

동수압 모형의 동역학적 경계조건

A Non-Hydrostatic Pressure Model and its Implementation of the Dynamic Boundary Condition

이종욱* · 이진우** · 조용식***

Lee, Jong Wook · Lee, Jin Woo · Cho, Yong-Sik

Abstract

In this paper, a three-dimensional non-hydrostatic pressure model for free surface flows using a normalized vertical coordinate system is presented. To strongly couple the free surface and non-hydrostatic pressure in the momentum equations, a double predictor-corrector method is employed. This research is especially focused on implementing the dynamic boundary condition (a zero pressure condition) at the free surface. This boundary condition can be specified accurately with a small modification to existing models. Numerical results with and without this modification clearly show that a precise implementation of the dynamic boundary condition is paramountly important.

Keywords : free surface flows, non-hydrostatic pressure, dynamic boundary condition, wave propagation

요 지

본 연구에서는 자유수면 흐름에 적용할 수 있는 연직방향에 대해 좌표변환된 3차원 동수압 모형을 제시하였다. 제시한 모형은 자유수면과 동수압의 해석을 위하여, 2중 예측-수정(double predictor-corrector)방법을 적용하였다. 본 연구에서는 정확한 동역학적 경계조건(자유수면에서의 압력은 0인 조건)을 적용하는 방법을 검토하였고, 이 경계조건은 기존에 개발된 모형에 미소한 수정을 통하여 적용 가능함을 보여주었다. 본 연구에서 제시한 모형과 기존 모형의 계산결과를 비교하였을 때 동역학적 경계조건의 정확한 적용이 매우 중요함을 알 수 있다.

핵심용어 : 자유수면 흐름, 동수압, 동역학적 경계조건, 파랑의 전파

1. 서 론

과거 동수압 모형을 이용한 자유수면 흐름의 수치모형은 광범위하게 발전되어왔다(Casulli, 1999; Chen, 2003; Li와 Fleming, 2001; Lin과 Li, 2002; Lee 등, 2005). 대부분의 모형은 지배방정식의 차분에 있어서 Arakawa C-grid (Vreugdenhil, 1994)형태의 엇갈림 격자망(staggered grid system)을 사용한다. 엇갈림 격자망을 이용하면 연속방정식을 쉽고 정확하게 적용할 수 있으며 압력이 진동하는 오류(checker board pressure oscillation; Patankar, 1980)를 간단히 제거할 수 있다. 그러나 이 격자망은 압력항이 격자의 가운데에서 정의됨으로써 동역학적 경계조건(자유수면에서 압력은 0인 조건)의 정확한 부여가 어렵다. Casulli(1999)의 연구에서는 동역학적 경계조건을 자유수면에 적용하는 대신 자유수면 격자층 중앙에 적용(여기에서는 자유수면 격자층의 정수압 분포 가정이라고 명함)하여 문제를 간략화 하였으나, 이에 따라 정확한 수치계산을 위해 많은 연직 격자층(약

10~20개)을 필요로 한다.

최근 동역학적 경계조건의 정확한 적용에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. Stelling과 Zijlema(2003)는 연직방향 유속과 더불어 연직방향의 표면에 동수압을 정의하는 변형된 엇갈림 격자망을 이용하였으며, 이에 따라 동수압이 자유수면에 정의되면서 동역학적 경계조건을 정확하게 대입하였다. Yuan과 Wu (2004)는 본 연구에서 사용된 격자망과 비슷한 Arakawa C-grid를 사용하고 있지만, 연직방향의 운동량방정식을 자유수면 격자층 중앙에서부터 자유수면까지 적분하여 자유수면에서의 동역학적 경계조건을 부여하였다.

위에서 언급된 기존의 연구는 동역학적 경계조건의 정확한 계산을 통하여 비교적 적은 연직 격자층(약 2~3개)을 이용하여 복잡한 비선형 파의 전파문제를 해석하였다. 그러나 일반적인 3차원 모형의 필요성은 파의 전파문제뿐만 아니라 3차원 유속장을 계산하고 이에 따른 오염물의 거동 해석 및 밀도차에 의한 순환 해석 등에 유용하다. 만약 3차원 모형

*Hydrology Modeler, Murray-Darling Basin Commission, Australia (E-mail : jong.lee@mdbc.gov.au)

**정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 박사과정 (E-mail : moonguy@hanyang.ac.kr)

***정회원 · 교신저자 · 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수 (E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

이 오염물이나 밀도차의 해석에 이용될 경우, 여러 개의 연직 격자층이 사용되어야 하며 이때 Stelling과 Zijlema (2003)의 연구결과를 이용하면 동수압 계산에 필요한 Poisson방정식의 비대칭성이 급속히 증가하게 되므로 아주 많은 계산시간이 필요하게 된다. 본 연구에서 제한한 수치모형은 Casulli(1999)의 모형에 동역학적 경계조건의 대입 방법을 개선하여 수치해의 정확성을 향상시킬 수 있으며 연직 격자층의 증가에 따른 계산시간이 급증하는 Stelling과 Zijlema(2003) 모형의 단점을 보완하였다.

2. 지배방정식

총 압력을 정수압과 동수압으로 분류하고 3차원 Navier-Stokes방정식에 대입하여 정리하면 자유수면을 갖는 비압축성 유체에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다(Casulli, 1999). 자유수면 및 하상고의 변화를 쉽게 적용하기 위해 본 연구에서는 연직방향을 좌표변환한 일반좌표계를 사용하였으며, 이는 Phillips(1957)에 의해 도입된 시그마 좌표계와 흡사하다. 수평방향 좌표가 시간과 연직방향에 대해 독립적이라 가정하고, 직교좌표계(t, x, y, z)를 일반좌표계(t^*, x^*, y^*, ζ)로 변환하면 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{v}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\hat{W}}{J} \right) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial u}{\partial x^*} + v \frac{\partial u}{\partial y^*} + W \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -g \frac{\partial h}{\partial x^*} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial q}{\partial x^*} + \zeta_x \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} + u \frac{\partial v}{\partial x^*} + v \frac{\partial v}{\partial y^*} + W \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -g \frac{\partial h}{\partial y^*} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial q}{\partial y^*} + \zeta_y \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t^*} + u \frac{\partial w}{\partial x^*} + v \frac{\partial w}{\partial y^*} + W \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\zeta_z \partial q}{\rho_0 \partial \zeta} \quad (1d)$$

여기서,

$$\zeta_t = J z_t, \quad \zeta_x = J z_{x^*}, \quad \zeta_y = J z_{y^*}, \quad \zeta_z = J, \quad J = 1/z_\zeta \quad (2)$$

u, v 와 w 는 각각 x, y, z -방향의 유속성분, $\hat{W} = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w$, $W = \zeta_t + \hat{W}$, q 는 동수압, h 는 수심을 나타낸다(Fig. 1). g 는 중력가속도이고 ρ_0 는 밀도로서 상수이다.

자유수면의 해석에는 연속방정식(1a)을 수심 적분하여 얻어지는 자유수면방정식(free surface evolution equation)을 사용한다.

$$\frac{\partial h}{\partial t^*} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y^*} \quad (3)$$

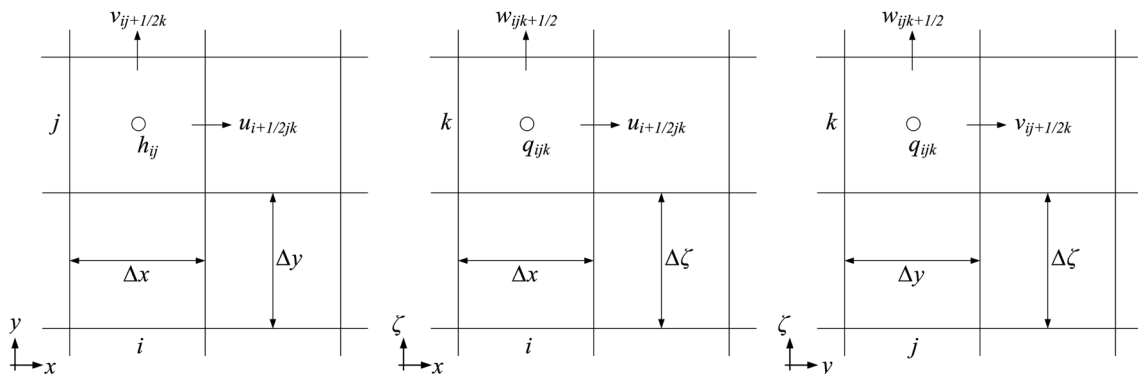


Fig. 2 엇갈림 격자망에서의 변수의 정의

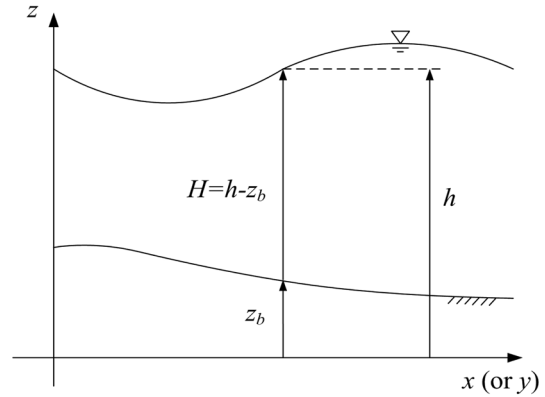


Fig. 1 자유수면과 하상고의 정의

여기서, \bar{u} 와 \bar{v} 는 수심 적분된 유속이고, 위 첨자(*)는 일반좌표계를 나타내기 위해 사용되었으나 간편성을 위하여 이 후부터는 생략하였다.

3. 수치해법

식 (1)과 식 (3)의 수치해를 구하기 위하여, Fig. 2에 나타난 엇갈림 격자망을 이용하였다. 여기서 x, y - 그리고 ζ -방향에서 격자점들은 $1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq k \leq N_3$ 범위 내에서 각각의 격자간격인 $\Delta x, \Delta y, \Delta \zeta$ 만큼 변화한다.

본 연구에서는 세가지 단계의 방법을 이용하여 운동량방정식을 해석하였다. 첫번째 단계에서는 양해적인 방법으로 운동량방정식 (1b)~(1d)을 해석한다.

$$u_{i+1/2jk}^* = u_{i+1/2jk}^n - F(u_{i+1/2jk}^n) - \Delta t g \frac{h_{i+1j}^n - h_{ij}^n}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left[\frac{q_{i+1jk}^n - q_{ijk}^n}{\Delta x} + (\zeta_x)_{i+1/2jk}^n \frac{q_{i+1jk+1}^n - q_{i+1jk-1}^n + q_{ijk+1}^n - q_{ijk-1}^n}{4\Delta \zeta} \right] \quad (4a)$$

$$v_{ij+1/2k}^* = v_{ij+1/2k}^n - F(v_{ij+1/2k}^n) - \Delta t g \frac{h_{ij+1}^n - h_{ij}^n}{\Delta y} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left[\frac{q_{ij+1k}^n - q_{ijk}^n}{\Delta y} + (\zeta_y)_{ij+1/2k}^n \frac{q_{ij+1k+1}^n - q_{ij+1k-1}^n + q_{ijk+1}^n - q_{ijk-1}^n}{4\Delta \zeta} \right] \quad (4b)$$

$$w_{ijk+1/2}^* = w_{ijk+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\rho_0} (\zeta_z)_{ijk+1/2}^n \frac{q_{ijk+1}^n - q_{ijk}^n}{\Delta \zeta} \quad (4c)$$

여기서, Δt 는 n 단계씩 증가하는 시간을 나타내고 F 는 3차

정확도의 풍상차분법에 흐름제안자를 도입한 TVD(total variation diminishing)방법(Shi와 Toro, 1996)으로 차분한 이송항의 근사값이다. 만약, 확산항이 포함된다면 확산항의 연직방향 미분항은 연직방향의 상대적으로 작은 격자간격으로 인해 수치기법이 불안정해지는 문제가 발생한다. 이러한 문제는 음해적인 방법으로 차분하여 해결할 수 있지만, 본 연구의 경우 확산항을 다루지 않으므로 생략하였다.

다음 두번째 단계에서는 자유수면 경사항의 영향을 고려하여 수평방향의 유속성분을 계산한다.

$$u_{i+1/2jk}^{**} = u_{i+1/2jk}^* - \Delta t \theta g \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tilde{h}_{i+1/2j}^n) \quad (5a)$$

$$v_{ij+1/2k}^{**} = v_{ij+1/2k}^* - \Delta t \theta g \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tilde{h}_{ij+1/2}^n) \quad (5b)$$

여기서, $\delta \tilde{h}^n = \tilde{h}^{n+1} - h^n$, \tilde{h}^{n+1} 는 마지막 단계에서 수정되는 자유수면이고 θ 는 0.5에서 1.0까지 변화하는 변수이다. 식 (4)와 식 (5)를 합치면, $\theta=0.5$ 일 경우 자유수면 경사항은 2차 정확도로 차분된다. Casulli와 Cattani(1994)의 연구를 인용하면 식 (5)는 자유수면의 전파속도와 시간증분에 관계없이 무조건적으로 안정적인 계산을 수행할 수 있다. 일반적으로 식 (5)는 자유수면 보정 단계(free surface correction step)라고 한다. 연직방향의 유속성분 w 는 식 (1d)에서와 같이 h 에 대한 함수가 아니므로 $w_{ijk+1/2}^*$ 는 $w_{ijk+1/2}^{**}$ 로 바로 대체할 수 있다.

마지막 세번째 단계에서는 동수압을 고려한 다음 식으로부터 최종유속장을 계산한다.

$$u_{i+1/2jk}^{n+1} = u_{i+1/2jk}^{**} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} + \zeta_x \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \zeta} \right)_{i+1/2jk}^{n+1} \quad (6a)$$

$$v_{ij+1/2k}^{n+1} = v_{ij+1/2k}^{**} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} + \zeta_y \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \zeta} \right)_{ij+1/2k}^{n+1} \quad (6b)$$

$$w_{ijk+1/2}^{n+1} = w_{ijk+1/2}^{**} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left(\zeta_z \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \zeta} \right)_{ijk+1/2}^{n+1} \quad (6c)$$

여기서, \tilde{q}^{n+1} 는 동수압의 교정항이다. 아래의 3.1절과 3.2절에서는 2단계와 3단계의 풀이과정에 대해 기술하였다.

3.1 자유수면 보정 단계

이 절에서는 식 (4a)와 (4b)를 해석하여 구한 중간단계의 수평 유속장을 자유수면 방정식 (3)에 대입하여 업데이트한다. Casulli와 Cantani(1994)가 발전시킨 것과 유사한 반 음해법을 이용하면 식 (3)은 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \tilde{h}_{ij}^{n+1} + \Delta t \theta \left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^{**} - \bar{u}_{i-1/2j}^{**}}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_{ij+1/2}^{**} - \bar{v}_{ij-1/2}^{**}}{\Delta y} \right] = \\ - \Delta t (1 - \theta) \left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^n - \bar{u}_{i-1/2j}^n}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_{ij+1/2}^n - \bar{v}_{ij-1/2}^n}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)이 수심 적분된 유속을 사용하므로 식 (5) 또한 적분하면 다음과 같다.

$$\bar{u}_{i+1/2j}^{**} = \bar{u}_{i+1/2j}^n - g H_{ij+1/2}^n \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tilde{h}_{i+1/2j}^n) \quad (8a)$$

$$\bar{v}_{ij+1/2}^{**} = \bar{v}_{ij+1/2}^n - g H_{ij+1/2}^n \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tilde{h}_{ij+1/2}^n) \quad (8b)$$

여기서 $H = h - z_b$ 는 수심이다. 식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다

음의 자유수면 교정식(Chen, 2003)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \tilde{h}_{ij}^{n-g} (\theta \Delta t) \left[\frac{\alpha_1^+ (\frac{\partial \delta \tilde{h}^n}{\partial x})_{i+1/2j} - \alpha_1^- (\frac{\partial \delta \tilde{h}^n}{\partial x})_{i-1/2j} + \alpha_2^+ (\frac{\partial \delta \tilde{h}^n}{\partial y})_{ij+1/2} - \alpha_2^- (\frac{\partial \delta \tilde{h}^n}{\partial y})_{ij-1/2} \right] \\ = - \theta \Delta t \left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^* - \bar{u}_{i-1/2j}^*}{\Delta x} - \frac{\bar{v}_{ij+1/2}^* - \bar{v}_{ij-1/2}^*}{\Delta y} \right] \\ - (1 - \theta) \Delta t \left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^n - \bar{u}_{i-1/2j}^n}{\Delta x} - \frac{\bar{v}_{ij+1/2}^n - \bar{v}_{ij-1/2}^n}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\alpha_1^\pm = H_{i\pm 1/2}^n$ 이고 $\alpha_2^\pm = H_{ij\pm 1/2}^n$ 이며, 위의 식 (9)는 자유수면 보정식(free surface correction equation; Chen, 2003)이라고 한다. 중앙차분법을 이용하여 자유수면 항을 차분하면 $\delta \tilde{h}^n$ 에 관한 선형 연립방정식을 얻을 수 있고 이는 적절한 경계조건을 대입한 후, 반복계산법에 의해 해를 구할 수 있다. 이 연립방정식에 의해 얻어지는 계수행렬은 비대칭 행렬이므로 본 연구에서는 SGS(Symmetric Gauss-Seidel)방법(Saad, 1992)으로 전처리(preconditioning)한 BI-CGSTAB(bi-conjugate stabilized)법(Van der vorst, 1992)을 이용하여 해석하였다. 만약 경계에서의 수면 변화가 명확하게 주어 진다면, 직접 식(19)에 대입할 수 있고, $i=1/2$ 이 고체 벽이라고 가정하면 벽면에서의 수평방향 유속은 $0(\bar{u}_{1/2,j} = 0)$ 이며, 이것을 식 (8a)에 대입하면 경계 외부의 자유수면을 제거할 수 있다. 식 (10)을 이용하여 자유수면을 구한 후, 식 (5)로부터 새로운 수평방향 유속을 구할 수 있다.

3.2 동수압 보정 단계

앞의 3.1절에서 연직방향 유속이 고려되지 않았기 때문에 유속장은 각각의 계산격자에서 국부적인 질량보존법칙(또는 연속방정식)을 만족하지 못할 수 있다. 동수압 보정 단계에서는 연속방정식 (1a)과 동수압을 고려함으로써 전 단계에서 구한 유속과 자유수면이 국부적인 질량보존법칙을 만족하도록 수정할 수 있다. 자유수면 아래에 위치한 연직 격자층에 대해 연속방정식 (1a)을 차분하면,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u^{n+1}}{J^n} \right)_{i+1/2jk} - \left(\frac{u^{n+1}}{J^n} \right)_{i-1/2jk} \right] = \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v^{n+1}}{J^n} \right)_{ij+1/2k} - \left(\frac{v^{n+1}}{J^n} \right)_{ij-1/2k} \right] \\ + \frac{1}{\Delta \zeta} \left[\left(\frac{\hat{w}^{n+1}}{J^n} \right)_{ijk+1/2} - \left(\frac{\hat{w}^{n+1}}{J^n} \right)_{ijk-1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

위 식을 이용하기 위해서는 식 (6c)를 \hat{w} 에 대한 식으로 변환해야 하며 이는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{w}_{ijk+1/2}^{n+1} = \hat{w}_{ijk+1/2}^{**} \\ - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left[\zeta_x \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} + (\zeta_x \zeta_x + \zeta_y \zeta_y + \zeta_z \zeta_z) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \zeta} \right]_{ijk+1/2}^{n+1} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (6a), (6b)와 식 (11)을 식 (10)에 대입하고 정리하면 \tilde{q}^{n+1} 가 미지수인 Poisson방정식을 얻게 된다. 이 식은 자유수면 보정식과 유사하게 BI-CGSTAB방법을 이용하여 풀이할 수 있다. 바닥 경계를 포함한 고체 경계면에서의 경계조건은 3.1절에서 소개한 유속의 경계조건으로 대체할 수 있다. 개방경계(open boundary)에서는 정수압 분포가정 $q = \tilde{q} = 0$ 을 이용한다. 그러나 좌표변환을 하였으므로 이러한 경계조건을 적용한 후에도 경계 외부의 추가적인 값을 처리하여야 하며, 이는 경계 내의 두 개의 값을 이용하여 선형보간 하였다. 예를 들면, $\tilde{q}_{ij0} = 2\tilde{q}_{ij1} - \tilde{q}_{ij2}$ 이다.

3.2.1 자유수면에서의 연속방정식

자유수면에서는 두 개의 경계조건 즉, 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건이 필요하다. 본 연구에서 사용하는 일반좌표계에서 운동학적 경계조건은 $(W = \hat{W} + \zeta_t)_{ijN_3+1/2} = 0$ 과 같이 표현할 수 있고, 식 (2)를 이용하면 운동학적 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{W}_{ijN_3+1/2} = -(\zeta_t)_{ijN_3+1/2} = (z_t J)_{ijN_3+1/2} = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{ij} J_{ijN_3+1/2} \quad (12)$$

식 (1a)와 식 (12)를 조합하면 자유수면 격자층을 위한 수정된 연속방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식은 자유수면의 시간 경사항이 포함되어 있으므로 반 음해법으로 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{u^{n+1}}{J^n}\right)_{i+1/2jN_3} - \left(\frac{u^{n+1}}{J^n}\right)_{i-1/2jN_3} \right] \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij+1/2N_3} - \left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij-1/2N_3} \right] \\ & - \frac{1}{\Delta \zeta} \left[\left(\frac{h_{ij}^{n+1} - \tilde{h}_{ij}^{n+1}}{\theta \Delta t}\right) - \left(\frac{\hat{W}^{n+1}}{J^n}\right)_{ijN_3-1/2} \right] = \frac{1-\theta}{\theta \Delta x} \left[\left(\frac{u^n}{J^n}\right)_{i+1/2jN_3} - \left(\frac{u^n}{J^n}\right)_{i-1/2jN_3} \right] \\ & + \frac{1-\theta}{\theta \Delta y} \left[\left(\frac{v^n}{J^n}\right)_{ij+1/2N_3} - \left(\frac{v^n}{J^n}\right)_{ij-1/2N_3} \right] + \frac{1-\theta}{\theta \Delta \zeta} \left[\frac{\tilde{h}_{ij}^{n+1} - h_{ij}^n}{(1-\theta)\Delta t} - \left(\frac{\hat{W}^n}{J^n}\right)_{ijN_3-1/2} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

식 (13)을 살펴보면, 기존의 미지수인 \tilde{q}^{n+1} 이외에 또 다른 미지수 h_{ij}^{n+1} 를 포함한다. h_{ij}^{n+1} 을 제거하기 위해 Casulli(1999)와 Casulli와 Zanolli(2002)는 다음과 같은 가정을 하였다.

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(\tilde{h}_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^n) + \frac{q_{ijN_3}^n + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} \quad (14a)$$

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(h_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^n) + \frac{q_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} \quad (14b)$$

여기서, P 는 압력을 나타낸다. 자유수면과 동수압과의 관계식을 유도하기 위해 Casulli(1999)는 자유수면 격자층의 중앙에서 정의되는 동수압이 0 ($q^n = q^{n+1} = 0$)이라고 가정 (즉, 자유수면 격자층의 정수압 가정)하여 다음과 같이 나타내었다.

$$h_{ij}^{n+1} = \tilde{h}_{ij}^{n+1} + \frac{\tilde{q}_{ijN_3}^n}{\rho_0 g} \quad (15)$$

식 (13)을 풀이하여 \tilde{q}^{n+1} 가 계산되면, h^{n+1} 은 식 (15)에 의해 수정되고 q^{n+1} 은 식 (16)으로 주어진다.

$$q_{ijk}^{n+1} = \tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1} \quad (16)$$

3.2.2 개선된 자유수면에서의 연속방정식

Casulli(1999)의 연구에서 사용된 자유수면 격자층의 정수압 가정은 동역학적 경계조건을 격자의 중앙에 대입하기 때문에 일반적으로 부정확하다. 이러한 문제를 개선하기 위해 본 연구에서는 동역학적 경계조건을 자유수면에 대입하고, 자유수면 격자층 중앙에서 정의되는 동수압을 선형 보간을 통해 계산하였다. 즉,

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(\tilde{h}_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^n) + \frac{q_{ijN_3}^n + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} \quad (17a)$$

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(h_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^n) + \frac{q_{ijN_3}^{n+1}}{3\rho_0} = g(h_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^n) + \frac{q_{ijN_3-1}^n + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1}}{3\rho_0} \quad (17b)$$

여기서, $q_{ijN_3}^{n+1} = q_{ijN_3-1}^n + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1}$ 라고 가정하였고, 식 (17a)와 식 (17b)를 조합하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$h_{ij}^{n+1} = \tilde{h}_{ij}^{n+1} + \frac{q_{ijN_3}^n + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0 g} - \frac{q_{ijN_3-1}^n + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1}}{3\rho_0 g} \quad (18)$$

$$q_{ijk}^{n+1} = q_{ijk}^n + \tilde{q}_{ijk}^{n+1} - (q_{ijN_3}^n + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}) + (q_{ijN_3-1}^n + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1})/3 \quad (19)$$

식 (15)와 비교하여 식 (18)을 이용할 경우, Poisson방정식에서 계산되는 계수행렬의 비대칭성이 다소 증가하여 계산에 필요한 시간 또한 증가하게 된다.

4. 적용 및 결과

본 연구에서 제시한 모형의 정확성을 검토하고 Casulli (1999)의 연구결과와의 비교를 위해, Beji와 Battjes(1993)가 실험을 통해 연구한 수중 구조물을 통과하는 비선형파의 전파문제에 대해 수치모의를 실시하였다. 실험과 수치모의에 사용된 지형은 Fig. 3에 나타내었다. 왼쪽 개방경계에서는 주기 (T)가 1.0 sec이고 파고가 0.1 m인 정규파가 주어지며 오른쪽 개방경계에서는 입사파를 흡수하고 반사되는 것을 방지하기 위해 5 m(25~30 m)의 sponge layer(Stelling와 Zijlema, 2003)를 적용하였다. 수평방향의 계산격자는 $600 \times 5 (\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ m})$ 로 구성하였으며, 연직방향 격자층은 5~20개를 사용하여 계산격자층의 개수에 따른 수치해를 비교하였다. 정확한 수치해를 얻기 위해 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ 를 이용하였다.

계산결과를 비교하기 이전에 먼저 연직 격자층의 변화에 따른 계산시간을 비교하였다. Fig. 4는 처음 계산단계에서 Poisson방정식을 해석하는데 소요되는 반복계산횟수와 계산

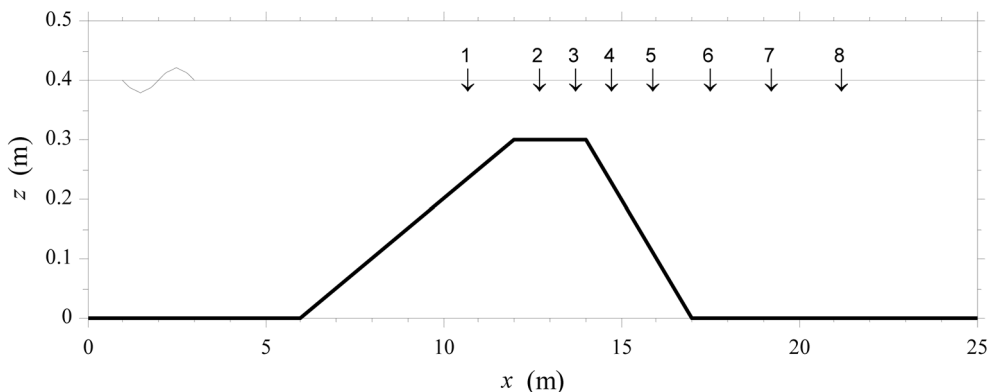


Fig. 3 비선형파의 전파실험을 위한 하상변화 (Beji와 Battjes, 1993)

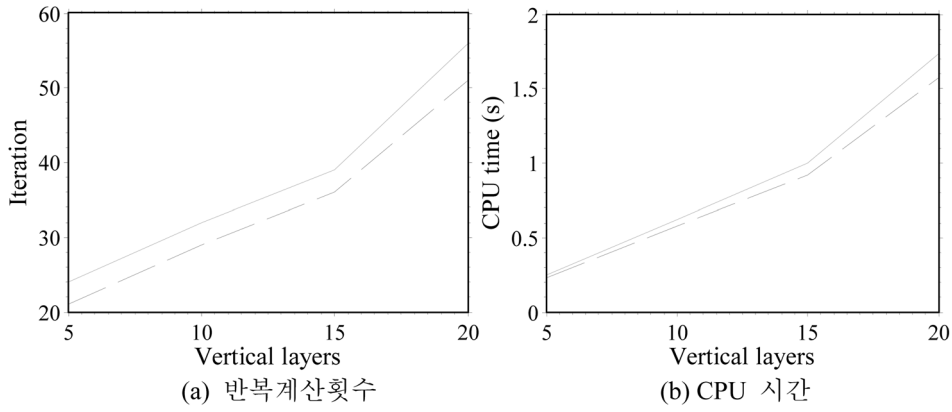
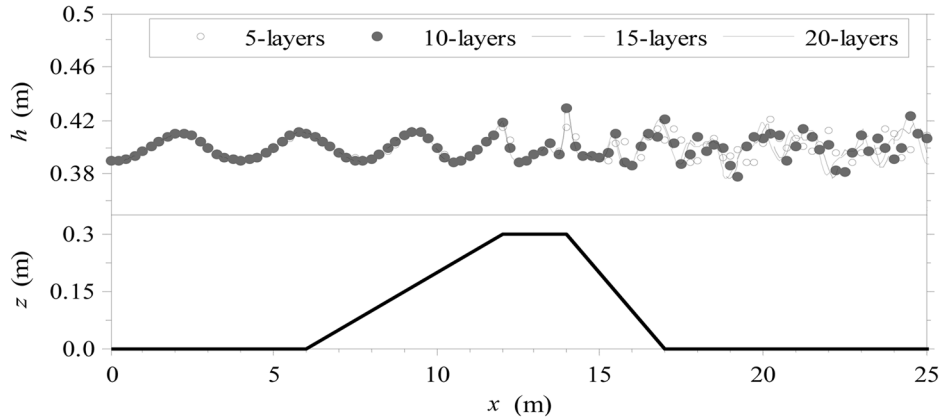
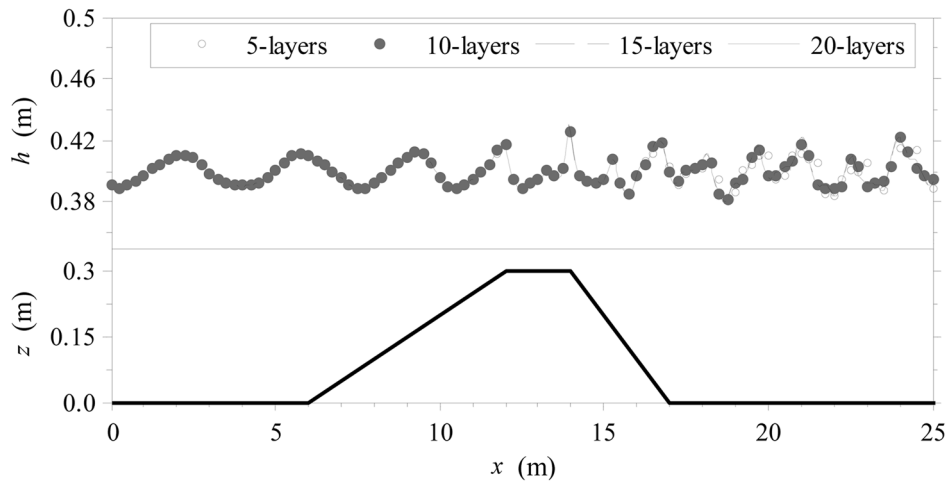


Fig. 4 연직 층수에 따른 반복횟수 및 CPU 시간의 비교 (Casulli의 연구: ---, 본 연구: —)



(a) Casulli가 제시한 방법



(b) 본 연구에서 제시한 방법

Fig. 5 연직 계산층에 따른 자유수면변위 수치모의 결과 ($t=40$ sec)

시간을 비교한 결과이다. Poisson방정식의 잔차가 10^{-8} 이하가 될 때 수치해가 수렴되었다고 가정하였으며, CPU 시간의 계산을 위해서 Pentium IV 3.4 GHz에 1 GB RAM이 장착된 PC를 사용하였다.

Fig. 4에서 나타낸 바와 같이, 본 연구에서 제시한 모형은 연직 격자층의 수와 관계없이 일관적으로 약 4회의 반복계산이 더 요구되었다. 그러나 연직 계산층이 증가할수록 계산에 소요된 CPU 시간이므로 증가하는 경향을 나타내었다. 이는 위에서 설명한 바와 같이 식 (18)을 이용할 경우, 차분된 Poisson방정식의 비대칭성이 증가하기 때문이다. Fig. 4는 계산을 위한 연직 격자층이 15개 이상이면 반복계산횟수와 CPU 시간의 변화율이 급격히 변화하는 것을 보여주며

이러한 경우, 15개 이하의 연직 격자층을 사용하는 것이 적절함을 알 수 있다.

Fig. 5는 $t=40$ s일 때, 각 연직 격자층에 대한 자유수면을 도시한 것이다. 입사파가 전파되어 수중 구조물의 정상부에 도달하기 전까지는 연직 격자층의 갯수에 관계없이 거의 유사한 결과를 나타내지만, 정상부에 도달하게 되면 상이한 결과를 나타낸다. 특히, Casulli(1999)가 제시한 방법을 이용한 계산결과는 파가 구조물의 정상부를 지나면서 파의 전파속도와 크기가 변화하는 것을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법을 이용할 경우, 5개의 연직 격자층을 사용한 경우를 제외하면 격자층의 갯수에 따른 전파속도와 크기 변화는 거의 무시할 정도이며, Casulli(1999)의 연구 결과와

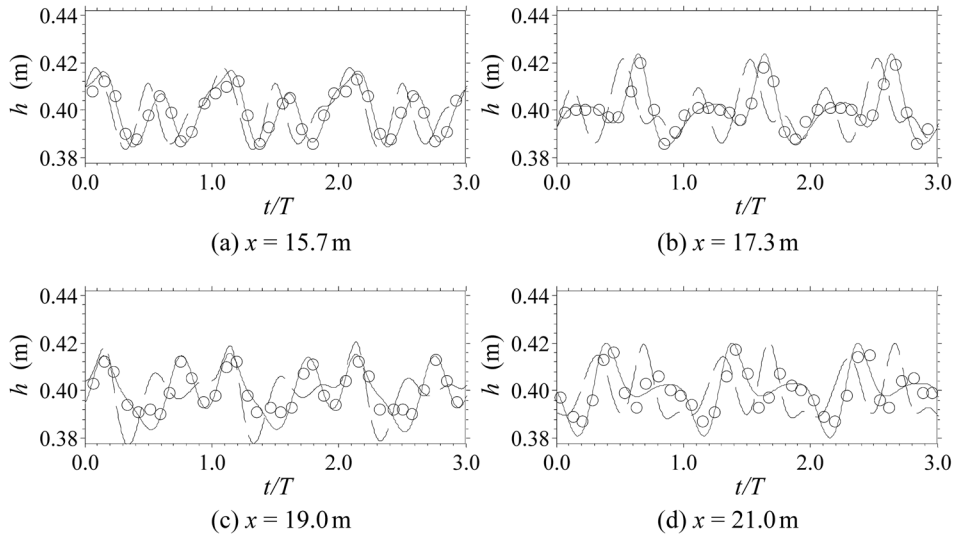


Fig. 6 자유수면 변위의 비교 (Casulli의 연구: —, 본 연구: - -)

비교하여 크게 향상된 결과를 얻을 수 있다. 이는 동역학적 경계조건의 정확한 계산이 중요함을 의미한다.

수치해의 정확성을 비교하기 위하여 10개의 연직 격자층을 이용한 수치모의 결과를 실험값과 비교하여 Fig. 6에 나타내었다. 본 연구에서 제시한 방법을 이용할 경우 수치해는 비교적 실험치와 잘 일치하였으나, Casulli(1999)가 제시한 방법을 이용할 경우 좌측 경계에서 멀어짐에 따라 수치해의 정확도가 점차 떨어짐을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 동수압 모형에서의 동역학적 경계조건의 중요성을 수치적으로 증명하였다. Casulli(1999)의 연구에서 사용된 가정(자유수면 격자층에서 정수압 분포 가정)을 사용하지 않고, 선형보간법을 이용하여 자유수면 격자층에서 동수압을 구하였다. 본 연구에서 제시한 방법을 이용할 경우 Poisson방정식의 해석에 필요한 계산시간과 반복계산횟수가 미소하게 증가하였지만, 적용 결과에서는 Casulli(1999)의 연구 결과와 비교할 때 본 연구의 방법이 우수함을 입증하였다. 오염물 추적이나 밀도류 해석 등 수치해석에 있어서 여러 개의 연직 격자층이 필요한 경우, 본 연구의 결과는 매우 유용할 것으로 판단된다. 본 모형의 적용성과 정확도 검토를 위한 3차원 문제 등 보다 많은 수치실험 및 환경문제의 적용을 위한 모형의 확장은 추후 연구과제로 진행할 계획이다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부 (과제: 해일피해 예측 정밀격자 수치 모델 구축 및 설계해면 추산)의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

Beji, S. and Battjes, J.A. (1993) Experimental investigation of wave propagation over a bar. *Coastal Eng.*, Vol. 19, No. 1-2, pp. 151-162.

Casulli, V. (1999) A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows, *Int. J. Numer. Meth., Fluids.*, Vol. 30, pp. 425-440.

Casulli, V. and Cattani, E. (1994) Stability accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow, *Comput. Math. Appl.*, Vol. 27, No. 4, pp. 99-112.

Casulli, V. and Zanolli, P. (2002) Semi-implicit numerical modelling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems, *Math. Comp. Modeling.*, Vol. 36, No. 9-10, pp. 1131-1149.

Chen, X. (2003) A free-surface correction method for simulating shallow water flows, *J. Comput. Phys.*, Vol. 189, pp. 557-578.

Lee, J.W., Teubner, M.D., Nixon J.B., and Gill, P.M. (2006) A 3-D non-hydrostatic model for small amplitude free surface flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 50, pp. 649-672.

Li, B. and Fleming, C.A. (2001) Three-dimensional model of Navier-Stokes equations for water waves, *J. Waterway. Port Coast. Ocean Eng.*, Vol. 127, pp. 16-25.

Lin, P. and Li, C.W. (2002) A s-coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 38, pp.1045-1068.

Patankar, S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Pub.

Phillips, N.A. (1957) A coordinate system having some special advantages or numerical forecasting. *J. Meteor.*, Vol. 14, pp. 184-185.

Saad, Y. (1992) *Numerical methods for large eigenvalue problems (Algorithms and architectures for advanced scientific computing)*, John Wiley and Sons Inc.

Shi, J. and Toro, E.F. (1996) Fully discrete high-order shock-capturing numerical schemes, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 23, pp. 241-269.

Stelling, G.S. and Zijlema, M. (2003) An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 43, pp. 1-23.

Van der Vorst, H.A. (1992) BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, pp. 631-644.

Vreugdenhil, C.B. (1994) *Numerical methods for shallow-water flow*, Kluwer Academic Publishers.

Yuan, H. and Wu, C.H. (2004) An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. 46, pp. 709-733.

(접수일: 2008.7.21/심사일: 2008.9.1/심사완료일: 2008.10.4)