

이동최소제곱근사법을 이용한 개선된 구조 신뢰성 해석

An Improved Structural Reliability Analysis using Moving Least Squares Approximation

강수창* · 고현무**

Kang, Soo-Chang · Koh, Hyun-Moo

Abstract

The response surface method (RSM) is widely adopted for the structural reliability analysis because of its numerical efficiency. However, the RSM is still time consuming for large-scale applications and sometimes shows large errors in the calculation of sensitivity of reliability index with respect to random variables. Therefore, this study proposes a new RSM in which moving least squares (MLS) approximation is applied. Least squares approximation generally used in the common RSM gives equal weight to the coefficients of the response surface function (RSF). On the other hand, The MLS approximation gives higher weight to the experimental points closer to the design point, which yields the RSF more similar to the limit state at the design point. In the procedure of the proposed method, a linear RSF is constructed initially and then a quadratic RSF is formed using the axial experimental points selected from the reduced region where the design point is likely to exist. The RSF is updated successively by adding one more experimental point to the previously sampled experimental points. In order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, mathematical problems and ten-bar truss are considered as numerical examples. As a result, the proposed method shows better accuracy and computational efficiency than the common RSM.

Keywords : structural reliability analysis, response surface method, numerical efficiency, moving least square approximation

요 지

응답면 기법은 수치적 효율성을 증대시키기 위해 구조 신뢰성 해석에 널리 적용되고 있다. 그러나 응답면 기법을 사용한 대형구조물의 신뢰성 해석에는 아직도 과도한 해석시간이 요구되고 비선형성이 큰 한계상태에 대해서는 확률변수에 대한 신뢰도지수의 민감도 측면에서 많은 오차가 발생한다. 그러므로, 이 연구에서는 이동최소제곱근사법을 적용한 새로운 응답면 기법을 제안한다. 기존의 응답면 기법에 사용되어온 최소제곱근사법은 표본점들에 동일한 가중값을 부여하여 응답면 함수의 계수를 결정한다. 반면에 이동최소제곱근사법은 설계점에 가까운 표본점들에 더 높은 가중값을 부여함으로써 설계점 근처에서 한계상태식에 더 가까운 응답면 함수를 제공하여 정확도를 증대시킨다. 이동최소제곱근사법을 이용한 신뢰성 해석 절차를 살펴보면, 먼저 선형 응답면 함수를 생성하여 설계점이 있을 영역을 결정한다. 이 영역에서 추출된 표본점들을 이용하여 2차 응답면 함수를 생성한다. 그 다음 단계에서는 기존에 추출된 표본점에 연속적으로 하나의 표본점을 더해가면서 응답면 함수를 더욱더 정확히 근사시킨다. 제안된 방법의 효율성을 검토하기 위해서 기존 연구자에 의해 제안된 수치적 문제 및 트러스 문제들에 대하여 신뢰성 해석을 수행하였다. 그 결과 제안된 방법은 민감도를 포함한 정확성 뿐만 아니라 계산 효율성도 증대시킴을 확인할 수 있었다.

핵심용어 : 구조 신뢰성 해석, 응답면기법, 수치적 효율성, 이동최소제곱근사법

1. 서 론

사회기반시스템을 이루는 교량 및 건축물 등의 구조물의 설계에는 외부하중, 재료특성 및 제작오차 등의 다양한 불확실성(uncertainty)이 존재하게 된다. 이러한 불확실성이 구조물의 성능에 어떠한 영향을 미치는지 정량적으로 평가하는 연구가 많은 연구자들에 의해 수행되어 왔으며 이를 구조 신뢰성 해석이라고 한다. 즉, 불확실성을 통계적인 확률변수로 처리하

여 구조물의 특정한계상태에 대한 파괴확률 및 신뢰도 지수를 구하는 것을 구조 신뢰성 해석이라 하며 고속철도교, 사장교, 현수교 및 진동제어장치를 이용한 비효율성 평가 등의 다양한 분야에 적용되어 왔다(강수창 등, 1995; 박미연 등, 2006; 조태준 등, 2008; 함대기 등, 2006).

구조 신뢰성 해석방법으로는 주로 MCS(Monte Carlo Simulation)(Bjerager, 1988), FORM(First Order Reliability Method) 혹은 SORM(Second Order Reliability Method

*정회원 · 교신저자 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정 (E-mail : sckang@sel.snu.ac.kr)

**정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 (E-mail : hmkoh@snu.ac.kr)

(Hasofer 등, 1974; Rackwitz 등, 1978; Der Kiureghian 등, 1987; Liu 등, 1991) 등이 널리 사용되고 있다. MCS는 불확실성을 고려하는 모든 공학적 문제에서 자주 사용되는 방법으로서 반복 구조해석을 수행하여 구조물에 파괴가 일어난 횟수를 통해 그 구조물의 파괴확률을 산정한다. 그러나 파괴확률이 아주 작은 문제의 경우에, 충분한 정확도를 갖는 결과를 얻기 위해서는 상당한 양의 구조해석이 수행되어야 한다. 따라서 유한요소해석이 결합된 대형 구조물의 신뢰도 해석에는 많은 해석시간이 요구되어 현실적으로 적용되기 힘든 실정이다. 이를 보완하기 위해서 개발된 FORM/SORM 방법은 지금까지도 활발하게 적용되어 오고 있으며 적은 구조해석 횟수만으로도 MCS 결과와 유사한 결과를 제공한다. 하지만 이 방법 또한 비록 MCS보다는 효율성이 더 좋긴 하지만 복잡한 대형 구조물 해석이 포함된 경우에는 과도한 계산시간을 요구한다.

이를 극복하기 위해서 응답면 기법(RSM, Response surface method)(김상호, 1995; 조태준, 2008; Bucher 등, 1990; Kim 등, 1997; Rajashenkar 등, 1993)이 개발되었다. 응답면 기법은 확률변수로 구성된 표본점에 대하여 구조해석을 수행하고, 회귀분석을 통해 한계상태식(Limit state function)을 확률변수의 함수로 근사한 다음, 근사된 응답면 함수(Response surface function)에 대하여 FORM 혹은 SORM 을 적용하여 신뢰도 지수 및 파괴확률을 구하는 방법이다. 이는 복잡한 구조해석이 포함된 신뢰도 해석에 가장 적합한 방법으로 알려져 있으며 국내에서도 댐 구조물이나 (허정원 등, 2003) PSC 사장교의 위험도 평가(박미연 등, 2006), 현수교의 위험도 분석(조태준 등, 2008)에 적용된 바 있다.

하지만 이러한 응답면 기법 또한 특정한 문제의 경우에는 과도한 계산시간이 요구된다. 일반적으로 초기 표본점들로부터 구성된 응답면 함수가 한계상태식과 정확하게 일치하기 어렵기 때문에 보통 2~3회 정도로 응답의 재근사를 수행해야 한다. 만약 초기 표본점이 10개이고 3회의 응답의 재근사가 필요하다면 총 30번의 구조해석이 필요하게 된다. 따라서 비선형성이 강한 문제의 경우에는 응답의 재근사를 더 많이 수행해야 하므로 오히려 FORM보다 더 많은 구조해석 횟수 및 해석시간이 요구된다(Rajashenkar 등, 1993).

또한 신뢰성 해석과 최적설계를 동시에 수행하는 신뢰도 기반 최적설계와 같은 문제에 구조신뢰성 해석을 적용할 경우에는 확률변수에 대한 신뢰도지수의 민감도(Sensitivity)가 해의 수렴성에 큰 영향을 미치게 된다(Chandu 등, 1995; Enevoldsen 1994). 하지만 응답면 기법은 비록 신뢰도 지수를 구하는 측면에서는 만족할 만한 정확도의 결과를 주지만 그 민감도에는 많은 오차가 때때로 발생하게 되어 신뢰도 기반 최적설계에 적용할 경우 수렴성이 보장되지 않는다.

따라서, 본 논문에서는 구조해석 횟수를 줄여주고 민감도의 정확성도 개선시켜주는 새로운 응답면 기법을 제안한다. 기존의 응답면 기법에 사용된 회귀분석에는 주로 최소제곱 근사법(least square approximation)이 사용되었지만, 제안된 방법은 이동최소제곱근사법(Moving least square approximation)(Lancaster 등, 1981)을 사용하였다. 이 방법은 국지적 응답을 더 정확하게 묘사하여 수렴속도 및 정확도를 증대시키고, 기존에 추출된 표본점에 대한 응답결과를 폐기하지 않고

그 다음 응답 재근사에 사용할 수 있게 하여 구조해석 횟수를 줄일 수 있도록 하였다. 또한 국지적 응답을 더 정확하게 묘사하기 때문에 확률변수에 대한 신뢰도지수의 민감도도 더 정확하게 구할 수 있었다.

2. 일반적인 응답면 기법을 이용한 신뢰성 평가기법

2.1 FORM을 이용한 신뢰성 해석

구조물의 신뢰도 평가문제에 있어서 불확실성을 내포하고 있는 요인들은 확률변수 벡터 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 로 나타낼 수 있다. 확률변수는 누적확률분포함수 $F_{x_i}(x_i)$ 혹은 확률밀도함수 $f_{x_i}(x_i)$ 로 나타낼 수 있으며, 정규분포(Normal) 및 로그 정규분포(Lognormal) 등의 분포형태를 갖는다. 한계상태식 $G(\mathbf{x})$ 는 확률변수들의 함수로 표현되며 양일 때는 안전한 상태, 음일 때 파괴상태를 의미하며, 구조물의 파괴확률은 다음 식(1)과 같이 파괴영역에 대해서 결합확률밀도함수에 대한 다중적분을 수행해야 구할 수 있다(Ditlevsen 등, 1996).

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

여기서, $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 는 결합확률밀도함수이다. 일반적으로 확률변수들의 결합확률밀도함수는 알려져 있지 않으며, 또한 알고 있다 하더라도 식 (1)과 같은 다중적분을 수행하기가 매우 어렵다. 따라서 이러한 다중적분을 피하고 근사적으로 파괴확률을 추정하려는 노력이 오래 전부터 이루어져 왔으며, 가장 널리 사용되고 있는 방법이 FORM 이다.

FORM을 적용하기 위해서는 먼저 식 (2)에서와 같이 비정규분포 확률변수 \mathbf{x} 를 표준정규분포 확률변수 \mathbf{u} 로 변환해야 한다. 확률변수들이 정규분포를 따르지 않는 경우에는 Rackwitz-Fiessler 변환법(Rackwitz 등, 1978)을 사용한다. 이때 신뢰도 지수는 다음 식 (2)와 같이 한 개의 제약조건을 갖는 최적화 문제로부터 구할 수 있다(Hasofer, 1974).

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \|\mathbf{u}\| \\ \text{Subject to } & G(\mathbf{x})=G(\mathbf{u})=0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 한계상태함수 상의 최적값인 설계점 혹은 MPFP (Most Probable Failure Point)가 \mathbf{u}^* 라 했을 때, 신뢰도 지수는 원점에서 한계상태함수까지의 최단거리인 $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ 로 표현된다. 식 (2)의 반복 알고리즘은 다음 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= (\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}^k) \mathbf{n}^k + \frac{G(\mathbf{u}^k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^k)\|} \mathbf{n}^k \\ \text{where } \mathbf{n}^k &= \frac{\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^k)\|} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, \mathbf{n}^k 는 k 번째 반복값 \mathbf{u}^k 에서의 최대급경사방향 (Steepest Descent Direction)이다. 일반적인 공학적 문제에 있어 FORM은 정확도 대비 매우 높은 효율성이 입증되어, 본 연구에서도 응답의 근사를 수행한 후 FORM 방법을 적용해 신뢰도 지수를 구하였다.

2.2 일반적인 응답면 기법을 이용한 신뢰성 해석

서론에서 언급한 바와 같이 응답면 기법은 적은 횟수의 구조해석 결과로부터 응답면 함수를 생성하고, 이에 대해서

FORM 등의 신뢰성 해석을 수행하는 기법이다. 응답면 기법의 적용과정은 구조해석을 수행해야 할 표본점의 선정, 선정된 표본점을 이용한 근사 함수의 생성 그리고 정확도 향상을 위한 재근사로 크게 3단계로 구성된다.

2.2.1 표본점의 선정

응답면 함수를 얻기 위해 사용되는 표본점의 위치와 개수에 따라 응답면 기법도 여러가지 방법으로 나뉘게 된다. 가장 많이 사용되는 Bucher-Bourgund법(Bucher, 1987)은 응답면 함수에서 확률변수간의 연성향을 고려하지 않는 방법으로, 통계적 성질이 없는 대신 표본점의 수가 적어 효율적인 응답면 함수의 생성이 가능한 방법이다. Bucher-Bourgund법에 의해 근사된 응답면 함수는 다음 식 (4)와 같다.

$$\tilde{G}_{\text{approx}} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \quad (4)$$

Bucher-Bourgund법에서의 미정 계수결정에 필요한 표본점의 개수는 $1+2N(N$: 확률변수의 수) 이고, 이 점들은 중심점과 축 상의 점만이 해당된다. 확률변수가 세 개인 경우의 표본점들을 정규화된 확률변수 \mathbf{u} 좌표상에서 나타내면 다음 그림 1과 같다. 축 상의 점 좌표 k 는 경험적으로 2와 3사이의 값을 한다.

2.2.2 응답면 함수의 생성

n 개의 확률변수를 갖는 확률변수 벡터 \mathbf{x} 에서의 응답면 함수값 $\tilde{G}(\mathbf{x})$ 는 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 각 항들에 대응하는 계수 벡터 \mathbf{a} 를 사용하여 다음 식 (5)와 같이 정의한다.

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a} \quad (5)$$

여기서, 일반적으로 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 는 1차 및 2차항으로 구성되며 식 (6)과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ \dots \ x_n \ x_1^2 \ \dots \ x_n^2]^T \quad (6)$$

따라서 \mathbf{x} 에 대한 응답면 함수값을 구하기 위해서는 계수 벡터 \mathbf{a} 의 계산이 필요하며, 이는 앞에서 Bucher-Bourgund법에 의해 추출된 표본점에 대한 한계상태식값과 근사된 응

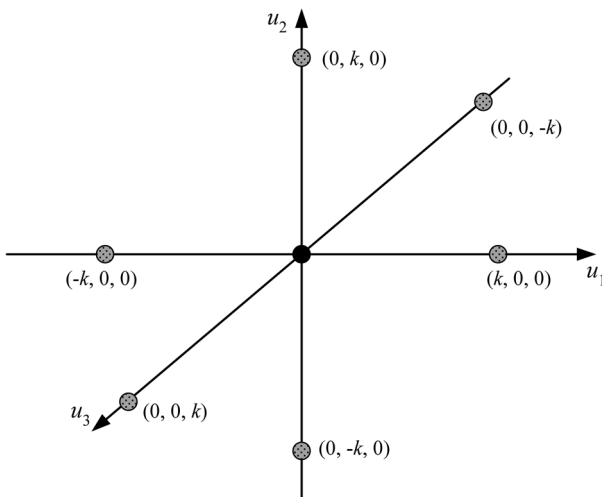


그림 1. Bucher-Bourgund법에서의 표본점

답면 함수값의 에러가 최소가 되도록 하는 최소제곱법으로 계산이 가능하다(Haldar, 2000).

2.3.3 응답면 함수의 재근사

응답면 기법을 이용하여 음함수인 한계상태식을 양함수의 응답면 함수로 근사하면 오차는 필수적으로 수반되기 마련이다. 신뢰도 해석에 있어서 관심이 있는 영역은 파괴가 발생할 것으로 예상되는 영역이므로, 설계점 근처에 대해서 응답면 함수가 한계상태식과 유사해야 신뢰도 지수의 정확도가 보장된다. 따라서 식 (7)의 선형보간을 이용하여 근사영역의 중심점을 이동시킨 다음, 새 중심점을 기반으로 표본점들을 다시 추출하여 응답면 함수의 정확도를 높이는 방법이 제안되었다(Bucher, 1990).

$$\mathbf{x}_{C2} = \mathbf{x}_{C1} + (\mathbf{x}_{D1} - \mathbf{x}_{C1}) \times \frac{G(\mathbf{x}_{C1})}{G(\mathbf{x}_{C1}) - G(\mathbf{x}_{D1})} \text{ if } G(\mathbf{x}_{D1}) \geq G(\mathbf{x}_{C1}) \quad (7a)$$

$$\mathbf{x}_{C2} = \mathbf{x}_{D1} + (\mathbf{x}_{C1} - \mathbf{x}_{D1}) \times \frac{G(\mathbf{x}_{D1})}{G(\mathbf{x}_{D1}) - G(\mathbf{x}_{C1})} \text{ if } G(\mathbf{x}_{D1}) < G(\mathbf{x}_{C1}) \quad (7b)$$

여기서 \mathbf{x}_{C2} 는 새로운 중심점을 의미하고, \mathbf{x}_{C1} 은 이전 반복과정에서 얻은 중심점을, \mathbf{x}_{D1} 은 응답면 함수에 대해서 신뢰도 해석을 수행한 결과로 산출된 설계점을 의미하며, $G(\)$ 는 한계상태식으로부터 얻어지는 값을 의미한다. 보통 이러한 응답면 함수의 재근사를 2~3번 수행함으로써 만족할만한 정확도의 해를 준다고 하지만, 비선형성이 강한 문제의 경우에는 더 많은 재근사가 요구된다고 알려져 있다(Rajashekhar, 1993). 재근사 횟수가 많아질수록 해석 횟수가 크게 증가하므로, 좀 더 수렴성 및 계산 효율성이 좋은 응답면 기법의 개발이 필요하다고 볼 수 있다.

3. 이동최소제곱근사법을 이용한 개선된 응답면 기법

응답면 기법은 최소제곱근사법을 사용하여 표본점들에 동일한 가중(weight)값을 주어 응답면 함수의 계수값들을 구한다. 하지만, 응답면 함수는 실제 한계상태식을 가능한 한 정확하게 묘사해야 한다. 따라서 본 논문에서는 이동최소제곱근사법을 사용하여 설계점에 가까운 표본점에 더 큰 가중값을 주어 응답면 함수의 정확도를 향상시켰다. 또한 함수평가(function evaluation) 혹은 구조해석 횟수를 줄이기 위해서 응답면 함수를 재근사할 경우 다시 표본점들을 추출하지 않고, FORM 해석으로부터 나온 새로운 설계점과 기존에 추출된 표본점들을 함께 이용하여 응답면 함수를 재근사하였다.

3.1 이동최소제곱근사법

n 개의 확률변수를 갖는 확률변수 벡터 \mathbf{x} 에서의 응답면 함수값 $\tilde{G}(\mathbf{x})$ 는 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 각 항들에 대응하는 계수 벡터 \mathbf{a} 를 사용하여 다음 식 (8)과 같이 정의한다. 기존의 응답면 기법에 사용한 응답면 함수 식(5)와의 큰 차이점은 계수벡터가 \mathbf{a} 가 확률변수 벡터 \mathbf{x} 의 함수라는 것이다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

여기서, 일반적으로 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 는 1차 및 2차항으로 구성되며 식 (9)와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \dots x_n \ x_1^2 \dots x_n^2]^T \quad (9)$$

\mathbf{x} 에서의 지역 이동최소제곱 근사는 다음과 같다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

여기서 \mathbf{x}_i 는 표본점을 나타낸다.

\mathbf{x} 에서의 이동최소제곱 근사식의 계수 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구하기 위해 가중잔여값 $E(\mathbf{x})$ 를 정의하면 다음 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) (\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) (\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}_i))^2 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, N 은 표본점들의 개수이고 $w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 와 표본점 \mathbf{x}_i 사이의 거리에 따른 가중함수이며 $G(\mathbf{x}_i)$ 는 표본점 \mathbf{x}_i 에 대하여 계산된 한계상태식 값이 된다. 표본점 \mathbf{x}_i 를 중심으로 일정한 영역(영향영역, Domain of influence)에 포함되는 점들에서 가중함수는 양수이며, singularity를 피하기 위해 충분한 개수의 인접된 표본점들이 포함되어야 한다. 식 (11)은 다음과 같은 행렬식 (12)의 형태로 표현될 수도 있다.

$$E(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{G})^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{G}) \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{G} = [G(\mathbf{x}_1), G(\mathbf{x}_2), \dots, G(\mathbf{x}_n)]^T \quad (13a)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]^T \quad (13b)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}[w(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}), w(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}), \dots, w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})]^T \quad (13c)$$

$\partial E(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0$ 로부터 가중잔차를 최소화 시키는 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{G} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (8)에 대입하면 다음 식 (15)과 같은 응답면 함수를 얻을 수 있다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{G} \quad (15)$$

3.2 영향영역과 가중함수

이동최소제곱 근사법의 정확도를 좌우하는 중요한 요소는 가중함수(Weight function)로, 설계점(확률변수 벡터) \mathbf{x} 에 영향을 미치는 표본점의 가중값을 결정해준다. 설계점 \mathbf{x} 에서 가까운 표본점 \mathbf{x}_i 는 큰 가중함수값을 갖고 반대로 설계점 \mathbf{x} 에서 먼 표본점 \mathbf{x}_i 는 작은 가중함수값을 가진다. 따라서 가중함수는 다음과 같이 \mathbf{x} 와 \mathbf{x}_i 사이의 거리 및 \mathbf{x}_i 의 영향반경의 함수로 다음 식 (16)과 같이 표현될 수 있다.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = w\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_{mi}}\right) = w(r) \quad (16)$$

여기서 d_{mi} 는 표본점 \mathbf{x}_i 에서의 영향반경의 크기이며 본 논문에서는 \mathbf{x} 에서 $1+2N(N, \text{확률변수의 개수})$ 번째로 가까운 점의 거리의 두 배를 사용한다. 가중함수의 형태는 여러가지가 있는데 이 연구에서는 spline 가중함수 식 (17)를 사용하였다. 즉, \mathbf{x} 에 가까운 표본점에는 더 높은 가중값을, \mathbf{x} 에

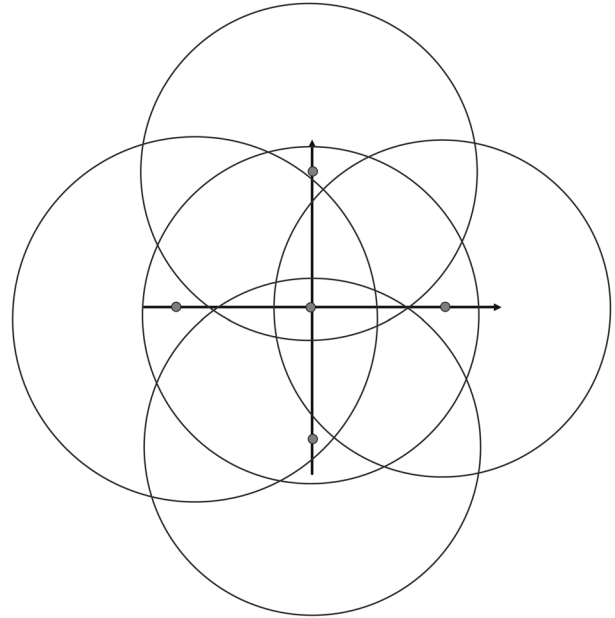


그림 2. 2차원에서의 영향영역

멀리 떨어진 표본점에는 더 낮은 가중값을 준다.

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^3 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (17)$$

표본점에서의 영향반경은 적절한 개수의 표본점이 포함되도록 해야만 수치해의 정확도 및 수렴성이 보장된다. 그림 2는 2차원 확률변수 영역에서 각 표본점들에 대한 영향영역을 보여준다.

3.3 개선된 응답면 기법 해석절차

이동최소제곱 근사법을 구조물의 신뢰도 해석에 적용한 절차는 다음과 같다. 신뢰도 해석의 횟수 및 정확도를 높이기 위해서 1차 응답면 함수 및 2차 응답면 함수를 혼용하여 사용하였으며 추출된 표본점들은 다음 응답 재근사에 재사용되었다.

Step1: 확률변수(\mathbf{x}) 및 한계상태식($G(\mathbf{x})$)을 설정한다.

Step2: 그림 3과 같이 $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$ 영역에서 $1+N(N, \text{확률변수의 개수})$ 개의 표본점을 추출한다. 이때 k 는 보통 2~3으로

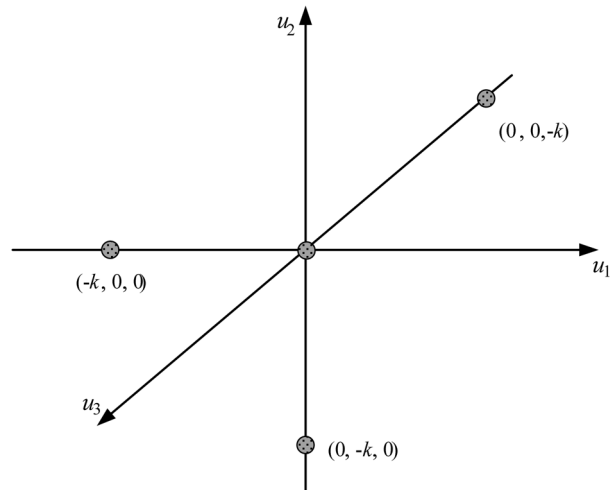


그림 3. 1차 근사함수 생성을 위한 표본추출

설정한다.

Step3: Step2에서 추출된 표본점에 대하여 한계상태식값을 구하고, 식 (15)를 이용해 1차 응답면 함수를 생성한다.

Step4: 근사된 응답면 함수를 이용해 FORM방법을 적용하여 새로운 MPFP를 결정한다.

Step5: 식 (7)로부터 새로운 응답면 함수의 근사를 위한 중심점을 계산한다.

Step6: Step5 에서 얻은 중심점으로부터 그림 1과 같이 Bucher-Bourgund방법을 이용해 1+2N개의 표본을 추출한다. 이때 해의 정확도 향상 및 설계점을 찾는 영역을 줄여주기 위해 k는 2~3이 아닌 1~1.5를 사용한다.

Step7: 추출된 1+2N개의 표본점에 대하여 한계상태식값을 구하고, 식 (15)를 이용해 2차 응답면 함수를 생성하고 step4와 같은 방식으로 새로운 MPFP를 결정한다..

Step8: 새로운 MPFP에 대하여 한계상태식값을 구하고 기존에 추출된 표본점에 추가하여 2차 응답면 함수를 생성한 다음, Step4와 같은 방식으로 새로운 MPFP를 결정한다.

Step9: Step8이 다음 식 (18)과 같은 수렴조건을 만족시킬 때까지 반복해서 수행한다.

$$\frac{\|u_{k+1} - u_k\|}{\|u_{k+1}\|} < 0.001 \quad (18)$$

4. 개발된 방법의 검증을 위한 수치예제

제안된 응답면 기법의 효율성을 검증하기 위해 기존 연구자들에 의해 수행된 문제를 해석하여 기존의 응답면 기법과 비교하였다.

4.1 예제 1 : 비선형 한계상태식

이번 예제는 비선형 한계상태식으로 다음 식 (19)와 같다 (Kim 등, 1997; Kaymaz 등, 2005; Duprat 등, 2006).

$$G(u) = \exp[0.4(u_1 + 2) + 6.2] - \exp[0.3u_2 + 5] - 200 \quad (19)$$

여기서 확률변수 u_1 와 u_2 는 통계적으로 독립이고 평균이 0

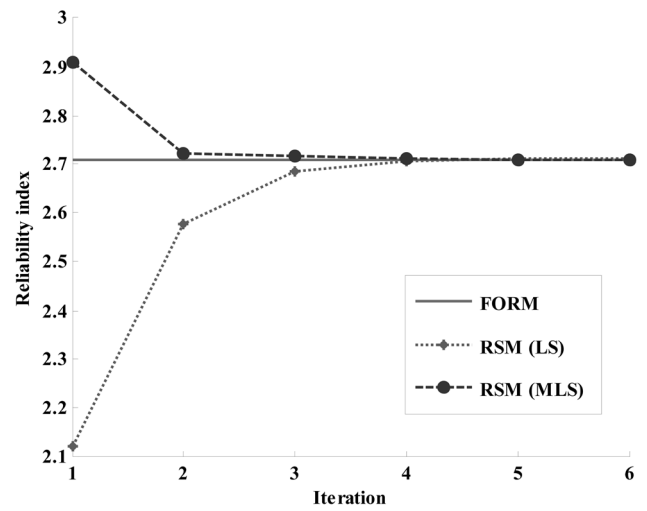


그림 4. 예제 1 : 반복과정에서의 신뢰도 지수

이고 표준편차가 1인 표준정규분포이다. 응답면 기법에서 응답면 함수에 대한 신뢰도지수는 FORM 해석을 이용하여 결정하였기 때문에, FORM 해석결과를 정해로 간주하고 제안된 방법과 기존의 응답면 기법을 비교해 보았다. 기존의 응답면 기법 및 제안된 응답면 기법으로부터 구한 신뢰도 지수를 응답 재근사의 횟수에 따라 나타낸 이력곡선은 다음 그림 4와 같다. 최소제곱근사법을 사용한 응답면 기법(이하 RSM-LS)보다 제안된 방법(이하 RSM-MLS)이 반복과정에서 보다 더 빨리 정해에 수렴함을 확인할 수 있다.

또한 식 (18)의 수렴조건을 만족할 경우의 Importance sampling MCS, FORM, RSM-LS 및 RSM-MLS 결과를 나타내면 표 1과 같다. FORM 해석을 수행하기 위해서는 확률변수에 대한 한계상태식의 미분값이 필요하게 하는데, 비록 식 (19)가 양함수이기 때문에 직접적으로 그 미분값을 구할 수 있지만 응답면 기법과 비교하기 위하여 음함수로 가정하고 FFD(Forward Finite Difference) 방법을 사용하여 신뢰도 지수를 구하였다. () 안의 숫자는 FORM 해석과의 오차를 의미한다. RSM-LS 및 RSM-MLS 값 모두 신뢰도 지수는 FORM의 결과와 거의 유사함을 알 수 있다.

표 1. 예제 1번의 해석비교결과

	Importance sampling MCS	FORM	Response surface method	
			LS approximation	MLS approximation
Reliability index	2.681	2.7099	2.7112 (0.048 %)	2.7100 (0.004%)
Design point				
u_1^*	-	-2.5398	-2.5725 (1.271 %)	-2.5411 (0.051 %)
u_2^*	-	0.9450	0.8562 (10.371%)	0.9417 (0.350 %)
Sensitivity				
$\frac{\partial \beta}{\partial u_1^*}$	-	-0.9372	-0.9488 (1.223 %)	-0.9377 (0.053 %)
$\frac{\partial \beta}{\partial u_2^*}$	-	0.3487	0.3158 (10.418 %)	0.3475 (0.345 %)
NFE	58152	27	30	12

하지만, RSM-LS 경우에는 설계점에서 최대 10.371%의 오차가 존재하고, 또한 민감도 값에서도 최대 10.418%의 오차가 발생한다. 반면에, RSM-MLS 경우에는 설계점 및 민감도부분에서 최대 0.35%이내의 결과가 얻어짐을 알 수 있다. 또한 이와 같이 비선형성이 강한 문제의 경우에, RSM-LS는 6번의 응답함수의 재근사를 필요로 하였으며 이에 필요한 함수평가의 개수(NFE, Number of function evaluation)는 30으로 오히려 FORM 해석에서 요구하는 NFE인 27보다 더 많아짐을 알 수 있다. 반면에 RSM-MLS의 경우에는 단 12번만의 함수평가로부터 만족할만한 수렴성을 확보할 수 있었다.

4.2 예제 2 : 비선형 한계상태함수

이번 예제는 비선형 한계상태식으로 다음 식 (20)과 같다 (Duprat, 2006; Gayton, 2003).

$$G(\mathbf{u}) = \exp(0.2u_1 + 1.4) - u_2 \quad (20)$$

여기서 확률변수 u_1 와 u_2 는 통계적으로 독립이고 평균이 0이고 표준편차가 1인 표준정규분포이다. 예제 1번과 마찬가지로 FORM 해석, RSM-LS 및 RSM-MLS로부터 구한 신뢰도 지수의 이력곡선을 그려보면 그림 5와 같다. 예제 1번

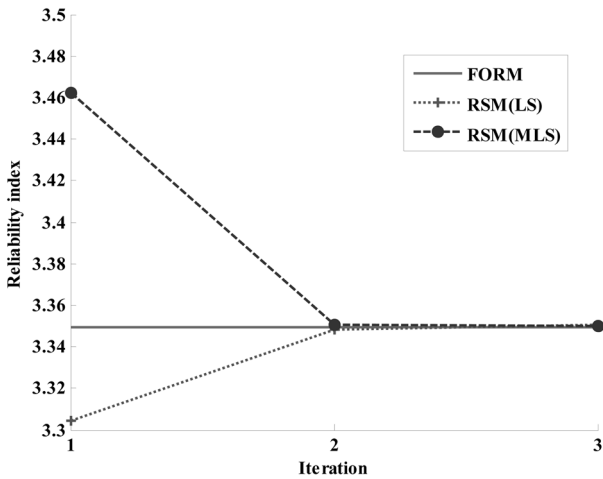


그림 5. 예제 2 : 반복과정에서의 신뢰도 지수

보다는 비선형성이 더 약해서 두 방법 모두 반복과정 3번만에 수렴함을 알 수 있다. 이에 대하여 상세한 결과는 표 2와 같다. RSM-LS 및 RSM-MLS 값 모두 신뢰도 지수는 FORM의 결과와 거의 유사함을 알 수 있다. 하지만, RSM-LS 경우에는 설계점에서 최대 3.459%의 오차가 존재하고, 또한 민감도 값에서도 최대 3.446%의 오차가 발생한다. 반면에, RSM-MLS 경우에는 설계점 및 민감도부분에서 0.85% 이내의 오차가 발생함을 알 수 있다. FORM에서 요구하는 NFE는 27번이, RSM-LS는 15번이고 RSM-MLS는

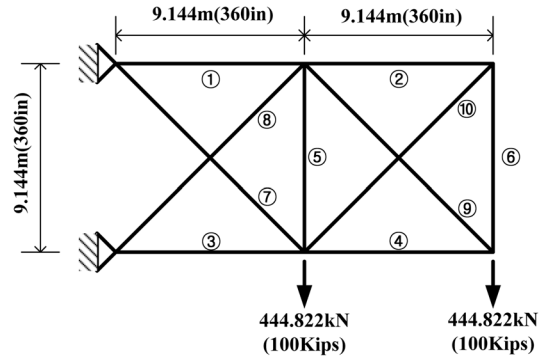


그림 6. 10-bar 트러스 구조물

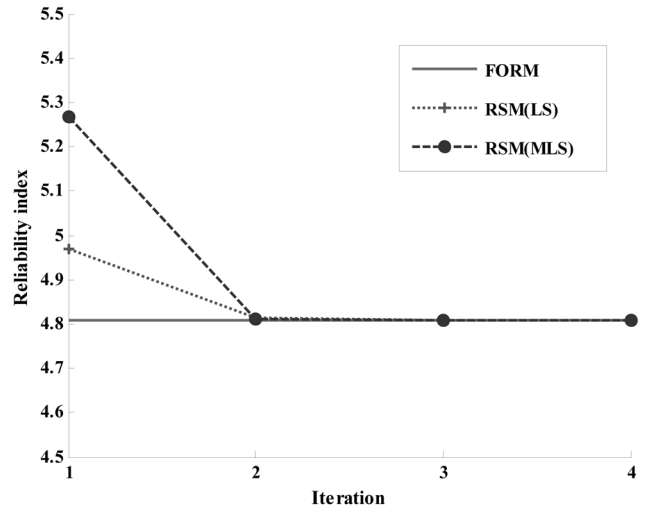


그림 7. 예제 3 : 반복과정에서의 신뢰도 지수

표 2. 예제 2번의 결과

	Importance sampling MCS	FORM	Response surface method	
			LS approximation	MLS approximation
Reliability index	3.3881	3.3497	3.3506 (0.027%)	3.3501 (0.012%)
Design point				
u_1^*	-	-1.6800	-1.7402 (3.459%)	-1.6944 (0.850%)
u_2^*	-	2.8980	2.8632 (1.215%)	2.8900 (0.277%)
Sensitivity				
$\frac{\partial \beta}{\partial u_1^*}$	-	-0.5015	-0.5194 (3.446%)	-0.5058 (0.850%)
$\frac{\partial \beta}{\partial u_2^*}$	-	0.8651	0.8545 (1.241%)	0.8627 (0.2780%)
NFE	76389	27	15	9

표 3. 예제 3번의 결과

	Importance sampling MCS	FORM	Response surface method	
			LS approximation	MLS Approximation
Reliability index	4.801	4.8083	4.8084	4.8089
Design point		7.6658, 9.9949 9.7302, 10.0075 10.0350, 9.9949 9.5916, 10.2997 10.0212, 9.9855	7.6636, 9.9949 9.7326, 10.0075 10.0346, 9.9949 9.5986, 10.2946 10.0209, 9.9857	7.6651, 9.9949 9.7300, 10.0075 10.0354, 9.9949 9.5928, 10.2981 10.0212, 9.9855
Sensitivity		-1.9418, -0.0043 -0.2244, 0.0063 0.0291, -0.0043 -0.3397, 0.2493 0.0177, -0.0121	-1.9436, -0.0042 -0.2225, 0.0062 0.0287, -0.0042 -0.3339, 0.2451 0.0174, -0.0119	-1.9422, -0.0043 -0.2245, 0.0063 0.0294, -0.0043 -0.3387, 0.2479 0.0176, -0.0120
NFE	383,957	90	84	34

9번임을 알 수 있어 제안된 방법이 더 효율적임을 확인할 수 있다.

4.3 예제3 : 트러스 구조물

그림 6과 같은 10-bar 트러스(Choi 등, 2007; Ping 등 2008)에 대하여 신뢰도 해석을 수행하였다 한계상태식은 다음 식 (21)과 같다.

$$G(\mathbf{A})_{1\text{번부재}} = \sigma_{allow} - |\sigma(\mathbf{A})| \tag{21}$$

여기서, 확률분포 특징은 다음과 같다.

$$A_i \sim N(10, 0.5^2)(in^2) \text{ or } N(64.52, 1.27^2)(cm^2) \tag{22}$$

$$\sigma_{allow} = 2.5e4(psi) \text{ or } 172.4MPa$$

그림 7은 식 (18)의 수렴조건을 만족할 때 까지 반복과정에 따른 신뢰도지수의 변화양상을 보여준다. RSM-LS 및 RSM-MLS 모두 4번의 응답 재근사를 통해 수렴됨을 확인할 수 있다. 이러한 양상을 표로 나타내면 다음 표 3과 같이 나타낼 수 있다. Importance sampling MCS, FORM, RSM-LS 및 RSM-MLS 모두 비슷한 신뢰도 지수를 줌을 확인할 수 있다. 설계점(design point)은 각각 차례대로 1번 부터 10번 부재까지의 단면적이고 민감도(sensitivity)는 각 단면적에 대한 신뢰도 지수의 민감도를 나타낸다. 즉, 1번 부재 단면적의 변동성이 신뢰도지수에 가장 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 구조해석을 요구하는 횟수(NFE)에서 FORM은 90번, RSM-LS는 84번, 그리고 RSM-MLS는 34 번으로, 제안된 방법이 효과적으로 구조해석 횟수를 줄여줌을 확인할 수 있다.

5. 결 론

기존의 응답면 기법은 비선형성이 큰 문제의 경우 과도한 계산을 요구하고 민감도측면에서도 상당한 오차가 포함되어 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 본 논문에서는 구조해석 횟수를 줄여주고 민감도의 정확성도 개선시켜주는 새로운 응답면 기법을 제안하였다. 기존의 응답면 기법에 사용된 회귀분석에는 주로 최소제곱근사법이 사용되었지만, 제안된 방법은 이동최소제곱근사법을 사용하였다. 이 방법은 국지적 응답을 더 정확하게 묘사하여 수렴속도를 증대시키고, 기존

에 추출된 표본점에 대한 응답결과를 폐기하지 않고 그 다음 응답 재근사에 재사용할 수 있게 하여 구조해석 횟수를 줄일 수 있도록 하였다. 또한 국지적 응답을 더 정확하게 묘사하기 때문에 확률변수에 대한 신뢰도지수의 민감도도 더 정확하게 구할 수 있었다. 해석예제에 대하여 검토해본 결과, 구조해석 횟수를 상당히 줄여주면서도 신뢰도 지수에 대한 정확도뿐만 아니라 확률변수에 대한 신뢰도 지수의 민감도도 기존의 응답면 기법보다 더 우수함을 알 수 있었다. 개발된 방법은 대형구조물 해석의 신뢰도 평가에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설 핵심기술연구개발사업 및 안전하고 지속가능한 사회기반 건설 사업단을 통하여 지원된 Brain Korea 21에 의하여 수행되었습니다. 연구지원에 감사드립니다.

참고문헌

강수창, 서정관, 고현무, 박관순(2005) 동조질량감쇠기를 장착한 강합성형 고속철도교의 피로 신뢰성 평가, **한국지진공학회는 문집**, 한국지진공학회, Vol. 9, No. 5, pp. 1-10.

김상호, 나성원(1995) 개선된 응답면기법을 이용한 구조신뢰성해석. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제15권 제1호, pp. 63-72.

박미연, 조효남, 조태준(2006) 붕괴모드 조합 예측법에 의한 PSC 사장교의 위험도 평가. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제26권 제4호, pp. 647-657.

조태준, 김이현, 조효남(2008) 개선된 응답면기법에 의한 신뢰성 평가. **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, Vol. 20, No. 1, pp. 21-31.

조태준, 김이현, 조효남(2008) 선형 적응적 가중 응답면기법에 의한 현수교의 위험도 분석. **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, Vol. 20, No. 1, pp. 93-104.

함대기, 박원석, 박관순, 고현무(2006) 사장교에 장착된 MR 댐퍼의 비용효율성 평가 및 최적설계 연구, **한국지진공학회는문집**, 한국지진공학회, Vol. 10, No. 6, pp. 1-10.

허정원(2003) 실제 구조물의 유한요소 신뢰성 해석을 위한 복합 알고리즘. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제23권, 제6호, pp. 1321-1329.

Bjerager, P. (1988) Probability integration by directional simulation. *J Eng Mech*, Vol. 114, No. 8, pp. 1285-301.

- Bucher, C.G. and Bourgund, U. (1987) *Efficient use of response surface methods*, Institute of Engineering Mechanics, Report No. 9-87, University of Innsbruck, Austria.
- Bucher, C.G. and Bourgund, U. (1990) A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Struct Safety*, Vol. 7, No. 1, pp. 57-66.
- Chandu, S. and Grandi, R. (1995) General purpose procedure for reliability based structural optimization under parametric uncertainties, *Advanced Engineering Software*, Vol. 23, pp. 7-14.
- Choi, S.K., Grandhi, R.V., and Canfield, R.A. (2007) *Reliability-based structural design*, Springer
- Der Kiureghian, A., Lin, H-Z., and Hwang, S.-J. (1987) Second order reliability approximations. *ASCE J Engng Mech*, Vol. 113, No. 8, pp. 1208-1225.
- Ditlevsen, O. and Madsen, H.O. (1996) *Structural reliability methods*. Chichester: Wiley.
- Duprat, F. and Sellier, A. (2006) Probabilistic approach to corrosion risk due to carbonation via an adaptive response surface method, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 21, pp. 207-216.
- Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D. (1994) Reliability-based optimization in structural engineering, *Structural safety*, Vol. 15, No. 3, pp. 169-196.
- Gayton, N., Bourinet, JM., and Lemaire, M. (2003) CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis, *Structural safety*, Vol. 25, pp. 99-121.
- Haldar, A. and Mahadevan, S. (2000) *Reliability Assessment Using Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C. (1974) Exact and invariant second-moment code format. *J. Eng Mech*, ASCE, Vol. 100, pp. 111-121.
- Kaymaz, I. and McMahon, C.A. (2005) A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 11-17.
- Kim, S. and Na, S. (1997) Response surface method using vector projected sampling points. *Struct Safety*, Vol. 19, No. 1, pp. 3-19.
- Lancaster, P. and Salkauskas, K. (1981) Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158.
- Liu, P.L. And Kiureghian, A.D. (1991) Optimization algorithms for structural reliability. *Struct Safety*, Vol. 9, pp. 161-177.
- Rackwitz, R. and Fiessler, B. (1978) Structural reliability under combined random load sequences. *Comput Strut* 9, pp. 489-494.
- Rajashekhar, M.R. and Ellingwood, B.R. (1993) A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Struct Safety*, Vol. 12, No. 3, pp. 205-220.
- Yi, P. and Cheng, G., and Jiang, L. (2008) A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization, *Structural safety*, Vol. 30, No. 2, pp. 91-109.

(접수일: 2008.7.24/심사일: 2008.10.29/심사완료일: 2008.10.29)