

## 순간 유입된 오염물질의 혼합 모의 시 질량 오차 산정

### Estimation of Mass Error in the Simulation of Mixing of Instantaneously Released Pollutants

이명은\* · 서일원\*\*

Lee, Myung Eun · Seo, Il Won

#### Abstract

2D finite element model for analysis of transport of accidentally released pollutants in the flow was developed by SUPG method, and the mass balance of this model was checked through two example problems: line source and point source problem in the straight channel and unidirectional 2D flow field, respectively. All the test cases were simulated with both SUPG and conventional Galerkin method to compare the accuracy of the numerical mass balance. Test results show that the model with SUPG can adequately conserve the released mass through simulation than the model using Galerkin method, so the developed model verified to be appropriate to solve this accidental mass release problem.

Keywords : pollutant, advection-dispersion 2D finite element model, instantaneous release, mass error, SUPG method

#### 요 지

사고 등으로 인해 하천에 순간적으로 주입되는 오염물질의 2차원 이송-확산을 모의하기 위하여 SUPG법에 의한 2차원 유한요소 모형을 개발하고 주입된 질량과 모의 질량간의 오차를 산정하였다. 지배방정식으로부터 질량 오차 산정식을 유도하고 이를 간단한 예제에 적용하였다. 적용 예제로는 단순 직선수로에서 선원을 통한 질량주입과 일방향의 등질 유속장을 가지는 2차원 공간에서 점원을 통한 질량주입 문제를 가정하였으며, 기존의 Galerkin법과의 비교를 위하여 두가지 수치기법에 대한 모의 검증에 실시하였다. 검증결과 기존의 Galerkin법에 의한 모의 결과에 비하여 SUPG법을 통한 수치모형의 구성이 모의의 정확성뿐만 아니라 주입 질량의 보존에 있어서도 보다 정확한 방법임을 확인하였다.

핵심용어 : 오염물질, 이송-분산 2차원 유한요소모형, 순간 주입, 질량 보존, SUPG 기법

#### 1. 서 론

국내 주요 하천들은 대부분 상수원으로 사용되고 있어서 하천에서의 오염물 이송 및 분산은 매우 중요한 연구 주제라 할 수 있다. 하천에 유입되는 오염원은 하수처리장에서 처리된 하수가 방류관이나 개수로로 통해 지속적으로 유입되는 것이 일반적이지만 하천 주변 산업시설에서의 독성물질 누출, 교각이나 강변로에서의 차량 전복 등의 사고 등을 통하여 다량의 독성물질이 순간적으로 하천에 유입되는 상황이 자주 발생하는 실정이다.

독성 물질의 사고 유출에 관한 국외 연구 사례로는 지표수 관련 분야보다도 대기 오염 분야에 있어서 활발한 연구가 이루어져왔다. Tixier 등(2002)은 대기중에 사고로 유입된 위험 물질을 해석해와 이를 위해 적절히 산정된 분산계수를 통해 모의하는 모형을 제안하였다. Bellasio와 Bianconi(2005)는 대기 중에 독성물질이 순간적, 일시적, 혹은 연속적으로 유출되는 모든 경우에 있어서 일반적으로 적용 가능한 해석

해 모형을 제안한 바 있다. 이러한 모형들은 대기의 각 위치에서 독성물질이 퍼지는 속도와 농도를 2차원적으로 모의해 낼 수 있다. 대기의 경우 지형적 복잡성을 고려하지 않아도 되므로 이러한 해석해 모형의 개발이 용이하나, 하천의 경우는 하천 경계의 복잡한 지형 특성을 고려한 2차원 수치 모형의 개발이 필요하다. 이를 위해 유한요소법 등 비정형 격자망(unstructured grid)에 의한 다차원 하천 흐름 및 이를 통한 하천 오염물질 이송-분산 모형이 광범위하게 이용되고 있다. 미 공병단에서 개발된 다차원 유한요소 모형인 TABS-MD 코드는 이송-분산 모형으로 RMA4를 포함하고 있으며, DHI(Danish Hydraulic Institute)에서 개발한 상용 모형 MIKE3는 해안과 하구를 중심으로 비정형격자망에서의 오염물 확산 모형을 제공하고 있다. 또 다른 해안 순환 모형 중 하나인 FVCOM(Chen 등, 2003) 또한 질량 이송 모형 및 수질모형을 갖추고 있다. 국내의 경우 이정규와 김주영(2000)은 2차원 순간 주입 점오염원에 대한 연구를 수행한 바 있으며, 이정규와 김광기(2002)는 이를 사용하여 2

\*정회원 · Research Fellow, Tropical Marine Science Institute, National University of Singapore (E-mail : tmslme@nus.edu.sg)

\*\*정회원 · 교신저자 · 서울대학교 공과대학 건설환경시스템공학부 교수 (E-mail : seoilwon@snu.ac.kr)

차원 오염물질 거동해석 연구를 수행하였다. 또한 이명은과 서일원(2007)은 유한요소법에 의한 2차원 이송-확산 수치모형을 통하여 사고 유입에 의한 순간 질량 주입 문제를 모의 검증한 바 있다.

수치모형의 질량 보존 평가는 일정 시각에 각 격자별 질량 보존률과 이를 합산한 전체 영역에서의 질량 보존률로서 산정된다. 이 경우 해석적인 질량 보존식을 이산적인 공간에서 어떻게 표시하느냐에 따라 보존률 산정 결과에 차이를 보인다. 유한요소 모형에서의 질량 보존 산정방법에 관한 연구는 지하수 흐름 분야에서 활발하게 이루어져왔다. Yeh (1981)는 불규칙적인 분포를 갖는 지하수 흐름에 Galerkin법에 의한 유한요소모형을 적용하는 경우 24-30%의 질량 보존 오차가 포함됨을 밝힌 바 있다. 또한 Lynch(1984)는 Yeh(1981)와 같은 연구를 수행함에 있어서 질량 흐름률의 도함수를 보다 정확하게 근사함으로써 실제 유한요소법에 의한 지하수 흐름의 질량 오차를 2-9% 정도임을 보인 바 있다. 천수방정식에서의 유한요소모형 질량 보존에 대해서는 Kolar 등(1996)이 파동방정식 형태의 천수방정식에 Lynch (1984)의 연구와 비슷한 방법을 적용하였으며, 국내에서는 서승원(2000)이 유한요소법에 의한 동수역학모형의 질량 보존에 관해서 연구하였다.

물질의 이송-확산 수치 모의 시 질량의 오차에 대해서는 Oliveira와 Baptista(1998)와 Oliveira 등 (2000)에 의해 이루어진 바 있다. Oliveira와 Baptista(1998)는 Eulerian-Lagrangian 기법에 의한 이송-확산 모형에서 추적 오차 (tracking error)가 해의 정확성과 그에 따른 주입 질량 오차에 끼치는 영향을 조사하였으며, Oliveira 등 (2000)은 유한요소모형에 의한 흐름 해석 결과가 Eulerian-Lagrangian 법에 근거한 질량 이송 모형의 계산 결과에 있어서 질량 오차에 끼치는 영향을 연구하였다. 이들 두 연구에서 질량 오차의 산정식은 식(1)과 같이 순간적으로 주입된 초기 농도분포 총량에 대한 시간별 순간 농도분포 총량의 비율로 나타내졌다.

$$M_{num}(t) = \frac{1}{M_{init}} \int_{\Omega} c(x, y, t) d\Omega, \quad (1)$$

여기서  $M_{init}$ 는 초기 주입된 추적자 농도분포의 공간적분 값이다. 이 경우 모의 시 물질의 순간 주입이 초기 농도 분포 정의에 의해 이루어졌으므로 주입 농도분포와 모의에 의한 순간 농도분포의 직접적인 비교가 가능하다. 그러나 순간 주입이 질량과 디랙델타 함수의 곱으로 이루어진 생성항에 의해 이루어진 본 모형의 경우 식(1)과 같은 직접적인 비교는 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 모형의 보다 간단한 검증을 위하여 모의 영역 내에 주입된 질량과 모의된 질량의 오차를 근사적으로 표현하고자 하였다. 이를 위하여 영역의 유출 경계면을 따라 계산되는 물질의 농도 곡선을 시간에 따라 적분함으로써 주입된 총 질량 대비 유출되는 질량의 총량을 비교하는 방법을 선택하였다.

본 연구의 주요 목적은 서일원과 이명은(2007)에 의해 개발된 2차원 유한요소 모형을 순간 주입된 오염물질의 2차원 이송-확산 모의에 적용시 발생하는 질량 오차를 분석하는 것이다. 이에 따라 본 연구에서는 질량의 유출량 적분을 통하여 주입된 총 질량이 수치적인 이송과 분산과정을 거치는 동안 얼마만큼 보존될 수 있는지를 평가하였다. 질량 오차를

산정하기 위하여 지배방정식으로부터 질량 오차 산정식을 유도하였다. 적용 예제로는 단순 직선수로에서 선원(line source)을 통한 질량주입과 일방향의 등질 유속장을 가지는 2차원 공간에서 점원(point source)을 통한 질량주입 문제를 가정하였다. 점원 주입 예제의 경우 흐름의 방향과 격자망의 정렬 방향이 질량 보존에 미치는 영향도 함께 검증하였다. 이와 함께 SUPG 법에 의한 수치해의 질량 보존성을 기존의 Galerkin법에 의한 모의 결과와 비교하였다.

## 2. 모형의 구성

### 2.1 수치모형

오염물질의 2차원 혼합 거동 해석을 위하여 서일원과 이명은(2007)에 의해 개발된 2차원 유한요소 모형의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (qC) - \nabla \cdot D \nabla C = Q(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, t \in [0, T] \quad (2)$$

여기서  $(x, y)$ 는 2차원 Cartesian 좌표계의 각 좌표,  $t$ 는 시간 좌표,  $C$ 는 수심 평균한 농도,  $q=(u, v)$ 는 각 방향 유속 벡터, 그리고  $D$ 는 2차원 분산계수 텐서,  $\Omega$ 는 폐합된 2차원 영역,  $T$ 는 최종 모의시간, 그리고  $Q$ 는 생성함수이다. 2차원 유속장을 고려한 분산계수 텐서  $D$ 의 각 요소들은 다음과 같이 정의될 수 있다(Lee와 Seo, 2007).

$$D_{xx} = D_L \frac{u^2}{|q|^2} + D_T \frac{v^2}{|q|^2} \quad (3a)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (D_L - D_T) \frac{uv}{|q|^2} \quad (3b)$$

$$D_{yy} = D_T \frac{u^2}{|q|^2} + D_L \frac{v^2}{|q|^2} \quad (3c)$$

여기서  $D_L$ 과  $D_T$ 는 각각 종 · 횡방향, 분산계수이며,  $|q| = \sqrt{u^2 + v^2}$ 로 정의된다.

순간적으로 유입되는 질량  $M$ 은 생성함수  $Q$ 에 의하여 각각 2차원 공간에서의 선원과 점원 등으로 표시할 수 있다. 2차원 공간에서 임의의 선원을 일정 상수  $(a, b, l)$ 에 대하여  $ax+by=l$ 로 정의한다고 하면, 선원에 의한 질량 유입항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q(x, y, t) = \frac{M}{dw} \delta(ax+by-l) \delta(t) \quad (4)$$

여기서  $d$ 는 흐름의 깊이이며  $w$ 는 주입된 선원의 폭이다. 또한 임의의 점원  $(x_o, y_o)$ 에 대해서는 다음의 식이 적용될 수 있다.

$$Q(x, y, t) = \frac{M}{d} \delta(x-x_o, y-y_o) \delta(t) \quad (5)$$

경계조건으로는 다음과 같은 세 가지의 경계조건을 정의할 수 있다.

$$C = C_o(t), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (6a)$$

$$(-D \nabla C) \cdot n = g_o(t), \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad (6b)$$

$$[qC - D \nabla C] \cdot n = r_o(t), \quad (x, y) \in \Gamma_3 \quad (6c)$$

여기서  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma$ 는  $\Omega$ 의 경계이며,  $n$ 은 경계에 수직인 벡터이다.  $g_o(t)$ 와  $r_o(t)$ 는 각각 경계에서의 확산에 의한

질량 흐름률과 전체 질량 흐름률을 나타내는 함수이다.

본 연구에서는 식(2)에 SUPG법을 적용하여 2차원 수치모형을 구성하였다. 적용 영역 내에서 식(2)에 대해 가중잔차법을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \bar{w} \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (qC) - \nabla \cdot (D \nabla C) - Q(x, y, t) \right\} d\Omega = 0 \quad (7)$$

여기서  $\bar{w}$ 는 SUPG법에 의한 가중함수로서 기존의 Galerkin법에 의하면 가중함수를 형상함수와 같이 연속 함수를 사용하나  $\bar{w}$ 는 다음과 같이 연속함수와 불연속함수의 합으로 정의된다(Brooks와 Hughes, 1982).

$$\bar{w} = w + p \quad (8)$$

여기서  $w$ 는 선형 형상함수이며,  $p$ 는 상향가중(upwind weighting)을 위한 불연속 함수이다. 일반적으로  $w$ 는 격자망의 각 격자점에서 1의 값을 갖고 나머지 격자점에서는 0을 갖는 다음과 같은 형태를 지닌다.

$$w_i(x_j, y_j) = 1, \quad i = j \quad (9a)$$

$$w_i(x_j, y_j) = 0, \quad i \neq j \quad (9b)$$

$\bar{w} = w$ 로 정의할 경우 위의 과정은 Galerkin법에 의한 모형으로 전개된다. 불연속 함수  $p$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$p = \frac{\alpha}{|q|} (q \cdot \nabla w) \quad (10)$$

여기서  $\alpha$ 는 최적의 상향 가중을 위한 매개 상수이며 본 모형에서는 Raymond와 Garder(1976)의 결과에 따라 본 매개 상수를 처리하였다.

Green 정리를 적용하여 분산항에 포함된 2차 도함수를 1차 도함수로 전환하는 방식으로 식(7)을 적분하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\int_{\Omega} \bar{w}_i \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{w}_i (\nabla \cdot qC) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w_i (D \nabla C) d\Omega - \int_{\Gamma} w_i g_o \cdot n d\Gamma - \sum_{k \in S} \delta_{ik} M' \delta(t) = 0 \quad (11)$$

여기서  $M'$ 은 경우에 따라 선주입원인  $M/dw$ , 혹은 점주입원인  $M/d$ 을 나타내며,  $\delta_{ik}$ 는 cronecker delta로서 다음과 같이 정의된다.

$$\delta_{ik} = 1, \quad i = k \quad (12a)$$

$$\delta_{ik} = 0, \quad i \neq k \quad (12b)$$

$k$ 는 선원 상의 격자점 혹은 점원이 정의된 격자점의 집합  $S$ 에 속하는 격자번호이다. 식 (11)의 적분과정에서 공간적인 디랙델타함수는 소멸된다.  $C$ 를 선형 형상함수  $w$ 로 보간하여  $\sum w_j C_j$ 으로 근사하고 시간항에 대해서 Crank-Nicholson 차분법을 사용하여 최종적인 수치모형을 구성하였다. 이후의 자세한 수식화 과정은 이명근과 서일원(2007)에 서술되어 있다.

## 2.2 질량 오차 산정

순간 주입된 질량은 수치 모의를 통한 계산 과정을 거치면서 총 질량의 변화를 겪게 된다. 주입된 전체 질량이 계산과정에서 소실되지 않도록 하는 것은 질량의 순간 주입

모의의 정확성을 검증하는데 중요한 요소이다. 본 연구에서는 주입 질량과 계산 결과에 의한 총 질량 사이의 오차를 산정하기 위하여 다음과 같이 간단한 질량 오차 산정식을 유도하였다.

지배방정식인 식(2)는 이송과 분산에 의한 질량 흐름률(mass flux) 경사는 외부에서 유입되는 질량과 농도의 시간적 변화의 합과 평형을 이루고 있음을 나타낸다. 식(2)에서 생성항을 제외한 부분을 적용 영역  $\Omega$  내에 임의의 폐합된 공간  $V$ 에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot [(qC) - (D \cdot \nabla C)] dV = \int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV + \int_{\Gamma_V} [(qC) - (D \cdot \nabla C)] \cdot n d\Gamma_V \quad V \subset \Omega \quad (13)$$

이와 같이 질량 보존식을 공간에 적분한 식 (13)로부터 일정 영역 내에서 모형의 질량 보존률을 산정할 수 있다. 그러나 순간적으로 주입된 질량의 총량을 구하기 위해서는 농도  $C$ 에 대한 공간에 대한 적분만이 아닌 시간에 대한 적분이 필요하다. 따라서 일정 영역에서의 위의 식을  $[0, T]$  시간동안 적분하면 다음과 같다.

$$\int_V \int_0^T \frac{\partial C}{\partial t} dt dV + \int_0^T \int_{\Gamma_V} [qC - (D \cdot \nabla C)] \cdot n d\Gamma_V dt = \left[ \int_V C(T) dV - \int_V C(0) dV \right] + \int_0^T \int_{\Gamma_V} [qC - (D \cdot \nabla C)] \cdot n d\Gamma_V dt \quad (14)$$

여기서  $\Gamma_V$ 는 공간  $V$ 의 경계면이다. 식(14)와 같은 적분 과정을 식(2)의 우변에 함께 적용할 때 공간  $V$ 가 점원의 위치  $(x_k, y_k; k \in S)$ 를 포함한다고 가정하면, 시간과 공간에 대한 디랙 델타함수로 구성된 식(2)의 우변에는 순간 주입된 질량  $M'$ 이 남게 된다.

$$\int_V \int_0^T \sum_{k \in S} M' \delta(x - x_k, y - y_k) \delta(t) dt dV = M' \quad (15)$$

따라서 지배방정식 (2)으로부터 얻어진 일정 부피 내에서의 보존식의 시간과 공간에 대한 적분식은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\left[ \int_V C(T) dV - \int_V C(0) dV \right] + \int_0^T \int_{\Gamma_V} [(qC) - (D \cdot \nabla C)] \cdot n d\Gamma_V dt = \dot{M} \quad (16)$$

식(16)에서  $V$ 를  $\omega$ 전체로 확장하면 모의 영역 전체에서의 총 질량 산정 식으로 다음의 식이 유도된다.

$$\left[ \int_{\Omega} C(T) d\Omega - \int_{\Omega} C(0) dV \right] + \int_0^T \int_{\Gamma} [(qC) - (D \cdot \nabla C)] \cdot n (d\Gamma) dt = M' \quad (17)$$

일정한 지점에 일시적으로 질량이 주입되는 문제의 경우, 초기 농도조건  $C(0)$ 은 전체 영역에 대해서 0으로 둘 수가 있다. 또한 최종 모의시간  $T$ 를 주입된 질량이 모의 영역을 모두 빠져나가기에 충분히 긴 시간이라고 가정하면,  $C(T)$  역시 전체 영역에서 0으로 정의하는 것이 가능하다. 흐름이 유입되는 경계에서 모의 영역내로 흘러들어오는 농도가 0이라고 가정하면 유입경계(inflow boundary)  $\Gamma_i$ 에서의 질량흐름률은 무시할 수 있다. 마지막으로 분산에 의한 질량 흐름률  $(D \cdot \nabla C) \cdot n$ 은 오염원의 침투값이 경계를 지나는 전후로 농도경사가 양의 값에서 음의 값으로 바뀌에 따라 상쇄되

로, 여기서 발생하는 총 분산 흐름률의 시간에 따른 적분값은 0이 된다. 따라서 최종적으로 얻어지는 전체 영역에서의 질량 흐름률에 대한 시간 및 공간 적분값은 다음과 같은 등식으로 정의된다.

$$\int_0^T \int_{\Gamma_o} qC \cdot n d\Gamma dt = M' \quad (18)$$

위의 식은 모의 영역의 유출 경계(outflow boundary)  $\Gamma_o$ 에서의 이송에 의한 질량 흐름률을 시간에 대하여 적분한 값은 영역 내에 주입된 질량과 같음을 의미한다. 모형의 주입 질량 오차 검증은 위해서는 수치모의 결과에 따라 좌변의 질량 흐름률 적분값을 구하고 이를 주입된 질량값과 비교하여야 한다. 다음과 같은 근사식에 의하여 본 연구의 수치모의 결과를 통한 질량 흐름률 적분값 산정이 가능하다.

$$\int_0^T \int_{\Gamma_o} qC \cdot n d\Gamma_o dt = \sum_j \left[ \int_{\Gamma_o} (q_i \cdot n) C_{ij} w_i d\Gamma_o \right] \Delta t, \quad i \in BN_o, j = 1; m \quad (19)$$

여기서  $BN_o$ 은 유출경계  $\Gamma_o$ 에 속하는 격자점의 집합이며,  $m\Delta t = T$ 로서  $m$ 은 총 모의시간동안 시간간격의 계수이다. 본 연구에서는 위의 식을 질량의 사고유입에 대한 간단한 예제에 적용하여 본 연구의 수치모형 결과에 의해 유출되는 총 질량과 실제 주입된 질량 간의 오차를 검증하였다.

### 3. 모형의 적용

#### 3.1 단순직선수로에서 선원 주입

1차원 예제에서의 검증을 위하여 길이  $L$ , 폭  $w$ , 깊이  $d$ 를 가지는 단순 직선수로에서 선원(line source) 주입 문제를 가정하였다.  $x$ 방향으로 일정한 유속  $u$ 를 가지는 직선수로에서 단면  $x=0$ 의 선원으로 질량  $M/dw$ 이 순간 주입되었다고 가정한다. 이때  $x$ 방향으로의 1차원 해석하는 다음과 같이 쓸 수 있다(Fischer 등, 1979).

$$C(x, t) = \frac{M/dw}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4Dt}\right] \quad (20)$$

본 예제에서는  $L=100$  m,  $w=20$  m,  $d=1$  m를 가지는 직

선수로에서  $u=1$  m/s의 일정한 흐름을 가정하고  $M/dw=100$  kg/m의 선원을  $t=0$ 에 주입하는 것으로 가정하였다. 표 1은 본 예제 적용을 위한 44개의 모의 조건을 열거한 것이다. 격자 크기는  $\Delta y=1$  m로 고정하고  $\Delta x=2, 1, 0.5$  m로 변화시켰으며, 시간간격  $\Delta t$ 는 각 격자크기 조건에서 CFL 조건이 0.1에서 1 사이에서 변화도록 하였다. 확산계수  $D$ 는 Peclet 수가 0.5와 10 사이에서 변화도록 선택되었다.

본 연구에서 제안한 수치모형의 단순 직선하도에서 순간 주입된 선원에 대한 검증은 이명은과 서일원(2007)에 의해 보여진 바 있다. 본 연구에서는 이를 바탕으로 모형의 질량 오차를 기존의 Galerkin법에 의한 모형과 비교, 검토하였다. 이를 위해 식(18)을 이용하여 본 직선수로 예제에서의 질량 오차를 계산하였다. 본 예제에서 주입된 총 질량은  $(M/dw)dw=(100 \text{ kg/m}^2)(1 \text{ m} \cdot 20 \text{ m})=200 \text{ kg}$ 이다. 본 연구에서 제안한 모형과 비교 검토를 위하여 같은 모의 케이스에 대하여 기존의 Galerkin 기법을 이용한 모의를 수행하여 결과를 비교, 검토하였다. 이를 위해 유출경계를 따라 시간에 대해 질량 흐름률을 적분한 값을 초기 주입질량 2000 kg으로 나누어 이를 소수점 백분율로 소수점 둘째 자리까지 표시하였다. 표 2는 본 연구에서 수행한 SUPG 기법에 의한 모형의 모의 결과이며, 표 3은 Galerkin법에 의한 모의 결과이다. SUPG 기법에 의한 모의 결과는 모든 케이스에서 오염원이 유출경계를 모두 지나갈 때까지 오차 0.003% 내에서 주입 질량과의 오차를 보였다. 이는 무시할 만한 오차로서 SUPG 기법에 의한 직선수로에서의 선원 모의는 총 주입 질량을 수치 모의 결과상 재현해 내는 것으로 볼 수 있다. 그러나 표 3의 Galerkin 법에 의한 모의결과는 이와는 다른 양상을 보인다. L411~414 시리즈와 L521~523 시리즈에서 볼 수 있듯이 Galerkin 법에 의한 모의결과는 같은 조건에서 Peclet 수가 커질수록 Peclet 수가 작은 케이스들에 비해 상대적으로 주입된 질량을 재현해내지 못하는 결과를 보이며, 특히 격자크기가 가장 큰 L411~414 케이스에서 약 5%의 오차를 보이고 있다. 이는 이송이 지배적인 경우에 있어서 Galerkin법에 의해 발생하는 수치 진동의 영향이 해의 정확성을 감소함으로써 질량 오차 역시 증가시키기

표 1. 선오염원 예제 모의 케이스

$\Delta x$ (m)	$\Delta t$ (sec)	$D$ (m <sup>2</sup> /sec)						
		2	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025
2	2	L011	L111	L211	L311	L411		
	1	L012	L112	L212	L312	L412		
	0.5	L013	L113	L213	L313	L413		
	0.2	L014	L114	L214	L314	L414		
1	1		L121	L221	L321	L421	L521	
	0.5		L122	L222	L322	L422	L522	
	0.2		L123	L223	L323	L423	L523	
	0.1		L124	L224	L324	L424	L524	
0.5	0.5			L231	L331	L431	L531	L631
	0.4			L232	L332	L432	L532	L632
	0.2			L233	L333	L433	L533	L633
	0.1			L234	L334	L434	L534	L634

표 2. SUPG 전체 주입질량 대비 유출 질량오차

Case	Pe	Cr	질량오차 (%)	Case	Pe	Cr	질량오차 (%)	Case	Pe	Cr	질량오차 (%)
L011	0.5	1.0	100.000	L121	0.5	1.0	99.999	L231	0.5	1.0	99.999
L012		0.5	99.999	L122		0.5	100.000	L232		0.8	100.000
L013		0.25	100.001	L123		0.2	100.001	L233		0.4	100.001
L014		0.1	99.999	L124		0.1	100.003	L234		0.2	100.000
L111	1	1.0	100.000	L221	1	1.0	100.000	L331	1	1.0	100.000
L112		0.5	99.999	L222		0.5	100.001	L332		0.8	100.000
L113		0.25	99.999	L223		0.2	100.001	L333		0.4	100.001
L114		0.1	99.998	L224		0.1	99.997	L334		0.2	100.002
L211	2	1.0	100.000	L321	2	1.0	100.000	L431	2.5	1.0	100.001
L212		0.5	100.000	L322		0.5	100.000	L432		0.8	100.000
L213		0.25	99.999	L323		0.2	100.001	L433		0.4	100.000
L214		0.1	100.002	L324		0.1	99.998	L434		0.2	100.000
L311	4	1.0	100.000	L421	5	1.0	100.000	L531	5	1.0	100.000
L312		0.5	100.000	L422		0.5	100.000	L532		0.8	100.001
L313		0.25	100.000	L423		0.2	100.000	L533		0.4	99.998
L314		0.1	99.999	L424		0.1	99.999	L534		0.2	100.000
L411	10	1.0	100.000	L521	10	1.0	100.000	L631	10	1.0	100.000
L412		0.5	100.000	L522		0.5	100.001	L632		0.8	100.000
L413		0.25	100.000	L523		0.2	99.999	L633		0.4	99.998
L414		0.1	100.000	L524		0.1	100.002	L634		0.2	99.999

표 3. Galerkin 전체 주입질량 대비 유출 질량오차

Case	Pe	Cr	질량오차 (%)	Case	Pe	Cr	질량오차 (%)	Case	Pe	Cr	질량오차 (%)
L011	0.5	1.0	100.000	L121	0.5	1.0	100.000	L231	0.5	1.0	99.999
L012		0.5	100.000	L122		0.5	100.001	L232		0.8	100.000
L013		0.25	100.001	L123		0.2	100.003	L233		0.4	99.997
L014		0.1	100.001	L124		0.1	100.004	L234		0.2	99.999
L111	1	1.0	100.000	L221	1	1.0	99.999	L331	1	1.0	99.998
L112		0.5	99.999	L222		0.5	100.000	L332		0.8	100.000
L113		0.25	99.999	L223		0.2	100.000	L333		0.4	100.000
L114		0.1	100.001	L224		0.1	100.000	L334		0.2	100.001
L211	2	1.0	100.000	L321	2	1.0	100.000	L431	2.5	1.0	100.000
L212		0.5	100.000	L322		0.5	100.000	L432		0.8	100.000
L213		0.25	100.000	L323		0.2	100.000	L433		0.4	100.001
L214		0.1	99.999	L324		0.1	100.004	L434		0.2	100.001
L311	4	1.0	100.047	L421	5	1.0	100.000	L531	5	1.0	100.001
L312		0.5	100.047	L422		0.5	100.000	L532		0.8	100.000
L313		0.25	100.048	L423		0.2	100.000	L533		0.4	100.000
L314		0.1	100.046	L424		0.1	100.001	L534		0.2	99.999
L411	10	1.0	104.930	L521	10	1.0	99.757	L631	10	1.0	99.999
L412		0.5	104.929	L522		0.5	99.757	L632		0.8	99.999
L413		0.25	104.929	L523		0.2	99.758	L633		0.4	99.999
L414		0.1	104.928	L524		0.1	99.758	L634		0.2	100.000

때문이다. 반면 격자크기가 작은 L631~634 케이스에서는 같은 Pelet 수 10의 조건임에도 불구하고 질량 오차를 보이지 않고 있다. 이는 격자가 작아질수록 수치해가 해석해에

수렴하기 때문이며, 계산결과와 정확성과 질량 오차의 연관성을 반영하는 결과이다. 따라서 Galerkin 법에 의한 모의의 경우에도 큰 Pelet 수에 의해 발생하는 해의 주입 질량 오

표 4. 점오염원 예제 모의 케이스

확산계수 (m <sup>2</sup> /s)		$\theta$ (°)	Case	확산계수 (m <sup>2</sup> /s)		$\theta$ (°)	Case
$D_L$	$D_T$			$D_L$	$D_T$		
0.05	0.01	15	P11	0.01	0.002	15	P21
		30	P12			30	P22
		45	P13			45	P23

차는 격자크기를 줄여서 극복 할 수 있을 것으로 판단된다.

### 3.2 흐름 방향이 바뀌는 2차원 영역에서 점원 주입

2차원 순간 점오염원에 대한 검증에 위하여 그림 1과 같이  $\theta$ 의 일방향 흐름을 갖는 가로, 세로 각각 10 m, 깊이 1 m의 정사각형 영역에서  $(x, y)=(2, 2)$ m 지점에  $M/d=1000$  kg/m의 질량을 주입하는 문제를 가정하였다. 격자망은  $20 \times 20$ 의 정사각형 격자로서  $\Delta x$ 와  $\Delta y$  각각 0.5 m의 크기를 가지며, 유속은 전체 영역에서  $u=0.1$  m/s의 크기와 방향  $\theta$ 를 갖는 것으로 하였다. Courant 수가 1을 넘지 않도록  $\Delta t$ 는 1 sec로 두었으며, 종·횡확산 계수는 각각 ( $D_L, D_T$ )=(0.05, 0.01) m<sup>2</sup>/s와 (0.01, 0.002) m<sup>2</sup>/s을 갖는 두 가지 케이스로 모의하였다. 격자 정렬방향에 대한 유속 방향이 질량 오차에 미치는 영향을 알아보기 위하여  $\theta$ 를 15°, 30°, 45°로 변화하였다. 이는 Hugh와 Brooks(1979)에 의해 SUPG 기법 사용에 있어서 유속방향과 격자 방향의 차이로 인한 수치적인 횡방향 확산의 정도를 알아보기 위한 검증 방법으로 사용된 바 있다. 그림 1에서  $\Gamma_1, \Gamma_2$ 는 유입 경계로서 유입농도가 0임을 표시하고 있으며,  $\Gamma_3, \Gamma_4$ 는 유출경계로서 농도경사가 0, 즉  $\nabla C \cdot n_b = 0$ 임을 가정하였다. 질량 보존을 계산에 위한 질량 흐름률의 적분은  $\Gamma_3, \Gamma_4$ 를 걸쳐 이루어졌다. 본 예제에 적용된 모의 케이스들을 표 4에 수록하였다.

2차원 공간에서  $t=0$ 에  $M/d$ 의 질량이  $(x_0, y_0)$ 의 위치에 주입될 경우 해석해는 다음과 같이 쓸 수 있다(Fischer 등, 1979).

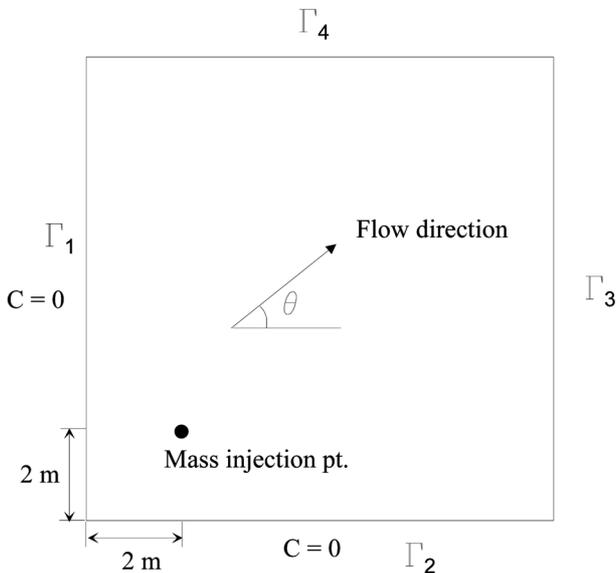


그림 1. 2차원 점원 주입 예제

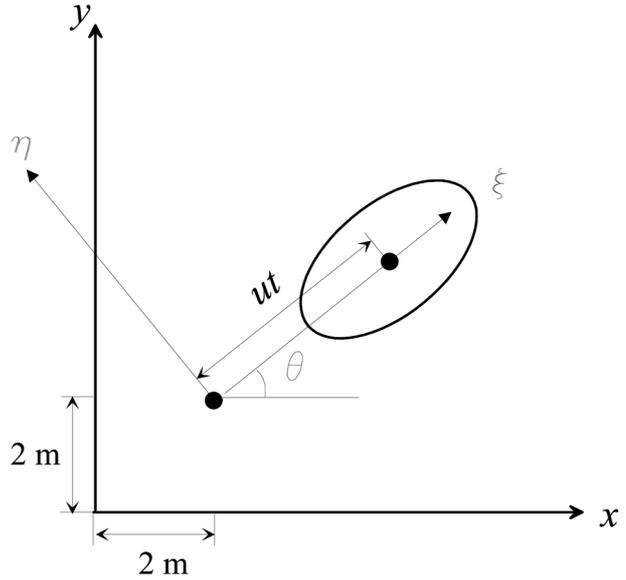


그림 2. 점원 주입 해석해의 좌표계

$$C(\xi, \eta, t) = \frac{(M/d)}{4\pi\sqrt{D_L D_T}} \exp\left[-\frac{(\xi-ut)^2}{4D_L t} - \frac{\eta^2}{4D_T t}\right] \quad (21)$$

여기서  $(\xi, \eta)$ 는 각각 흐름방향과 흐름에 수직하는 방향을 따르는 좌표계이며 그림 2에 표시한 바와 같다. 그림 2에 따라 위의 해석해를  $(x, y)$  좌표계로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$C(x, y, t) = \frac{(M/d)}{4\pi\sqrt{D_L D_T}} \exp\left[-\frac{[(x-2)\cos\theta + (y-2)\sin\theta - ut]^2}{4D_L t}\right] \cdot \exp\left[-\frac{[-(x-2)\sin\theta + (y-2)\cos\theta]^2}{4D_T t}\right] \quad (22)$$

본 연구에서 제시한 모형을 검증하기 위하여  $\theta=30^\circ$ 인 케이스(Case P12, P22)에 대하여 해석해인 식 (21)과 수치해석 결과를 그림 3과 4의 콘투어와 같이 30초와 50초의 결과를 각각 비교하였다. P12의 경우 수치해가 해석해를 잘 따르고 있음을 보이고 있으며, P22의 경우 수치해가 해석해보다 좀더 확산된 양상을 보이고 있다. 이는 확산계수가 작은 P22의 경우 확산계수가 큰 경우보다 수치적인 확산이 해에 미치는 영향이 크게 나타나기 때문인 것으로 사료된다. 이러한 수치적인 확산은 Peclet 수가 큰 경우에 일어나는 수치모의 결과에 있어서의 과도한 해의 진동을 저감시킬 수 있을 것으로 판단된다.

표 4의 모의 케이스를 P22에 대해 SUPG법에 의한 모의 결과를 Galerkin법에 의한 모의 결과와 비교하여 그림 5에 도시하였다. 그림 5에서 알 수 있는 것은 Galerkin법의 경우 과도한 해의 진동이 발생하고 있다는 점인데 이는 해의 정확성을 떨어뜨리며 이에 따라 주입 질량 오차를 늘리는 결과를 초래하는 것으로 밝혀졌다. SUPG법에 의한 결과와 Galerkin 법에 의한 결과의 질량 오차를 계산하여, 계산 결과를 표 5에 수록하였다. 표 5의 결과에 따르면 확산계수가 큰 P11에서 P13의 경우 Galerkin법에 의한 모의와 SUPG법에 의한 모의 결과 모두 3% 내에서의 질량 오차를 보여 주고 있으나 확산계수가 작은 P21에서 P23 케이스의 경우 SUPG 법에 의한 결과는 P11~13의 결과와 차이가 없는데 비해 Galerkin 법에 의한 결과는 10%이상의 큰 질량 오차

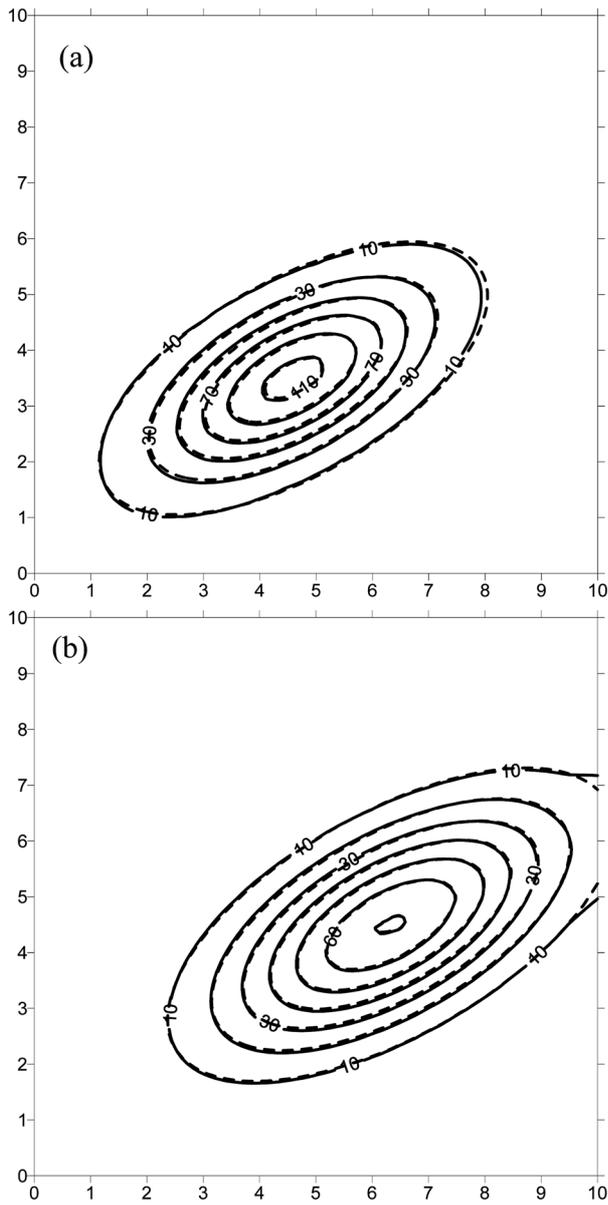


그림 3. 점원 주입예제 Case P12의 모의결과,  $(D_L, D_T)=(0.05, 0.01) \text{ m}^2/\text{s}$ ; (a)  $t=30 \text{ s}$ ; (b)  $t=50 \text{ s}$  (실선: 수치해, 점선: 해석해, 단위: ppm)

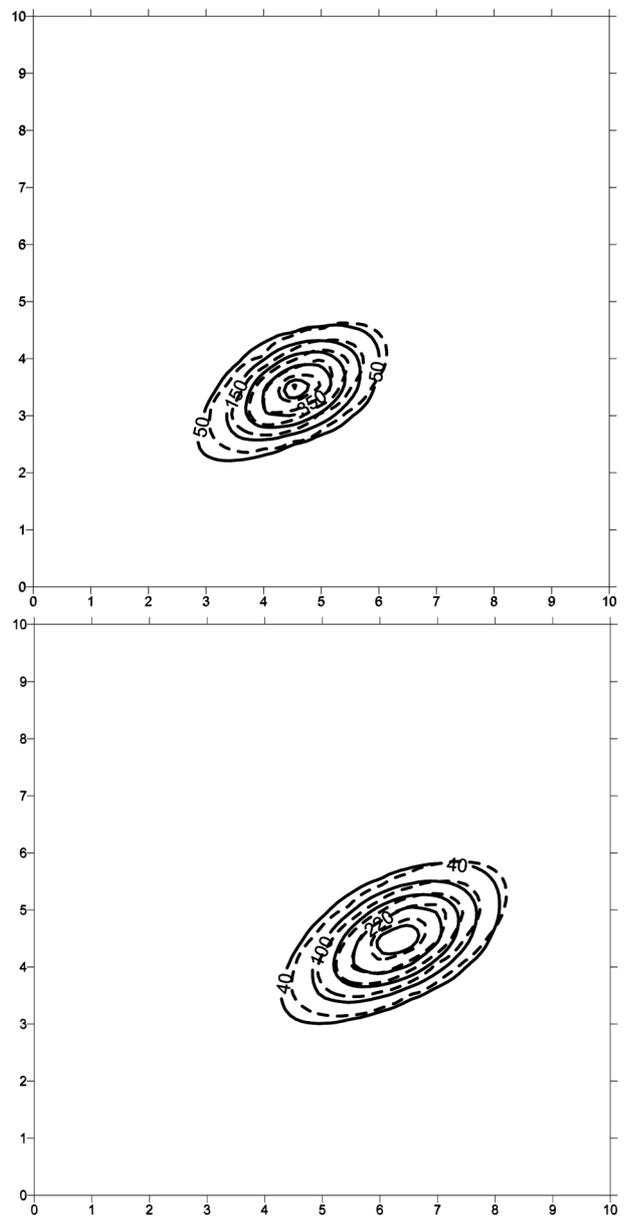


그림 4. 점원 주입예제 Case P22의 모의결과,  $(D_L, D_T)=(0.01, 0.002) \text{ m}^2/\text{s}$ ; (a)  $t=30 \text{ s}$ ; (b)  $t=50 \text{ s}$  (실선: 수치해, 점선: 해석해, 단위: ppm)

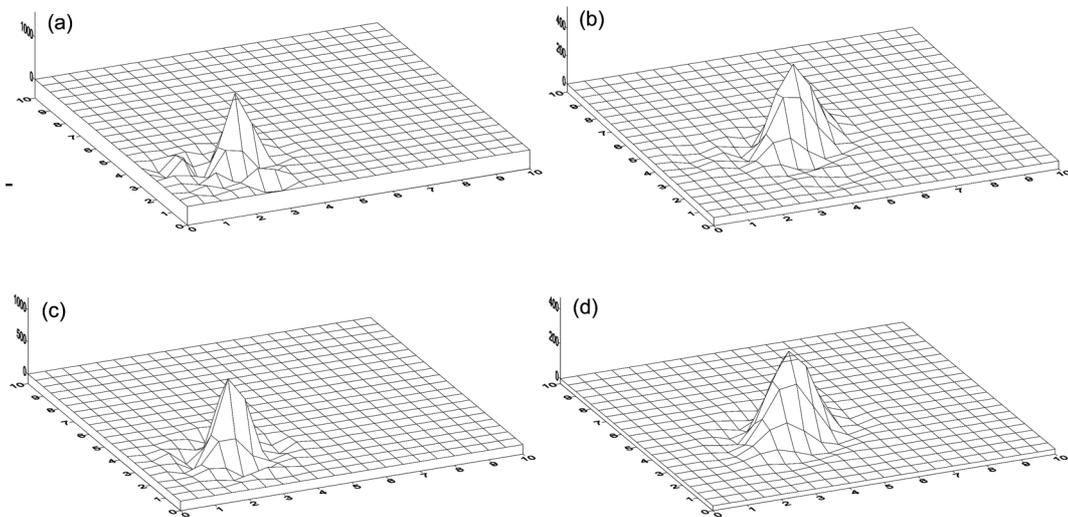


그림 5. SUPG법과 Galerkin법에 의한 모의결과 비교,  $(D_L, D_T)=(0.01, 0.002) \text{ m}^2/\text{s}$ ; (a) Galerkin,  $t=30 \text{ s}$ ; (b) Galerkin,  $t=50 \text{ s}$ ; (c) SUPG,  $t=30 \text{ s}$ ; (d) SUPG,  $t=50 \text{ s}$  (단위: ppm)

표 5. 2차원 점오염원 예제에서의 주입질량 대비 유출 질량

수치기법	확산계수 (m <sup>2</sup> /s)		Case	질량흐름물의 시간 적분값			질량오차 (%)
	D <sub>L</sub>	D <sub>T</sub>		Γ <sub>3</sub>	Γ <sub>4</sub>	sum	
SUPG	0.05	0.01	P11	977.33	0.08	977.41	97.741
			P12	962.48	23.67	986.15	98.615
			P13	493.88	493.88	987.76	98.776
	0.01	0.002	P21	986.79	0.00	986.79	98.679
			P22	993.71	0.18	993.89	99.389
			P23	499.62	499.62	999.23	99.923
Galerkin	0.05	0.01	P11	981.29	0.08	981.37	98.137
			P12	967.10	23.69	990.78	99.078
			P13	496.62	496.62	993.25	99.325
	0.01	0.002	P21	929.85	0.00	929.85	92.985
			P22	892.34	0.53	892.88	89.288
			P23	445.09	445.08	890.17	89.017

를 보여준다. 즉 Galerkin법에 의한 계산 결과는 직선수로에서 선원 예제에서와 마찬가지로 큰 Peclet 수를 가지는 조건에서 주입된 질량을 보존하지 못하는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 그림 5에서 볼 수 있듯이 Galerkin 법에 의한 결과에서 보이는 과도한 해의 진동에 의해 야기된 해의 부정확성으로부터 발생한 것으로 볼 수 있다.

표 5에서 보면 SUPG 기법에 의한 결과의 경우, Peclet 수가 상대적으로 큰 P21~23 케이스의 경우가 보다 나은 질량 보존률을 보인다. 이는 Peclet수가 큰 경우 수치해석상 일어날 수 있는 수치 진동이 줄어들어 보다 정확한 해를 얻을 수 있으며 질량의 오차 또한 줄어드는 결과를 가져오는 것으로 설명된다. 표 5에서는 또한 격자망 정렬 방향에 대해 흐름의 입사각이 45°에 가까울수록 보다 정확한 질량 보존률을 보임을 알 수 있다. 이는 Brooks와 Hughes(1982)가 보인 바와 같이, 45°에 가까울수록 upwind기법의 적용에 의하여 발생하는 흐름에 대한 횡방향으로의 부가적인 수치적 확산이 줄어들어 해의 정확성을 보다 높이기 때문이다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 오염물질의 순간 유입시 SUPG법으로 구성된 유한요소 모형의 주입 질량과 유출되는 질량 간 오차의 산정을 수행하였다. 질량 오차 산정을 위한 산정식을 지배방정식으로부터 유도하였으며 이를 모형에 의한 수치해석 결과로부터 계산해내는 방법을 제시하였다. 모형의 질량 오차 산정을 위한 1차원 선원 주입문제와 2차원 점원 주입문제를 가정하였다. 각 예제는 해석해와의 비교를 위하여 등질의 유속을 가정하였으며, 2차원 예제의 경우 유속의 방향을 변화시키며 검증을 수행하였다. SUPG법에 의한 모형이 수치해의 질량 보존률에 끼치는 영향을 알아보기 위하여 같은 모의조건 하에서 기존의 Galerkin법에 의한 모형을 함께 적용, 비교하였다.

검증결과 1차원 해석해와 비교한 선원 순간주입 예제에서는 SUPG법에 의한 결과는 모든 케이스에서 오염원이 유출 경계를 모두 지나갈 때까지 0.003% 내의 질량 오차 산정

결과를 보였다. 그러나 Galerkin법에 의한 모의결과는 Peclet 수가 커질수록 Peclet 수가 작은 케이스들에 비해 상대적으로 주입질량을 보존하지 못하는 결과를 보였다(L411~414, L521~523 시리즈). 특히 격자크기가 가장 큰 L411~414 케이스에서 약 5%의 오차를 보이는 것으로 보아 이송이 지배적인 경우에 있어서 Galerkin법에 의한 해에 발생하는 진동의 영향이 해의 질량 오차에도 영향을 미치고 있음을 알 수 있었다. 반면 격자크기가 작은 L631~634 케이스에서는 같은 Peclet 수 10의 조건임에도 불구하고 질량 오차를 보이지 않고 있어, 격자의 크기를 줄일 경우 Galerkin 법에 의한 모의의 경우에도 큰 Peclet 수에 의해 발생하는 해의 주입질량 오차를 줄일 수 있음을 알 수 있었다.

2차원 점주입 문제의 모의 결과로  $\theta=30^\circ$  케이스(Case P12, P22)에 대하여 해석해와 SUPG법에 의한 수치해석 결과를 비교한 결과 Peclet수가 큰 P12의 경우 수치해가 해석해와 잘 일치하고 있음을 보였다. P22의 경우 수치해가 해석해보다 좀 더 확산된 양상을 보였는데, 이는 Peclet수가 큰 경우 상향 가중에 의한 수치적인 확산이 해에 미치는 영향이 크게 나타나기 때문으로 풀이된다. 유속장 방향과 격자 정렬 방향이 이루는 각도에 있어서는 Brooks와 Hughes(1982)가 SUPG 기법의 경우 45°에 가까울수록 정확한 해를 산출해 냄을 보인 바와 같이, 본 연구의 결과에서도 45° 케이스(P13)에서 가장 낮은 주입 질량 오차를 얻을 수 있었다.

SUPG법에 의한 결과와 Galerkin 법에 의한 결과의 질량 오차 비교 결과, Peclet 수가 상대적으로 작은 P11에서 P13의 경우 Galerkin법에 의한 모의와 SUPG법에 의한 모의 결과 모두 3% 오차 내에서 주입질량을 보존하는 계산 결과를 보여주고 있으나, Peclet수가 큰 경우인 P21에서 P23 케이스에서는 Galerkin 법에 의한 경우 과도한 해의 진동에 의해 야기된 해의 부정확성으로 인해 10%이상의 큰 질량 손실을 나타내었다. 또한 이와 같은 연구의 결과를 통하여 기존의 Galerkin법에 의한 모의 결과에 비하여 SUPG법을 통한 수치모형의 구성이 모의의 정확성뿐만 아니라 주입 질량의 보존에 있어서도 보다 실효성 있는 방법임을 확인하였다.

## 감사의 글

본 연구는 교육인적자원부 BK21사업(서울대학교 사회기반 건설 사업단)과 21세기 프론티어연구개발사업 수자원의 지속적인 확보기술개발 사업단의 연구비 지원(과제명: RAMS 적용)과 서울대학교 공학연구소의 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- 서승원(2000) 유한요소 동수역학 모형에서의 질량보존 평가. **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제20권, 제2B호, pp. 305-315.
- 이명은, 서일원(2007) 하천 오염확산 수치해석에서 생성항을 이용한 순간주입 모의. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제27권, 제1B호, pp. 1-8.
- 이정규, 김광기(2002) 2차원 수치모형을 이용한 오염물질의 거동 해석. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제22권, 제5-B호, pp. 639-648.
- 이정규, 김주영(2000) 2차원 이송-확산방정식의 수치모형. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제20권, 제3-B호, pp. 351-360.
- Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. (1982) Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 199-259.
- Bellasio, R. and Bianconi, R. (2005) On line simulation system for industrial accidents, *Environ. Model. Software*, Vol. 20, pp. 329-342.
- Bianconi, R. and Tamponi, M. (1993) A mathematical model of diffusion from a steady source of short duration in a finite mixing layer, *Atmospheric Environ.* Vol. 27A, pp. 781-792.
- Chen, C., Liu, H., and Beardsley, R.C. (2003) An unstructured, finite volume, three-dimensional, primitive equation ocean model: application to coastal and estuaries, *J. Atm. & Oceanic Tech.*, Vol. 20, pp. 159-186.
- Fischer, H.B., List, J.E., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N. H. (1979) *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press.
- Kolar, R.J., Gray, W.G., and Westerink, J.J. (1996) Boundary conditions in shallow water models: An alternative implementation for finite element codes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 22, pp. 603-618.
- Lee, M.E. and Seo, I.W. (2007) Analysis of Pollutant Transport in the Han River with Tidal Current Using a 2D Finite Element Model, *J. of Hydro-environment Research*, Int. Asso. for Hydraulic Research, Vol. 1, No. 1, pp. 30-42.
- Lynch, D.R. (1984). Mass conservation in finite element groundwater models, *Adv. Water Resour.*, Vol. 7, pp. 68-75.
- Oliveira, A. and Baptista, A. (1998) On the tracking on Eulerian-Lagrangian solutions of the transport equation, *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 126, No. 8, pp. 605-614.
- Oliveira, A., Fortunato, A.B., and Baptista, A. (2000) Mass balance in Eulerian-Lagrangian transport simulation in estuaries, *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 126, No. 8, pp. 605-614.
- Raymond, W.H. and Garder, A. (1976) Selective damping in a Galerkin method for solving wave problems with variable grids, *Monthly Weather Rev.*, Vol. 104, pp. 1585-1590.
- Tixier, J., Dusserre, G., Rault-Doumax, S., Ollivier, J., and Bourelly, C. (2002) ORISIS software for the consequence evaluation of transportation of dangerous goods accidents, *Environ. Model. Software*, Vol. 17, pp. 627-637.
- Yeh, G.-T. (1981) On the computation of Darcian velocity and mass balance in the finite element modeling of groundwater flow, *Water Resour. Res.* Vol. 1, No. 5, pp. 1529-1534.

(접수일: 2008.3.7/심사일: 2008.4.11/심사완료일: 2008.8.19)