량이 요구되기 때문에 비효율적이라는 단점을 가지고 있다.

유한차분법과 몬테카를로 시뮬레이션 방법은 서로 대립하고 경쟁하는 방법이라기보다는 상호보완적인 관계이다. 따라서 두 방법의 장단점과 상대적 강점이 있는 문제에 적용하여 적절하게 사용할 수 있다. 유한차분법의 장점은 변수의 차원이 2개 이하일 경우 계산속도가 우수하며 민감도 계산이 가치평가와 동시에 이루어져 속도 측면에서 우수하다. 몬테카를로 시뮬레이션 방법과 비교할 때, 미국형 옵션의 최적 행사시점을 고려하여 옵션가격을 결정하는데 있어서 우수한 성과를 보이며 민감도 계산에서도 정확도가 높은 것으로 알려져 있다. 반면 단점으로는 변수의 차원이 3개 이상일 경우 계산량이 급격하게 증가하여 비효율적이며 수학적 기반이 몬테카를로 시뮬레이션보다 복잡하여 이를 구현하는데 어려움이 있다.

몬테카를로 시뮬레이션의 장점은 수학적 기반이 간단하며 자산들 간의 상관관계에 대한 고려가 쉽고 정확도를 높이기 위해서는 더 많은 시뮬레이션 횟수를 고려하면 된다. 또한 모델을 바꾸기가 쉬우며 여러 개의 기초자산을 대상으로 하거나 다수의 확률 요인들을 포함하는 경우에도 적용 가능성이 높고 복잡한 경로 의존형 옵션의 경우에도 쉽게 적용 가능하다. 단점으로는 분석적 방법이나 유한차분법 등에 비하여 계산시간이 많이 소요되며 민감도 계산이 불가능하지는 않으나 계산량이 많아 비효율적이며 정확도를 높이기 위해서는 시뮬레이션 횟수를 기하적으로 증가시켜야 한다.

2.2. 연산자 분할법을 이용한 2차원 유한차분법 구현

최근 주가연계증권 등에서 주류를 이루고 있는 기초자산이 2개인 파생상품의 가치평가 및 민감도 분석에 대한 필요성이 크다. 기존의 유한차분법을 이용하면 근을 찾는 행렬이 삼대각구조를 갖지 않으므로 계산시간이 길어지는 단점이 있다. 이에 기초자산이 2개

인 파생상품의 가치 평가를 연산자분할법(operator splitting method)을 사용하여 같은 정확도를 유지하면서 계산시간을 감소시킨다.

구체적으로, 1개의 자산으로 이루어진 파생상품의 가치평가를 위한 편미분방정식과 달리 2개의 자산으로 이루어진 파생상품의 경우 다음과 같은 편미분방정식의 해를 구하여 가치를 평가할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + (r - \delta_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} \\ + (r - \delta_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

유한차분법을 적용할 때 기초자산 가격에 무관한 행렬식을 얻기 위하여 다음과 같은 변수 변환을 한다.

$$S_1(x_1) = S_{10}e^{x_1}, \quad S_2(x_2) = S_{20}e^{x_2}, \quad \hat{t} = T - t. \quad (2.8)$$

변수변환식 (2.8)을 식 (2.7)에 적용하면 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \nu_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} - rv, \quad (2.9)$$

여기서, $\nu_i = (r - \delta_i - 1/2\sigma_i^2)$ 이다. 2개의 변수 x_1 과 x_2 를 등간격으로 나누어 생성된 격자점에서 차분방정식으로 나타내면 행렬식이 도출되는데 이 행렬은 블록삼대각구조(block tridiagonal structure)로 기초자산이 1개인 경우와 달리 삼대각구조가 아니다. 따라서 선형계(linear system)의 해를 구하는데 사용한 기존 방법인 Crout 인수화(factorization) 방법론을 사용할 수 없고 반복해법(iterative solver)인 Gauss-Seidel이나 SOR(successive overrelaxation method)를 사용해야 하나 이는 계산시간이 많이 걸리는 단점이 있다. 이런 문제를 해결하기 위하여 연산자분할법을 사용하고자 편미분방정식 (2.9)를 아래와 같이 분할한다.

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - r, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{L}v = \mathcal{L}_1 v + \mathcal{L}_2 v, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_1 v = \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \nu_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_1 \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \lambda_2 r v, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_2 v = \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + (1 - \lambda_1)\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - (1 - \lambda_2)r v, \quad (2.13)$$

여기서, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ 이다. 식 (2.11)와 (2.13)을 차분법을 적용하여 풀 때 전단계 수치해 $v_{i,j}^n$ 에서 현단계 수치해 $v_{i,j}^{n+1}$ 에 도달하기 위하여 식 (2.11)을 이용하여 중간단계인 $\tilde{v}_{i,j}$ 를 먼저 계산한 후 식 (2.13)을 이용하여 현단계의 수치해를 구하면 된다. 먼저 식 (2.11)을 유한차분 근사식에 적용하면 식 (2.14)과 같다.

$$\frac{\tilde{v}_{i,j} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \simeq \frac{\partial v}{\partial t} \simeq \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\tilde{v}_{i+1,j} - 2\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i-1,j}}{\Delta x_1^2} + \nu_1 \frac{\tilde{v}_{i+1,j} - \tilde{v}_{i-1,j}}{2\Delta x_1} - \lambda_2 r \tilde{v}_{i,j}$$

$$+ \lambda_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n - v_{i-1,j+1}^n + v_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x_1 \Delta x_2}. \quad (2.14)$$

식 (2.14)의 한쪽 격자(j)를 고정시킨 후 정리하면 식 (2.15)와 같은 행렬방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\tilde{v}_{\cdot,j} - v_{\cdot,j}^n}{\Delta t} = A_1 \begin{pmatrix} \tilde{v}_{0,j} \\ \tilde{v}_{1,j} \\ \vdots \\ \tilde{v}_{I,j} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 \rho \sigma_1 \sigma_2}{4\Delta x_1 \Delta x_2} B_1 \begin{pmatrix} v_{0,j+1}^n - v_{0,j-1}^n \\ v_{1,j+1}^n - v_{1,j-1}^n \\ \vdots \\ v_{I,j+1}^n - v_{I,j-1}^n \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

식 (2.15)의 행렬 A_1, B_1 은

$$A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\gamma_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & -\gamma_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & -\gamma_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_1 & -\gamma_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

이고 $\beta_1, \gamma_1, \alpha_1$ 은 식 (2.18)과 같이 정리된다.

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{2\Delta x_1^2} - \frac{\nu_1}{2\Delta x_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\sigma_1^2}{\Delta x_1^2} + \lambda_1 r, \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_1^2}{2\Delta x_1^2} + \frac{\nu_1}{2\Delta x_1}. \quad (2.18)$$

식 (2.15)의 행렬방정식의 해를 구하기 위해서는 행렬 A_1 이 삼대각 행렬이 되어야 기존의 Crout 인수화 방법론을 사용할 수 있다. 따라서, 양끝 열을 제거한 \hat{A}_1 와 경계조건을 이용하여 정리하면 삼대각 구조가 되어 Crout 인수화 방법론을 사용하여 중간단계 해인 $\tilde{v}_{\cdot,j}$ 를 구할 수 있다.

$$(I - \Delta t \hat{A}_1) \tilde{v}_{\cdot,j} = v_{\cdot,j}^n + \frac{\lambda_1 \rho \sigma_1 \sigma_2}{4\Delta x_1 \Delta x_2} B_1 (v_{\cdot,j+1}^n - v_{\cdot,j-1}^n) + \begin{pmatrix} \Delta \beta_1 \tilde{v}_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta \alpha_1 \tilde{v}_{I,j} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

전단계와 동일한 방법으로 식 (2.13)을 유한차분 근사식에 적용하면 식 (2.20)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j}}{\Delta t} &\simeq \frac{\partial v}{\partial t} \\ &\simeq \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x_2^2} + \nu_2 \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta x_2} - (1 - \lambda_2)rv_{i,j}^{n+1} \\ &\quad + (1 - \lambda_1)\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\tilde{v}_{i+1,j+1} - \tilde{v}_{i+1,j-1} - \tilde{v}_{i-1,j+1} + \tilde{v}_{i-1,j-1}}{4\Delta x_1\Delta x_2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

마찬가지로 식 (2.20)을 다른 한쪽 격자(i)를 고정시켜 행렬방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{v_{i,\cdot}^{n+1} - \tilde{v}_{i,\cdot}}{\Delta t} = A_2 \begin{pmatrix} v_{i,0}^{n+1} \\ v_{i,1}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{i,J}^{n+1} \end{pmatrix} + \frac{(1 - \lambda_1)\rho\sigma_1\sigma_2}{4\Delta x_1\Delta x_2} B_1 \begin{pmatrix} \tilde{v}_{i+1,0}^n - \tilde{v}_{i-1,0}^n \\ \tilde{v}_{i+1,1}^n - \tilde{v}_{i-1,1}^n \\ \vdots \\ \tilde{v}_{i+1,J}^n - \tilde{v}_{i-1,J}^n \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

여기서 행렬 B_1 은 식 (2.17)와 동일하며 행렬 A_2 은

$$A_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & -\gamma_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_2 & -\gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

이고 $\beta_2, \gamma_2, \alpha_2$ 는 식 (2.23)과 같다.

$$\beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{2\Delta x_2^2} - \frac{\nu_2}{2\Delta x_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\sigma_2^2}{\Delta x_2^2} + (1 - \lambda_2)r, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_2^2}{2\Delta x_2^2} + \frac{\nu_2}{2\Delta x_2}. \quad (2.23)$$

행렬 A_2 를 전단계와 동일한 방법으로 삼대각 구조를 만들어준 후 Crout 인수화 방법론을 사용하여 해($v_{i,\cdot}^{n+1}$)를 구한다.

$$(I - \Delta t \hat{A}_2)v_{i,\cdot}^{n+1} = \tilde{v}_{i,\cdot} + (1 - \lambda_1) \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4\Delta x_1\Delta x_2} B_2(\tilde{v}_{i+1,\cdot} - \tilde{v}_{i-1,\cdot}) + \begin{pmatrix} \Delta\beta_2 v_{i,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta\alpha_2 v_{i,J} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

위의 두과정을 반복하여 현재시점의 각 격자점에 해당하는 해를 찾는다. 구하고자하는 현재시점의 기초자산 가격과 인접한 네개의 격자점에서의 해를 이용하여 2차원 보간법으로 구하고자 하는 옵션의 현재 가치를 구한다.

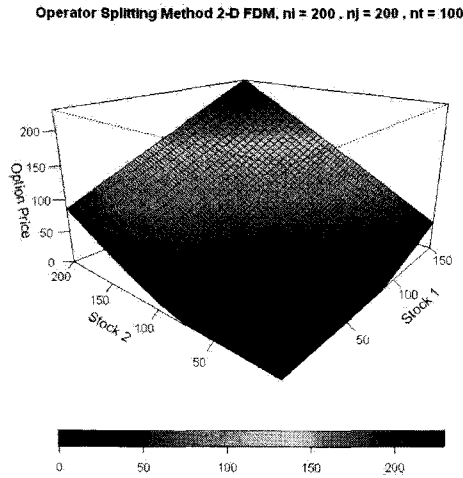


그림 2.1: 연산자분할법을 이용한 기초자산이 두개인 바스켓 콜옵션의 가격 그래프 (격자를 $(200 \times 200) \times 100$ 으로 설정하여 계산한 옵션의 가격 그래프)

표 2.1: 기초자산이 두개인 바스켓 콜옵션의 가격 (연산자분할법에서 격자수 변화에 따라, 준난수와 의사난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션에서 수행회수의 변화에 따른 옵션 가격의 절대오차 및 소요시간(가치평가에 사용한 변수: 기초자산의 가격은 둘다 50, 변동성은 각각 0.25, 0.35, 상관계수는 -0.65 , 무위험이자율은 0.045, 배당률은 각각 0.05, 0.07, 만기는 1년, 행사가격은 100임.사용된 격자구간은 $S1_{min}=0.1, S1_{max}=150, S2_{min}=0.1, S2_{max}=200$ 임))

(Grid Size) × Time Step	OSM			QMC				MC			
	price	error	CPU time	Nsim	price	error	CPU time	Nsim	price	error	CPU time
(50 × 50) × 25	4.919	0.302	7.88	4096	4.609	0.008	0.14	16384	4.587	0.030	1.00
(100 × 100) × 50	4.658	0.041	63.77	8192	4.610	0.007	0.30	32768	4.526	0.091	2.07
(150 × 150) × 75	4.649	0.032	215.19	16384	4.614	0.003	0.58	65536	4.611	0.006	4.11
(200 × 200) × 100	4.622	0.005	509.51	32768	4.614	0.003	1.12	131072	4.606	0.011	8.06

연산자분할법을 이용한 기초자산이 2개인 옵션의 가치평가는 삼대각 구조가 성립되어 Crout 인수화 방법론을 사용할 수 있게 되므로 해를 쉽고 빠르게 구할 수 있다. 기존의 명시적 유한차분법(explicit FDM)을 적용한 경우와 비교하여 속도면에서 우월한 방법론이라 할 수 있다. 또한, 연산자분할법에서는 단순한 로그변환만을 거치기 때문에 격자선이 수직으로 교차하고 최종결과값이 부드럽게 나타난다. 연산자분할법을 적용한 예로 식 (2.25)의

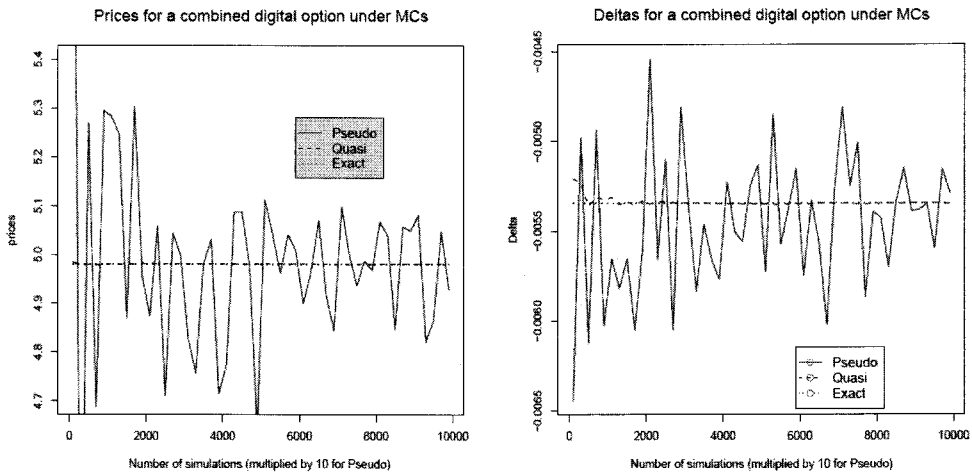


그림 2.2: 의사난수와 준난수를 사용한 디지털옵션의 가격과 델타 (디지털 옵션의 수익함수는 $20 \times \mathbf{1}_{\{90 \leq S_T \leq 110\}}$ 이고 기초자산의 현재가격 $S_0=100$, 변동성 $\sigma=30\%$, 무위험이자율 5% 잔존만기는 1년이다. x 축의 시뮬레이션 횟수는 준난수에 사용된 횟수이고 의사난수에 사용된 횟수는 x 축 값에 10을 곱한 값이다)

수익구조를 갖는 기초자산이 두개인 바스켓옵션의 가치 평가에 적용해 보았다.

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 + S_2 - K, 0). \quad (2.25)$$

그림 2.1의 바스켓 옵션의 가격 그래프를 보면 앞에서 언급하였듯이 격자선이 수직으로 교차하고 있고, 결과값이 부드럽게 나타남을 알 수 있다. 표 2.1의 격자수의 변화에 따른 옵션 가격의 오차를 보면 격자수를 증가시킴으로 수렴속도가 빠르게 참값에 접근하고 있는 것을 알 수 있다. 가치평가에 소요된 상대시간을 보면 연산자분할법의 경우 격자수에 비례하여 증가함을 알 수 있다. 준난수와 의사난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션과 비교하면 상대적으로 시간이 매우 많이 소요되는데 이것은 연산자분할법의 경우 모든 격자에서 가격계산을 하는 반면 몬테카를로 시뮬레이션에서는 유럽형 옵션이기 때문에 차원이 기초자산의 수인 2로 작아 난수의 발생이 적어 직접적인 비교는 어렵다. 하지만 만기에 해당하는 시간간격만큼의 난수 발생 및 가격계산을 가정하더라도 준난수를 사용한 경우의 수행시간이 상대적으로 우월함을 볼 수 있다. 구현에 사용한 프로그래밍 언어는 “R”이며, 컴퓨터 사양은 2.13GHz, 2GB RAM을 사용하였다.

2.3. 몬테카를로 시뮬레이션에서의 의사난수 대신 준난수의 사용

몬테카를로 시뮬레이션 방법은 난수를 생성하여 얻어지는 결과값들의 평균을 통해, 해를 찾고자 하는 방법으로 여기서 사용되는 난수의 생성방법 및 특성이 결과값에 큰 영향을 미친다. 기본적인 몬테카를로 시뮬레이션에서는 의사난수(pseudo-random number)를 생성하여 사용한다. 이 방법론은 수학적 기반이 간단하며 각 차원간의 상관도에 대한 고

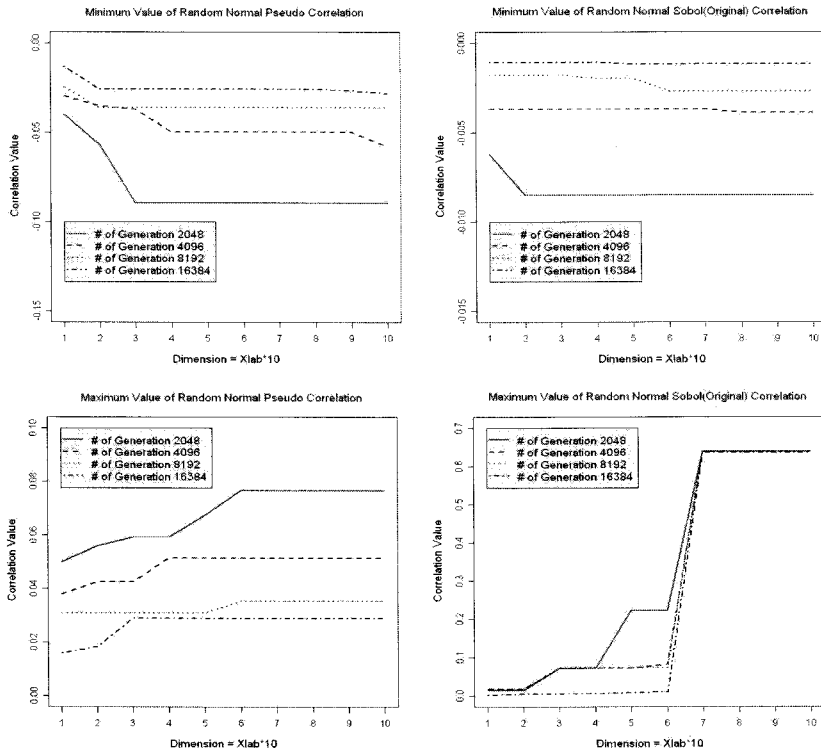


그림 2.3: 의사난수와 준난수의 차원에 따른 상관계수의 최대값과 최소값 그래프

려가 쉬우나 표준오차를 줄이기 위해서는 시행 횟수가 기하급수적으로 늘어나 수행시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 이런 문제를 보완하기 위해 의사난수 대신 저불일치수열(low discrepancy sequence)인 준난수(quasi-random number)를 이용하면 시행 횟수가 적어도 높은 균일성(uniformity)을 지니며 확정된 난수가 생성되기 때문에 의사난수보다 상대적으로 수렴속도가 빠를 뿐만 아니라 정확도도 개선된다. 또한, 옵션의 민감도 계산에서도 의사난수를 사용할 경우 난수의 불확정성에 의해 오차가 커질 수 있는 반면 준난수는 확정된 난수이므로 안정적인 계산이 가능하다. 저불일치 수열로 널리 알려진 방법은 Halton, Faure, Niederreiter, Sobol 수열 등이 있는데 본 논문에서는 Sobol 수열을 사용한다.

가치평가와 민감도 계산의 구체적인 예로 디지털옵션에 적용하여 옵션의 가치와 민감도 지표 중 헤지 및 위험액 측정 등에 가장 중요하고 많이 사용되는 델타를 기준으로 의사난수법과 준난수법을 사용한 경우를 닫힌 해로 구한 값과 비교해 보면 그림 2.2와 같이 의사난수법은 진동을 보이며 변동성이 크게 나타나는 반면 준난수법은 빠르게 닫힌 해로 구한 값에 수렴하는 것을 알 수 있다.

몬테카를로 시뮬레이션을 사용하여 여러 개의 기초자산을 갖거나 경로의존적인 파생상품의 가치평가 및 민감도 계산을 할 경우 발생된 난수들의 차원간 상관관계의 안정성이 중요하다. 차원이 n 이면 차원간의 상관관계는 $n(n-1)/2$ 개가 존재하는데, n 차원의 상관관계

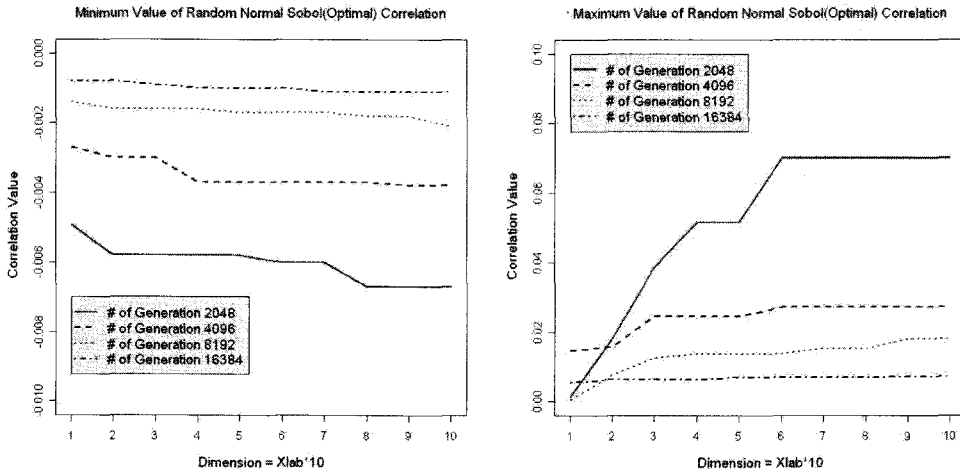


그림 2.4: 상관계수의 최대값을 제어하여 새로 생성시킨 준난수의 차원간 상관계수 그래프

수 최대값과 최소값을 다음과 같이 정의한다.

$$\rho_{\max}(n) = \max_{\{1 \leq i \leq j \leq n\}} \rho_{ij}, \quad \rho_{\min}(n) = \min_{\{1 \leq i \leq j \leq n\}} \rho_{ij}, \quad (2.26)$$

여기서 ρ_{ij} 는 i 차원 난수와 j 차원 난수간의 상관계수를 의미한다. 그림 2.3은 차원이 증가함에 따라서 각 차원에서의 상관계수의 최대값과 최소값을 나타낸 것인데, 의사난수는 차원이 증가하더라도 상관계수의 최대값과 최소값이 영(0)의 근방에 위치하는 안정적인 형태를 보여주고 있으나, 준난수의 경우는 상관계수의 최소값은 매우 안정적으로 영의 근방에 위치하나 최대값은 특정 차원보다 크면 급속히 튀는 현상을 보인다. 이런 현상이 다차원의 시뮬레이션에서 준난수를 이용한 방법보다 의사난수를 이용한 방법을 추천하는 이유이다.

구체적으로, 조기상환형과 같은 미국형 옵션에서는 상관관계가 영(0)인 다차원의 난수가 필요한데 기존의 준난수는 차원이 커짐에 따라서 상관계수의 절대값이 그림 2.3과 같이 증가하는 현상이 있어 적용하는데 한계가 있다. 이런 단점을 보완하기 위해 튀 현상을 발생시키는 차원에 해당하는 수열을 제외시키는 방법으로 상관계수의 최대값을 특정값 이하로 제어하는 방법을 사용하였다. 새롭게 제안된 방법으로 생성한 준난수를 이용하여 차원 증가에 따른 상관계수의 최대값을 그림으로 나타내면 그림 2.4와 같이 개선되어 차원이 증가하더라도 상관관계가 영에 가까운 준난수가 생성됨을 알 수 있다. 따라서 조기상환형과 같은 미국형옵션과 록백과 같은 경로의존형 옵션의 가치평가에서 준난수를 사용하면 속도와 정확도를 개선시켜 줄 수 있다.

2.4. 몬테카를로 시뮬레이션에서의 민감도 계산

옵션의 민감도는 기초자산 가격, 변동성의 변화 등에 따른 옵션가격의 변화를 나타내는 지표인데, 예를 들어 델타(delta)는 기초자산 가격의 변화량 ΔS 에 따른 옵션가격의 변화

량 ΔV 을 나타낸다. 이는 기초자산 가격변화에 대한 미분값이므로 유한차분 근사식(finite difference approximation)을 사용하여 옵션의 민감도를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(S + \Delta S) - V(S - \Delta S)}{2\Delta S}, \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V(S + \Delta S) - 2V(S) + V(S - \Delta S)}{\Delta S^2}, \\ \nu &= \frac{\partial V}{\partial \sigma} \approx \frac{V(\sigma + \Delta\sigma) - V(\sigma - \Delta\sigma)}{2\Delta\sigma}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

위의 근사방법은 몬테카를로 시뮬레이션을 통해서 변수 변화에 따른 옵션값 $V(S)$, $V(S + \Delta S)$, $V(S - \Delta S)$, $V(\sigma + \Delta\sigma)$, $V(\sigma - \Delta\sigma)$ 을 모두 계산해야 하기 때문에 시뮬레이션을 여러 번 시행해야하므로 수행시간이 길어지는 단점이 있으며, 정확도 측면에서도 기초자산의 가격변화 크기와 변동성 변화의 크기에 따라 옵션의 민감도 값이 변하므로 Boyle, Broadie, and Glasserman (1997)가 지적했듯이 파생상품에 따른 적절한 변화의 크기를 판단할 수 없어 정확한 민감도를 구할 수 없다. 이에 좀 더 효율적인 방법으로 유럽형 옵션의 경우 우도비율법(likelihood ratio method)을 이용하고, 미국형 옵션과 같이 경로의존형에는 경로의존형 근사방법(pathwise derivatives estimates)이 개발되어 속도와 정확도를 개선시켰다.

먼저 우도비율법을 보면, 기초자산이 로그정규분포를 따를때, X 가 현재시점 대비 만기 시점에서의 기초자산 로그수익률이면 $X = (r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}W$, $W \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ 이고 수익함수는 $g(X) = \phi(e^X)$ 이라고 하자. 정규분포에 대한 확률밀도함수를 p 라 하면 위험중립 하에서 파생상품의 가치는 아래와 같다.

$$I(g) = E[e^{-rT} \phi(e^X)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \phi(e^x) p(x) dx, \quad (2.28)$$

수익함수 ϕ 가 모수 λ 에 의존하지 않는다면 모수에 대한 민감도는 아래와 같이 가중치가 곱해진 기대값으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial I(g)}{\partial \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \phi(e^x) \frac{\partial p}{\partial \lambda}(x) dx = E \left[e^{-rT} \phi(X) \frac{\partial \log p}{\partial \lambda}(X) \right]. \quad (2.29)$$

예를 들어, λ 가 초기주가 S_0 이면 $\partial I(g)/\partial \lambda$ 는 delta(Δ)가 되고, λ 가 변동성 σ 가 되면 vega(ν)가 된다. 여기서 $\partial \log p/\partial \lambda(X)$ 를 말리아빈가중치(Malliavin weight)라 한다.

이 방법을 사용할 경우의 장점은 민감도의 수렴도가 준난수를 사용했을 경우 $1/N$, 의 사난수를 사용할 경우 $1/\sqrt{N}$ 로 수행횟수의 증가에 따라 빠르게 수렴하게 된다. 또한 난수를 한번 생성하여 가격과 다양한 민감도를 동시에 계산할 수 있어 상대적으로 속도면에서 우월하다.

구체적인 유도과정을 보면 먼저, 기초자산이 기하적 브라운운동(geometric Brownian motion)을 따르면 기초자산 로그수익률은 다음과 같고

$$X_T \equiv x + \mu T + \sigma\sqrt{T}W, \quad W \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1) \quad \text{and} \quad \mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.30)$$

이러한 가정 하에서의 옵션의 민감도들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial I(g)}{\partial x}(x, \mu, \sigma) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} g(x + \mu T + \sigma\sqrt{T}\omega) \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw \quad (2.31)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g'(x + \mu T + \sigma\sqrt{T}\omega) \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw \quad (2.32)$$

$$= [\dots] + \int_{-\infty}^{\infty} g(x + \mu T + \sigma\sqrt{T}\omega) \frac{w}{\sigma\sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw. \quad (2.33)$$

따라서 델타는 미분의 연쇄법칙을 적용하여 기대값을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial I(g)}{\partial S_0} = \frac{\partial I(g)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S_0} = E \left[g(X_T) \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} \right] \frac{1}{S_0}. \quad (2.34)$$

이 경우 정규분포를 따르는 난수를 생성한 후 만기시점의 기초자산 로그수익률을 이용하여 가격을 평가하고 로그수익률과 이미 생성된 난수를 이용하여 델타를 측정할 수 있으므로 한번의 난수생성으로 가격과 델타를 동시에 측정할 수 있다.

- Gamma(Γ): 감마는 델타를 기초자산으로 한번 더 미분하면 되므로 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(g)}{\partial S_0^2} &= \frac{\partial}{\partial S_0} E \left[g(X_T) \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} \right] \cdot \frac{1}{S_0} + E \left[g(X_T) \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} \right] \cdot \frac{-1}{S_0^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial \omega}(x + \mu T + \sigma\sqrt{T}\omega) \frac{\omega}{\sigma^2 T} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw \cdot \frac{1}{S_0^2} + E \left[g(X_T) \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} \right] \cdot \frac{-1}{S_0^2} \\ &= \frac{1}{S_0^2} E \left[g(X_T) \left(\frac{W^2}{\sigma^2 T} - \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{\sigma^2 T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

- Vega(ν): 베가도 델타의 유도과정을 거치면 식 (2.34)의 두번째 방정식과 같이 얻을 수 있는데 추가적인 측정 없이 앞에서 구한 감마값을 이용하여 계산할 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(g)}{\partial \sigma} &= E \left[g(X_T) \frac{W^2 - \sigma\sqrt{T}W - 1}{\sigma} \right] \\ &= E \left[g(X_T) \left(\frac{W^2}{\sigma^2 T} - \frac{W}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{\sigma^2 T} \right) \right] S_0^2 \sigma T \\ &= \Gamma S_0^2 \sigma T. \end{aligned} \quad (2.36)$$

우도비율법은 기초자산이 여러 개인 경우에도 확장 가능하며 말리아빈미적분을 사용하면 기초자산의 확률과정이 기하적 브라운운동이 아닌 다양한 분포에도 적용 가능할 뿐만 아니라, 미국형 스타일에도 적용 가능하다.

경로의존형 근사방법을 구체적으로 보면, 델타의 경로의존형 추정값은 i 번째 시뮬레이션으로부터 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\frac{d\hat{V}_i}{dS_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{V}_i(S_0 + \epsilon) - \hat{V}_i(S_0)}{\epsilon}. \quad (2.37)$$

예를 들어, 파생상품이 유럽형 풋옵션이고 식 (2.37)에서 $\hat{V}_i(S_0 + \epsilon)$ 와 $\hat{V}_i(S_0)$ 가 기초자산의 현재가격이 각각 S_0 와 $S_0 + \epsilon$ 이나 같은 로그수익률을 갖는 경로를 따를 경우, $S_T \neq K$ 가 아니라면 풋옵션 P 의 델타 추정값은 다음과 같다.

$$\frac{d\hat{P}_i}{dS_0} = \frac{d\hat{P}_i}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0} = e^{-rT} (-1)_{S_T < K} \frac{S_T}{S_0}, \quad (2.38)$$

여기서 $(-1)_{S_T < K}$ 는 $S_T < K$ 일 경우 -1 이고 아니면 0 을 갖는 지표함수이다. 식 (2.38)에서 구한 델타의 추정값이 델타에 대한 불편추정량(unbiased estimate) 여부는 식 (2.39)의 첫번째 등식에서 기대값 연산자와 미분연산자가 상호교환 가능성에 의존한다.

$$E \left[\frac{d\hat{P}_i}{dS_0} \right] = \frac{dP}{dS_0} \equiv \frac{d}{dS_0} E[\hat{P}_i]. \quad (2.39)$$

Lebesgue의 지배수렴정리(Lebesgue's dominated convergence theorem)를 식 (2.39)에 적용하면 풋옵션의 경우에는 불편추정량임을 보일 수 있고 우도비율법과 같이 난수를 한번 생성하여 파생상품의 가격 및 민감도를 동시에 추정할 수 있다. 배가도 마찬가지로 만기시점의 기초자산을 변동성에 대하여 미분하여 구하면 다음과 같다.

$$\nu = \frac{dP}{d\sigma} = e^{-rT} E \left[(-1)_{S_T < K} \frac{S_T}{\sigma} \left\{ \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right\} \right]. \quad (2.40)$$

3. 사례 연구

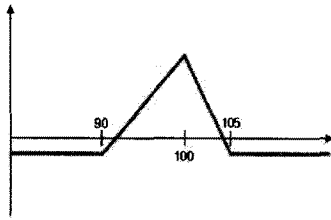
3.1. 비대칭 나비형스프레드

본 절에서는 바닐라옵션을 이용한 옵션의 합성투자전략 중 비대칭 나비형스프레드(butterfly spread) 전략에 2장에서 다룬 유한차분법과 준난수 및 의사난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션을 적용하여 구현 시 유의해야 할 사항들과 결과의 시사점 등을 살펴보고자 한다.

먼저 그림 3.1와 같은 수익구조를 갖는 비대칭 나비형스프레드를 유럽형 바닐라콜옵션 또는 풋옵션의 조합으로 구성한다.

비대칭 나비형스프레드를 갖는 이색옵션을 콜옵션으로 복제하려면 행사가격 90인 콜옵션 1계약 매수, 행사가격 100인 콜옵션 3계약 매도, 행사가격 105인 콜옵션 2계약을 매수하면 된다. 즉, 합성포트폴리오는 $C(90) - 3C(100) + 2C(105)$ 이며, 마찬가지로 풋옵션으로도 구성할 수 있다.

이 이색옵션은 닫힌 해가 있는 바닐라옵션의 조합으로 구성되어 정확한 가치평가가 가능하므로 유한차분법을 사용한 가치평가와 준난수, 의사난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레



$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & S_T < 90, \\ S_T - 90 & 90 \leq S_T < 100, \\ 10 - 2(S_T - 100) & 100 \leq S_T < 105, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

그림 3.1: 유럽형 비대칭 나비형스프레드의 수익구조

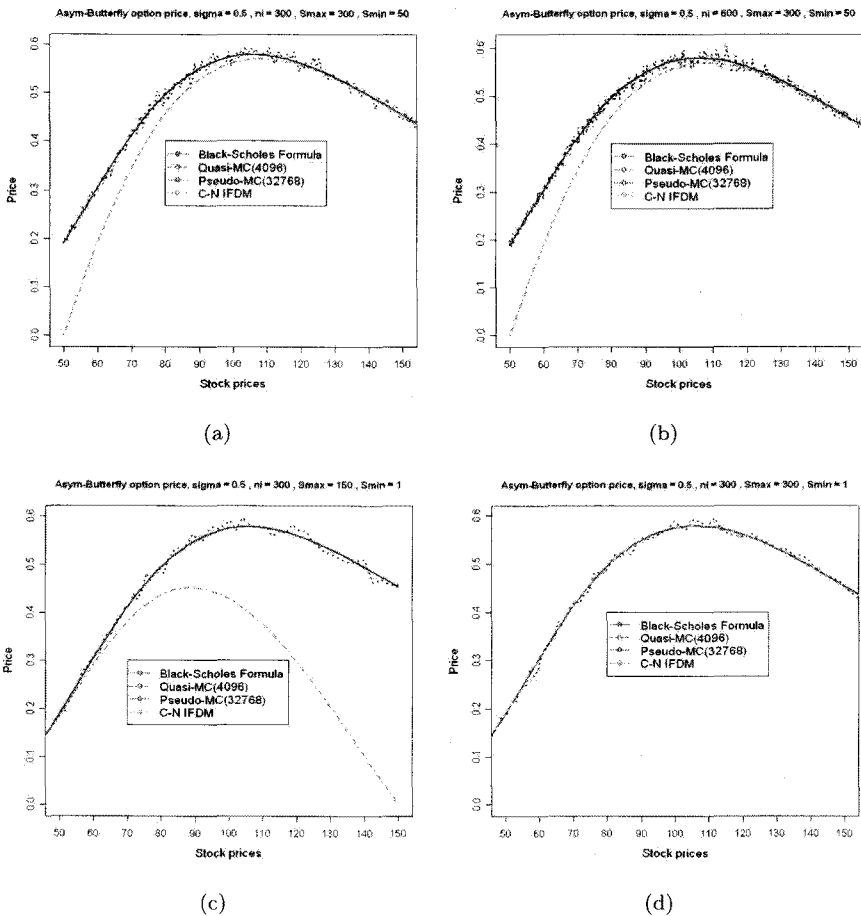


그림 3.2: 유한차분법, 의사난수와 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션에 의한 비대칭 나비형 스프레드의 가격평가 결과 비교 그래프 (몬테카를로 시뮬레이션에서의 의사난수의 시행횟수는 $2^{15}=32768$, 준난수의 시행횟수는 $2^{12}=4096$ 이며 유한차분법의 격자수는 (b)는 600×600 , 나머지는 300×300 으로 설정. 이자율 3%, 변동성 50%, 잔존만기 1년으로 고정하였고, 기초자산의 가격은 50부터 150까지 변환(x 축))

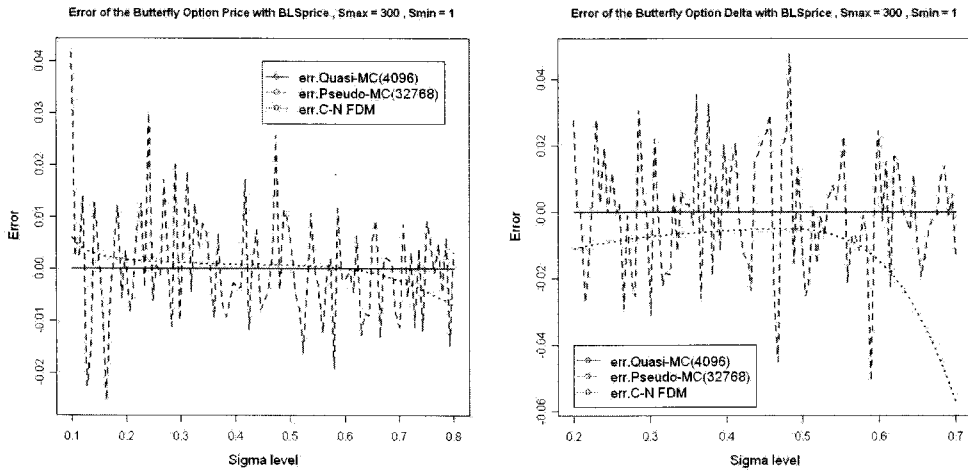


그림 3.3: 유한차분법, 의사난수와 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션에 의한 비대칭 나비형 스프레드의 가격 절대오차 및 델타 상대오차 비교 그래프 (몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수의 시행횟수는 $2^{15} = 32768$, 준난수의 시행횟수는 $2^{12} = 4096$ 이며 유한차분법의 격자수는 300×300 , $S_{min}=1$, $S_{max}=300$ 으로 설정. 기초자산의 가격은 100, 이자율 3%, 잔존만기 1년으로 고정하였고, 변동성은 10%부터 80%까지 변환(x축))

이선에 의한 가치평가와의 오차를 관찰할 수 있다. 유한차분법의 격자개수 및 격자 구간은 그림 3.2에 각각 표시되어 있으며 몬테카를로 시뮬레이션의 시행회수는 의사난수법은 $2^{15}=32768$ 회, 준난수법은 $2^{12}=4096$ 회를 시행하였다.

그림 3.2에서 볼 수 있듯이 기초자산 현재가격의 영향을 받지 않는 몬테카를로 시뮬레이션과는 달리 유한차분법에서 변동성이 큰 경우에 격자생성 구간의 폭이 적절히 설정되지 않으면 오차가 발생할 수 있음을 발견하였다. 그림 3.2(a)는 유한차분법에서 격자생성 구간의 하방인 S_{min} 이 행사가격의 절반으로 설정되어 있더라도 변동성이 충분히 크면 유한차분법을 사용한 경우 오차가 크게 발생함을 알 수 있고, 그림 3.2(b)는 그림 3.2(a)와 같은 격자생성 구간에서 격자수를 늘렸을 경우로 격자구간이 잘못 설정되었을 때에는 격자수를 증가시키더라도 오차가 개선되지 않음을 보여준다. 그림 3.2(c)는 상방인 S_{max} 가 충분히 크지 않게 설정된 경우로 여타 방법론에 비해 상방에서 큰 오차가 발생하고 있다. 이러한 현상은 변동성이 커질수록 심해지는 경향이 있음을 확인할 수 있었다. 그림 3.2(d)는 행사가격을 중심으로 격자생성 구간을 넓게 설정한 경우로 오차가 거의 나타나지 않았다.

그림 3.3은 각 방법론의 가격 및 델타에 대한 변동성의 변화에 따른 단힌 해와의 오차를 나타낸 것으로 가격의 절대오차는 충분한 격자 생성구간을 적용한 유한차분법의 경우 변동성이 커지면 오차가 증가하였으나 미비한 수준이었고, 몬테카를로 시뮬레이션에서 준난수를 사용한 경우 전구간에서 단힌 해와 거의 같은 결과치를 보여준 반면 의사난수의 경우 시행회수가 준난수보다 8배 많음에도 불구하고 오차가 진동하고 있음을 알 수 있다. 델

표 3.1: 유한차분법, 의사난수와 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션 방법의 미국형 풋옵션의 가격 및 델타 평가 결과 (몬테카를로 시뮬레이션의 결과값은 유한차분법의 결과값에 대한 오차를 나타낸 것이며, 시뮬레이션의 기본 가정은 행사가능횟수를 32로 설정하였고 의사난수의 시행횟수는 $2^{14}=16384(8192 + 8192 \text{ antithetic})$ 의 20번 시행한 평균값이고, 준난수의 시행횟수는 $2^{12}=4096$ 이며 유한차분법의 격자수는 500×500 으로 설정. 입력변수는 행사가격 40, 이자율 6%로 고정하였고 기초자산의 가격, 변동성, 잔존만기는 표 좌측에 표기. (s.e)는 각 시뮬레이션의 표준오차임)

S	σ	T	Price						Delta(Δ)						
			FDM		Pseudo		Quasi		FDM		Pseudo			Quasi	
			(C-N)	price (error)	(s.e)	Original	Optimal	(C-N)	Pathwise (error)	(s.e)	Likelihood	Original Pathwise	Optimal Pathwise		
36	0.2	1	4.49	-0.02	0.02	0.02	-0.03	-0.70	0.01	0.01	-1.42	0.03	0.01		
36	0.2	2	4.85	-0.03	0.02	0.01	-0.04	-0.62	0.02	0.01	-1.07	0.03	0.01		
36	0.4	1	7.11	-0.02	0.02	0.15	-0.08	-0.51	0.00	0.01	-0.50	-0.02	0.00		
36	0.4	2	8.51	-0.03	0.03	0.19	-0.13	-0.44	0.01	0.00	-0.47	0.00	0.00		
38	0.2	1	3.26	-0.02	0.01	0.08	-0.10	-0.54	0.01	0.01	-0.44	0.01	0.00		
38	0.2	2	3.75	-0.03	0.01	0.09	-0.09	-0.49	0.02	0.01	-0.54	0.01	0.00		
38	0.4	1	6.15	-0.02	0.02	0.11	-0.10	-0.45	0.00	0.00	-0.34	-0.01	0.00		
38	0.4	2	7.67	-0.04	0.03	0.13	-0.09	-0.40	0.01	0.01	-0.37	-0.01	0.00		
40	0.2	1	2.32	-0.02	0.01	0.04	-0.05	-0.40	0.01	0.00	-0.33	-0.02	0.01		
40	0.2	2	2.89	-0.02	0.02	0.08	-0.07	-0.38	0.02	0.00	-0.30	-0.01	0.02		
40	0.4	1	5.32	-0.01	0.02	0.09	-0.08	-0.39	0.00	0.00	-0.28	-0.02	0.00		
40	0.4	2	6.92	-0.02	0.03	0.13	-0.11	-0.36	0.00	0.00	-0.29	-0.01	0.00		
42	0.2	1	1.62	-0.01	0.01	-0.01	-0.03	-0.30	0.01	0.00	-0.16	-0.02	0.01		
42	0.2	2	2.22	-0.02	0.02	0.00	-0.03	-0.30	0.01	0.00	-0.17	-0.02	0.01		
42	0.4	1	4.59	0.00	0.02	0.05	-0.07	-0.34	0.00	0.00	-0.18	-0.02	0.00		
42	0.4	2	6.25	-0.02	0.03	0.11	-0.06	-0.32	0.00	0.00	-0.19	-0.02	0.01		
44	0.2	1	1.11	-0.01	0.02	-0.02	0.00	-0.21	0.00	0.00	-0.08	-0.01	0.01		
44	0.2	2	1.69	-0.02	0.02	-0.02	-0.01	-0.23	0.01	0.00	-0.10	-0.02	0.01		
44	0.4	1	3.95	0.00	0.03	-0.03	-0.08	-0.30	0.00	0.00	-0.15	-0.03	0.00		
44	0.4	2	5.65	-0.02	0.02	0.08	-0.07	-0.29	0.00	0.00	-0.17	-0.02	0.00		

타의 상대오차는 유한차분법의 경우 변동성이 커지면서 다소 오차가 증가하는 모습을 보이며, 몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수를 사용한 경우 가격과 마찬가지로 오차가 진동하고 있다. 반면 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션에서는 오차가 거의 나타나지 않고 있음을 알 수 있다.

즉, 유한차분법을 이용한 가치평가에 있어서 격자생성 구간의 설정이 매우 중요하고, 몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수를 사용한 경우에는 단히 해와 비교하여 오차가 진동하는 현상을 보이고, 준난수법을 사용하면 의사난수에 비해 시행회수가 매우 적더라도 정확도 및 안정성이 높게 나타남을 알 수 있다.

위의 결과에서 볼 수 있듯이 유럽형 옵션의 가치평가와 민감도 측정에 있어서 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션 방법이 여타 방법과 비교하여 속도와 정확도에서 매우 유용한 방법임을 확인할 수 있었다.

3.2. 미국형 풋옵션

조기행사를 고려해야 하는 미국형 풋옵션은 명시적인 단히 해를 갖지 않는 것으로 알려져 있다. 그래서 미국형 풋옵션의 가치평가와 민감도 측정에 유한차분법과 의사난수, 기존 준난수(original quasi)와 최적화시킨 준난수(optimal quasi)를 사용한 최소자승법(least

표 3.2: 미국형 풋옵션의 가치 및 델타 평가 유한차분법, 의사난수와 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션을 사용한 미국형 풋옵션의 가격 및 델타 평가 결과 (몬테카를로 시뮬레이션의 행가능횟수를 100으로 설정하였고 나머지 가정은 표 3.1 과 동일)

S	σ	T	Price						Delta(Δ)				
			FDM (C-N)	Pseudo		Quasi		FDM (C-N)	Pseudo			Quasi	
				price (error)	(s.e)	Original	Optimal		Pathwise (error)	(s.e)	Likelihood	Original Pathwise	Optimal Pathwise
36	0.2	1	4.49	-0.02	0.01	0.09	-0.04	-0.70	0.00	0.01	-1.82	-0.02	-0.02
36	0.2	2	4.85	-0.02	0.02	0.10	-0.05	-0.62	0.01	0.01	-1.19	-0.01	-0.02
36	0.4	1	7.11	-0.02	0.03	0.12	-0.06	-0.51	-0.01	0.01	-0.56	-0.03	-0.01
36	0.4	2	8.51	-0.01	0.02	0.15	-0.03	-0.44	0.00	0.01	-0.51	-0.02	-0.01
38	0.2	1	3.26	-0.01	0.01	0.05	-0.01	-0.54	0.00	0.01	-0.62	-0.02	0.00
38	0.2	2	3.75	-0.02	0.02	0.07	-0.01	-0.49	0.01	0.01	-0.50	-0.02	0.01
38	0.4	1	6.15	-0.01	0.03	0.07	-0.04	-0.45	0.00	0.00	-0.39	-0.03	-0.01
38	0.4	2	7.67	-0.01	0.02	0.12	-0.02	-0.40	0.00	0.00	-0.40	-0.02	0.00
40	0.2	1	2.32	-0.01	0.01	0.03	-0.01	-0.40	0.00	0.00	-0.31	-0.02	0.01
40	0.2	2	2.89	-0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.38	0.01	0.00	-0.30	-0.02	0.01
40	0.4	1	5.32	-0.01	0.02	0.02	0.00	-0.39	0.00	0.00	-0.25	-0.02	0.01
40	0.4	2	6.92	-0.02	0.03	0.07	-0.02	-0.36	0.00	0.00	-0.31	-0.02	0.00
42	0.2	1	1.62	0.00	0.01	-0.03	0.02	-0.30	0.00	0.00	-0.16	-0.01	0.00
42	0.2	2	2.22	-0.02	0.02	-0.02	0.02	-0.30	0.01	0.00	-0.18	-0.01	0.01
42	0.4	1	4.59	-0.01	0.03	-0.04	0.02	-0.34	0.00	0.00	-0.21	-0.02	0.00
42	0.4	2	6.25	-0.01	0.03	0.03	-0.02	0.32	0.00	0.00	-0.22	-0.01	0.01
44	0.2	1	1.11	0.00	0.01	-0.06	0.03	-0.21	0.00	0.00	-0.08	-0.01	-0.01
44	0.2	2	1.69	-0.01	0.02	-0.04	0.04	-0.23	0.01	0.00	-0.11	0.00	0.01
44	0.4	1	3.95	0.00	0.02	-0.08	-0.01	-0.30	0.00	0.00	-0.13	-0.01	0.00
44	0.4	2	5.65	0.00	0.03	0.00	0.00	-0.29	0.00	0.00	-0.18	-0.01	0.01

squares)을 이용한 몬테카를로 시뮬레이션을 적용한 후 결과값을 비교하고자 한다. 구체적인 예로 사용할 미국형 풋옵션의 주요변수로 행사가격 40, 만기는 1년과 2년, 변동성은 20%, 40%를 각각 적용하였으며 기초자산의 현재가격은 36, 38의 내가격(in the money), 40의 등가격(at the money), 42, 44의 외가격(out of the money)을 각각 적용하여 산출된 결과로부터 시사점을 찾고자 한다. 표 3.1는 몬테카를로 시뮬레이션에서 풋옵션의 잔존만기 동안 행사가격 횟수가 32번으로 가정한 경우이고, 표 3.2는 행사가격횟수가 100번인 경우의 유한차분법을 사용한 가격과 델타와의 오차를 나타낸 것이다.

먼저 가치평가 부분의 결과를 통해서 관찰할 수 있는 시사점을 보면 첫째, 표 3.2의 7번째 열은 기존 준난수를 사용한 가치산정 결과로 4번째 열의 유한차분법의 결과와의 괴리가 상대적으로 크게 발생한다. 이런 결과는 행사 가능횟수가 증가함에 따라 준난수의 차원도 증가하는데, 차원에 따른 상관계수의 최대값을 나타내는 그림 2.3이 보여주듯이 최대값이 크게 증가하는 현상 때문에 발생한 것이다. 둘째, 최소자승법 몬테카를로 시뮬레이션으로 계산한 미국형 풋옵션의 가치는 행사가격횟수가 100미만이므로 유한차분법으로 계산한 가격보다 작아야 하는데, 행사가격횟수를 32로 설정한 표 3.1와 100으로 확대한 표 3.2 모두에서 기존 준난수의 경우 내가격과 등가격에서는 크게 나타나 앞에서 언급한 조건에 위배됨을 알 수 있는 반면, 최적화 시킨 준난수를 사용한 경우 내가격, 등가격, 외가격에 상관없이 작게 나타나 파생상품가격 조건을 따름을 알 수 있다. 이러한 결과의 원인은 그림 2.3의 윗쪽 그림에서 보듯이 차원간 상관계수 최소값이 하방으로는 유계이나 아래쪽 그림에서 보인 최대값은 상방이 제어되어 있지 않고 유의한 수준으로 증가함으로 기초자산 가격의 방향성에 영향을 미치는 결과를 가져올 수 있기 때문이다. 이러한 원인을 제

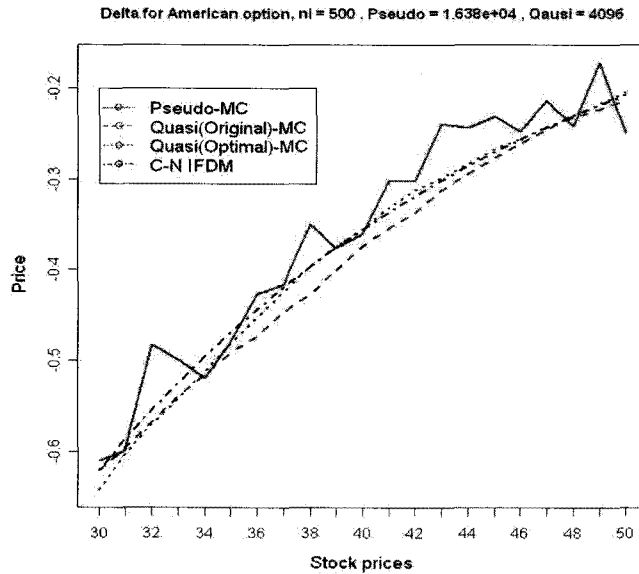


그림 3.4: 유한차분법, 의사난수와 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션을 사용한 미국형 풋옵션의 델타 평가 결과 비교 그래프 (몬테카를로 시뮬레이션의 행사가능횟수를 72로 설정하였고 의사난수의 시행횟수는 $2^{14}=16384(8192 + 8192 \text{ antithetic})$, 준난수의 시행횟수는 $2^{12}=4096$ 이며 유한차분법의 격자수는 500×500 으로 설정. 입력변수는 행사가격 40, 이자율 6%, 변동성 40%, 잔존만기 2년으로 고정하였고, 기초자산의 가격은 30부터 50까지 변환(x 축))

거하여 최적화시킨 준난수를 사용할 경우 차원간 상관계수의 최대값, 최소값 모두 상하방 유계이므로 다차원의 난수가 필요한 경우에도 적용 가능하게 된다. 즉, 위험요인이 여러 개인 파생상품의 가치평가, 위험관리시스템의 위험액(Value at Risk: VaR)등에 적용하면 기존의 의사난수를 사용한 경우보다 매우 빠르고 정확한 계산을 가능하게 할 수 있음을 예측할 수 있다.

셋째, 행사가능횟수를 32에서 100으로 증가시켰을 때, 기존의 준난수는 가격이 어떤 경우에는 증가하고 어떤 경우에는 감소하는 경우가 발생하여, 행사가능횟수를 증가시킴으로써 발생하는 프리미엄이 제대로 반영되지 않음을 알 수 있으나, 최적화시킨 준난수의 경우에는 행사가능 횟수가 증가함에 따라 가격도 증가하면서 유한차분법을 사용한 값에 접근하고 있어 프리미엄이 제대로 반영되고 있음을 알 수 있다. 넷째, 의사난수를 사용한 경우와 속도면에서 비교해보면 최적화시킨 준난수를 사용한 경우 이미 생성되어 있는 난수를 사용함으로써 계산속도를 개선시킬 수 있고, 또한 수행횟수가 의사난수보다 4분의 1 수준임에도 나온 결과값은 비슷함을 알 수 있다. 즉, 수행횟수를 줄임으로써 계산시간을 단축시킬 수 있다. 구체적으로 표 3.1와 3.2의 계산시의 가정을 사용했을 경우 수행시간을 보면 의사난수를 사용한 경우는 2352 초가 걸린 반면 최적화시킨 준난수를 사용한 경우의 수행시간은

312 초로 7.5배 가량 빨랐다. 시뮬레이션을 구현한 프로그래밍 언어는 “R”이며, 컴퓨터의 사양은 2.13GHz, 2GB RAM을 사용하였다.

다음으로 민감도 평가 부문에서 델타를 예로 든 결과값을 보면 몬테카를로 시뮬레이션에 우도비율법을 적용한 결과는 유한차분법과 비교하여 괴리가 크게 나타난 반면, 경로의존형 근사방법을 사용한 결과는 유한차분법과 유사한 결과를 보여줌으로 미국형 옵션에서는 경로의존형 근사방법이 유의함을 알 수 있었다. 또한 그림 3.4과 같이 의사난수법을 사용한 몬테카를로 시뮬레이션에서 유한차분 근사식을 사용하여 측정한 델타의 경우 진동하듯 안정적이지 못한 결과를 보이거나 기존의 준난수법에서는 시행회수가 상대적으로 적음에도 불구하고 상대적으로 안정적인 결과를 나타내며, 나아가 최적화시킨 준난수법을 사용한 경우에는 격자구간을 500개로 하여 정확도를 높인 유한차분법과 비교하여도 큰 차이가 나지 않아 가장 우월한 결과를 보여주었다.

4. 결론

본 연구는 다양해지는 주가연계증권 등 파생상품 추세에 상응하는 적절한 가치평가에 대한 연구의 필요성을 인지하고 보다 효율적인 가치평가 및 민감도 평가에 있어서 속도와 정확도를 향상시키는데 그 의의를 두고자 한다.

현재 주가연계증권 등에서 주류를 이루고 있는 기초자산이 2개인 파생상품의 가치평가 및 민감도 분석에 기초자산이 1개인 경우 적용되었던 Crout 인수화 방법론을 활용할 수 있는 연산자분할법을 사용함으로써 기존의 유한차분법과 비교하여 속도와 정확도 면에서 개선이 있음을 보였다.

최근 시장의 추세인 기초자산이나 위험요소(risk factor)가 여러 개인 경우, 그리고 경로의존형 및 조기상환형 상품 등에 능동적으로 적용 가능한 몬테카를로 시뮬레이션 방법에 있어 가장 큰 단점으로 지적되는 수행시간의 단축방안과 민감도 계산의 오차를 줄이는 방법을 다음과 같이 제시하였다. 먼저 시뮬레이션에서 사용되는 난수를 일반적으로 사용되는 의사난수대신 저불일치수열인 준난수를 사용함으로써 시행 횟수가 적어도 높은 균일성을 지닌다는 특성과 확정된 난수를 생성, 사용하기 때문에 상대적으로 수렴속도가 빠르고 정확도가 개선됨을 보였다. 조기상환형과 같은 미국형 옵션에서는 차원간에 독립적(independent)이고 동일하게 분포된(identitically distributed) 난수 즉, 상관관계가 영(0)인 다차원의 난수가 필요한데 기존의 준난수를 사용할 경우 차원이 증가하면 차원간의 상관계수의 최대값이 증가하게 되어 적용의 한계가 있다. 이러한 문제는 상관계수를 크게 증가시키는 수열을 제외시켜 상관계수를 특정값 이하로 제어하는 새로운 방법을 사용하여 해결하였다. 다음으로 몬테카를로 시뮬레이션의 민감도 평가에서 미분의 근사식을 사용한 근사방법의 경우 시뮬레이션을 여러 번 시행해야 하므로 수행시간이 길어지고 정확도에서도 기초자산의 가격변화 크기와 변동성 변화의 크기에 따라 옵션의 민감도 값이 많이 변하므로 파생상품에 따른 해당모수의 적절한 변화크기를 판단할 수 없어 정확한 민감도를 구할 수 없다. 이에 좀 더 효율적인 방법으로 유럽형 옵션에서는 우도비율법을, 미국형 옵션과 같이 경로의존형에는 경로의존형 근사방법을 적용하여 속도와 정확도가 개선됨을 보

였다. 이러한 내용들을 미국형 풋옵션에 적용하여 새로운 방법의 유용성을 실증적으로 보여주었다.

유럽형 바닐라옵션을 이용한 비대칭 나비형스프레드 전략에 유한차분법과 준난수 및 의사난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션 방법의 가치평가 사례를 보이며, 유한차분법을 이용할 경우 격자생성구간의 설정이 매우 중요하다는 사실을 발견하였다. 또한, 몬테카를로 시뮬레이션에서 의사난수법은 닫힌 해와 비교하여 오차가 진동하는 현상이 있으나 준난수법은 의사난수법에 비해 시행회수가 매우 적더라도 정확도 및 안정성이 높게 나타남을 알 수 있었다. 즉, 유럽형 옵션의 가치평가와 민감도 측정에 있어서 준난수를 사용한 몬테카를로 시뮬레이션 방법이 여타 방법과 비교하여 속도와 정확도에서 매우 유용한 방법임을 확인할 수 있었다.

옵션의 가치평가와 민감도 평가방법에 있어서 속도와 정확도를 개선시킴으로써 헤지전략 구축에 있어서 계산시간의 지연에 따라 빠른 시장변화에 대한 대응에서 발생하는 오차를 줄여주고 민감도 계산오차에 따른 헤징 오류를 개선시킬 수 있다. 또한 위험관리시스템에서 노출된 위험액(Value at Risk: VaR)을 계산하기 위해서는 다요인 위험요소를 사용해야 하는데, 본연구에서 제시한 방법이 문제 해결의 한 방법이 될 것으로 기대한다.

참고문헌

- Boyle, P. P. (1977). Options: A Monte Carlo approach, *Journal of Financial Economics*, **4**, 323-338.
- Boyle P., Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1267-1321.
- Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1977). The valuation of American put options, *Journal of Finance*, **32**, 449-462.
- Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **3**, 229-63.
- Jarrow, R. and A. Rudd. (1983). *Option Pricing*, Homewood, IL: R. D. Irwin.
- Joe, S. and Kuo, F. Y. (2003). Remark on algorithm 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **29**, 49-57.
- Leisen, D. P. J. and Reimer, M. (1996). Binomial models for option valuation examining and improving convergence, *Applied Mathematical Finance*, **3**, 319-346
- Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001). Valuing American options by simulations: A simple least-squares approach, *Review of Financial Studies*, **14**, 113-147.
- Tavella, D. and C. Randall (2000). *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method*, John Wiley & Son, New York.
- Tian. Y. (1993). A modified lattice approach to option pricing, *Journal of Futures Markets*, **13**, 563-577.

[2008년 6월 접수, 2008년 7월 채택]

Option Pricing and Sensitivity Evaluation Methodology: Improvement of Speed and Accuracy[†]

Youngsoo Choi¹⁾, Se-Jin Oh²⁾, Won-Chang Lee³⁾

Abstract

This paper presents how to improve the efficiency and accuracy in the pricing and sensitivity evaluation for derivatives, since the need for the evaluation of complicated derivatives is increased. The Monte Carlo(MC) simulation using the quasi random number instead of pseudo random number can improve the elapsed time and accuracy for the valuation of European-type derivatives. However, the quasi MC simulation method has its limit for applying it in the multi-dimensional case such as American-type and path-dependent options due to the increased correlation between dimensions as the dimension of random numbers is increased. In order to complement this problem, we develop a modified method in which correlation values are controlled to be below a pre-specified value. Thus, this method is applicable for the pricing of either derivatives in which underlying assets or risk factors are several or derivatives having path-dependent or early redemption property. Furthermore, we illustrate that it is important to take an appropriate grid interval for the use of finite difference method(FDM) by applying the FDM to one example of non-symmetrical butterfly spreads.

Keywords: Option pricing; finite difference method; Monte Carlo simulation; Quasi random number; American put option.

[†] Choi acknowledges support from Hankuk University of Foreign Studies through Research Fund of 2008.

1) Department of Mathematics, Hankuk University of Foreign Studies, Kyongki-Do 449-791, Korea.
Correspondence: choiys@hufs.ac.kr

2) Meritz Securities Co., Ltd., 25-1 Youido-dong, Youngdeungpo-gu, Seoul 150-878, Korea.

3) Department of Mathematics, Hankuk University of Foreign Studies, Kyongki-Do 449-791, Korea.