

ρ -수렴 적층 평판이론에 의한 균열판의 팻취보강후 응력확대계수 산정

Stress Intensity Factor of Cracked Plates with Bonded Composite Patch by p -Convergence Based Laminated Plate Theory

우광성* · 한상현** · 양승호***

Woo, Kwang-Sung · Han, Sang-Hyun · Yang, Seung-Ho

Abstract

The enhancement of the service life of damaged or cracked structures is a major issue for researchers and engineers. The hierarchic void element based on the integrals of Legendre polynomials is used to characterize the fracture behaviour of unpatched crack as well as repaired crack with bonded composite patches by computing the stress intensity factors and stress contours at the crack tip. Since the equivalent single layer approach is adopted in this study, the proposed element is necessary to represent a discontinuous crack part as a continuum body with zero stiffness. Thus the aspect ratio of this element to represent the crack should be extremely slender. The sensitivity of numerical solution with respect to energy release rate, displacement and stress has been tested to show the robustness of zero stiffness element as the aspect ratio is increased up to 2000. The stiffness derivative method and displacement extrapolation method have been applied to calculate the stress intensity factors of Mode I problem. It is noted that the proposed hierarchical void element can be one of alternatives to analyze the patched crack problems.

Keywords : *hierarchic void element, patched crack, equivalent single layer theory, stiffness derivative method, displacement extrapolation method*

요 지

손상 또는 균열된 구조물의 내구성을 향상시키려는 과제는 연구자들과 엔지니어들에게 중요한 과제로 떠오르고 있다. 팻취로 보강되지 않은 균열판과 팻취보강된 균열판의 응력확대계수 및 응력등고선의 산정 및 비교에 의한 균열선단에서의 파괴 거동의 특성을 적분형 르장드르 다항식에 기초를 둔 계층적 무강성요소를 사용하여 표현하고자 한다. 이 연구에서는 등가단층이론이 채택되므로, 제안된 무강성요소는 붙연속 균열부를 강성이 0인 연속체로 간주된다. 그러므로 균열을 모델링하는 무강성요소의 변장비는 매우 커질 수밖에 없다. 제안된 요소의 강건성을 보이기 위해 형상비 변화에 따른 에너지방출률, 변위 및 응력값에 대한 유한요소해의 민감도는 변장비를 2000까지 증가시켜 가면서 평가되었다. 한편, 강성도미분법과 변위의삽입이 인장모우드가 발생하는 문제의 응력확대계수를 예측하는데 사용된다. 제안된 계층적 무강성요소는 팻취보강된 균열문제를 해석할 수 있는 대안중의 하나라 평가된다.

핵심용어 : 계층적 무강성요소, 팻취보강 균열, 등가단층평판이론, 강성도미분법, 변위의삽입

1. 서 론

구조물은 노후화되면서 필연적으로 부식, 피로, 릴렉세이션, 국부적 좌굴 및 과다변형 등으로 인해 내구력이 현저히 떨어지는 현상을 보이게 된다. 공용중의 손상(service life damage)을 받고 있거나 설계기준을 만족치 못하는 구조물에 대한 보강설계, 해석 및 시공법은 많은 기술자의 관심을 끌고 있다. 특히, 본 연구에서 관심을 갖는 균열부에 대한 보강기법은 주로 단순해석, 실험 및 경험에 의존하여 온 것

사실이다. 그러나 컴퓨터 연산능력의 발전과 정밀한 해석기법을 통해 보강의 효율성과 내하력 증가 등을 보다 정밀하고 이론적으로 분석할 수 있게 되었다.

건설분야에서 내구성을 증진시키기 위한 방안중의 하나로 균열부의 FRP 등에 의한 팻취보강이 사용되어 왔으며 주로 실험적 방법에 의존하여 온 것이 사실이다. 본 연구에서는 유한요소법을 사용한 수치해석적 방법을 모색하고자 하는 것이다. 균열이 있는 모재의 거동과 균열을 갖는 모재에 대해 팻취보강 후의 보강효과에 대한 유한요소해석을 수행하려면

*정회원 · 교신저자 · 영남대학교 건설시스템공학과 교수 (E-mail : kswoo@yu.ac.kr)

**롯데건설(주) 토목공사팀 · 공학석사 (E-mail : shhan@lottenc.com)

***영남대학교 건설시스템공학과 석사과정 (E-mail : enterag@nate.com)

기존의 고체요소를 이용하여 모델링 할 경우 무수히 많은 요소분할을 필요로 한다(Ellyin, 2007). 다시 말하면 모재뿐만 아니라 얇은 패취까지를 3차원 요소로 모델링해야 하기 때문에 요소의 변장비(aspect ratio)를 감안할 때 수천 개에서 심지어 수만 개의 요소를 필요로 한다.

3차원 요소로 모델링 하는 대신 해석의 효율성을 위하고 요소의 개수를 줄이는 방안중의 하나는 적층모델(layer model)이라 할 수 있다. 평판이나 셸의 층 또는 두께방향으로 새로운 변위장을 정의하는 방식인 층별이론(layerwise theory)이 있으나, 본 연구에서는 유한요소 정식화가 간단한 등가단층평판이론(equivalent single layer theory)이 사용되어, 두께방향으로의 몇 개의 층으로 분할한 후 각각의 재료물성치와 섬유 방향에 따른 이방성(anisotropy)을 고려할 수 있게 하였다(Reddy 1997). 층마다 계산되는 강성도 매트릭스를 조합하여 하나의 적층요소를 구성하게 된다. 여기서, 문제가 되는 것은 관통균열(through-crack)의 경우 균열부주위에 패취 보강을 하게 되면 균열부는 불연속 빈공간(void)이나 균열부에 보강된 패취부분은 연속체로 유한요소모델을 해야 한다. 따라서, 등가단층이론을 사용하는 적층모델의 경우 균열이 있는 두께방향으로는 패취부분은 재료물성치를 갖는 정상적인 층이 되는 반면 균열부는 재료물성치가 0인 무강성요소(void element)가 된다. 이를 모두 더한 것이 균열부에 패취보강된 하나의 적층요소가 된다. 그러나 균열부는 가느다란 금으로 이를 사각형요소로 모델링할 경우 가로와 세로에 대한 변장비는 수백 대 일에서 수천 대 일로 가정할 수 있다. 이 문제는 Robinson 교수가 일반적으로 사각형요소의 변장비가 1:7을 넘으면 변위값에, 1:5를 넘을 경우는 응력값에 많은 오차를 가져오는 것으로 밝힌 바가 있다(Robinson, 1976). 그러나 Woo(1993)의 연구에 의하면 적분형 르장드르 다항식을 사용한 고차의 사각형요소($p=8$)의 경우 변위는 1:4000까지 유효한 것으로 밝힌 바 있다. 물론, 구조문제가 어떠한 기하형상과 하중을 받느냐에 따라 달라질 수는 있지만 매우 큰 변장비에 대한 강건성(robustness)을 확보한다고 할 수 있다.

본 연구에서는 패취보강전의 인장력을 받는 관통균열 문제의 응력확대계수를 산정하였다. 이 때 무강성요소를 사용하기 위해 요소의 변장비는 1:2000까지 사용된 적층모델을 구축하였다. 이 해석법의 타당성을 보인 후 패취보강 균열판의 응력확대계수의 변화 및 균열선단부의 응력분포를 예측하여 기존의 연구자와의 비교를 통해 해의 정확도를 보이고자 한다. 응력확대계수를 계산하기 위해 기존의 에너지방출률법(energy release rate method)을 수정한 Park(1974)의 강성도미분법(stiffness derivative method)과 다른 방법으로 변위 외삽법(displacement extrapolation method)이 적용되었다.

2. 계층적 무강성요소의 정식화

2.1 퇴화 셸요소(Degenerate Shell Element)

Ahmad(1970)에 의하면 퇴화 셸요소는 3차원 연속체역학의 방정식으로부터 유도된다. 즉, 3차원 응력과 변형률의 조건들이 중립면에서의 쉘거동으로 표현될 수 있도록 적절한 가정을 통해 2차원화 된다. 이 가정들은 세 가지로 요약된다. 첫째로, 변형전 중립면에 수직인 선은 변형후에도 직선

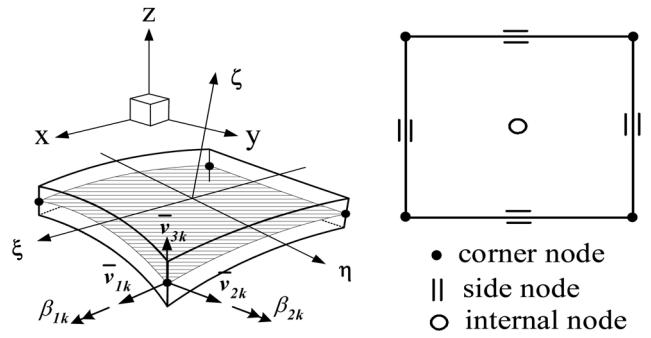


그림 1. 5-자유도를 갖는 퇴화 셸요소의 좌표계 및 계층적 요소의 절점구성

을 유지하나 수직일 필요는 없다. 둘째로, 중립면에 수직인 응력은 무시한다. 마지막으로, 전단변형률(transverse shear strains)은 두께에 걸쳐 일정하게 분포한다고 가정한다. 또한, 두께방향의 변형은 없는 것으로 본다. 첫번째 가정에 의한 절점당 자유도는 5자유도가 되며 임의의 절점 k 에서 3개의 중립면 직선변위($u_k^{mid}, v_k^{mid}, w_k^{mid}$)와 2개의 회전변위(β_{1k}, β_{2k})로 구분할 수 있다. 한편, 기하형상을 표현하기 위해 그림 1에 나타난 좌표계가 사용되는데 다음과 같이 정의할 수 있다(Woo 2004, 홍 2002). 여기서, x_{ik}^{mid} 는 중립면에서의 좌표값을 나타낸다.

$$x_i = \sum_{k=1}^{N_c} \psi_k x_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^{N_c} \psi_k \frac{h_k}{2} \xi \bar{v}_{3k}^{-i} \quad (1)$$

한편, 변위장은 회전변위(β_{1k}, β_{2k})로 부터 영향을 받는 직선변위 성분을 고려하여 식(2)와 같이 나타낸다.

$$u_i = \sum_{k=1}^{N_p} \psi_k u_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^{N_p} \psi_k \zeta \frac{h_k}{2} [\bar{v}_{1k}, -\bar{v}_{2k}] \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, i 는 전체좌표계의 x, y, z 를 의미하며, u_{ik}^{mid} 와 $[\beta_{1k}, \beta_{2k}]$ 는 임의의 k 절점 중립면에서의 직선변위 벡터와 회전변위 벡터, h_k 는 k 절점에서의 셸의 두께, ψ_k 는 적분형 Legendre 형상함수, \bar{v}_{3k}^i 는 절점에서의 상하 좌표점을 이용하여 설정된 수직벡터로서 전체 좌표계를 기준으로 나타낸 단위벡터 성분이다. $[\bar{v}_{1k}, -\bar{v}_{2k}]$ 는 절점에서 정의되는 절점좌표계(nodal coordinate)방향으로의 단위벡터이다. ξ, η, ζ 는 형상함수가 정의되는 정규좌표계를 의미하며, 정규영역에서 모든 강성도매트릭스와 하중벡터가 계산된다. N_c 는 모서리절점(corner node)의 개수로 4가 되며, N_p 는 형상함수의 차수 p 에 따른 요소내의 전체 절점수이다. 따라서, 저매개변수 요소(subparametric element)가 되며 $N_c \neq N_p$ 가 되는데 N_p 의 절점수는 모서리절점(corner nodes), 주변절점(side nodes), 그리고 내부절점(internal nodes)의 합으로 정의된다. 그러므로 주어진 절점 k 에서 전체변위 u, v, w 에 대한 기여는 식(3)과 같이 매트릭스형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_k & 0 & 0 & \psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k}^x & -\psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k}^x \\ 0 & \psi_k & 0 & \psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k}^y & -\psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k}^y \\ 0 & 0 & \psi_k & \psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k}^z & -\psi_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1k} \\ v_{1k} \\ w_{1k} \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ψ_k 는 퇴화 평판요소의 형상함수이며, 정규영역에서의 적분형 Legendre 함수로 식(4)과 같이 나타낸다.

$$\psi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(s) ds \quad (4)$$

여기서,

$$P_i(s) = \frac{1}{2^i} \frac{d^i}{ds^i} (s^2-1)^i, i=0,1,2, \dots \quad (5)$$

따라서 정규영역 $-1 \leq \xi \leq 1$ 과 $-1 \leq \eta \leq 1$ 에서의 Legendre 함수를 이용하여 2차원 p -version 형상함수가 유도된다.

2.2 적층모델(Layer Model)

등가단층평판이론(Equivalent Single Layer Theory; ESLT)은 다층의 적층 평판을 하나의 단층 평판으로 바꾸어 해석하는 것으로 적층평판의 전체의 변위나 응력해석은 가능하나 적층간의 변위 및 응력의 해석은 부정확하다. 대개 면내 변위를 두께방향에 따라 선형분포로 가정하느냐 비선형 분포로 가정하느냐에 따라 1차 혹은 고차 전단변형이론이 된다. 고차전단변형이론에서는 가정된 변위계의 미지 변수를 줄이기 위해 단순화법을 많이 사용한다.

예를 들면, semi-inverse method로 두께방향의 전단응력을 가정함으로 가능하게 하는 방법이다. 즉 비선형 면내변위를 구성방정식과의 관계를 이용하여 사용하거나 변위와 전단응력의 혼합된 변분이론을 이용하여 적층 평판의 지배 방정식을 구할 수 있다. 또한 다른 방법으로는 적층 평판의 상단면과 하단면의 전단응력 및 변형도의 조건을 도입하여 가정한 변위계를 단순화 할 수 있다. 그 외 많은 방법이 소개되어 있지만 유한요소 정식화의 단순화를 위해 본 연구에서는 1차 전단변형이론을 채택하였다.

1차 전단변형이론에 기초를 둔 ESLT에 의해 모델화 된 적층 평판의 해석은 간단하고 계산 효과도 크기 때문에 얇은 적층이나 많이 두껍지 않은(moderately thick) 적층평판의 해석에 많이 사용된다. 특히 적층평판의 전체 처짐이나 응력, 일계좌굴하중 및 기본 진동 주기 및 모드형상에는 좋은 해석결과를 준다. 그러나 두께가 두꺼워짐에 따라 해석결과와 정확도는 떨어지며 적층간의 응력해석에는 정확한 값을 줄 수 없다.

그림 2와 같이 평판의 두께는 여러 개의 층으로 나뉘는데, 각 층마다 계산된 응력성분으로부터 적층평판에서 발생

되는 면내력(membrane forces), 휨모멘트, 전단력은 식 (6)~식 (8)와 같이 계산된다(Hinton 1984, Reddy 1997).

$$[N_x, N_y, N_{xy}] = \int_{h/2}^{-h/2} [\sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}] dz \quad (6)$$

$$[M_x, M_y, M_{xy}] = \int_{h/2}^{-h/2} [\sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}] z dz \quad (7)$$

$$[Q_x, Q_y] = \int_{h/2}^{-h/2} [\tau_{xz}^{(j)}, \tau_{yz}^{(j)}] dz \quad (8)$$

한편, j 번째 층의 응력텐서는 식 (9)와 같이 계산된다.

$$\bar{\sigma}^{(j)} = \underline{D} \underline{\varepsilon}^{(j)} \quad (9)$$

\underline{D} 는 섬유배치방향(fiber orientation)을 고려한 탄성매트릭스이며, 1과 2는 섬유의 배치방향을 기준으로 한 재료좌표계(material coordinate)이다.

$$\underline{D} = T^T D T \quad (10)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, $D_1=E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$, $D_2=E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$, $D_{12}=E_2\nu_{12}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$, $D_3=G_{12}$, $D_4=K_1 \times G_{13}$, $D_5=K_2 \times G_{23}$, 그리고 $[E_1, E_2]$, $[G_{12}, G_{13}, G_{23}]$, $[K_1, K_2]$ 는 탄성계수, 전단탄성계수, 전단보정계수(shear correction factor)이다. 또한, θ 는 섬유의 배치방향에 따른 재료좌표계 1, 2와 전체좌표계 x, y 와 이루는 사이각이고, 이를 고려한 좌표변환 매트릭스 T 는 식 (12)와 같다.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.3 계층적 무강성요소(Hierarchical Void Element)의 개념

계층적 무강성요소란 요소의 재료 물성치가 0인 무강성 요소

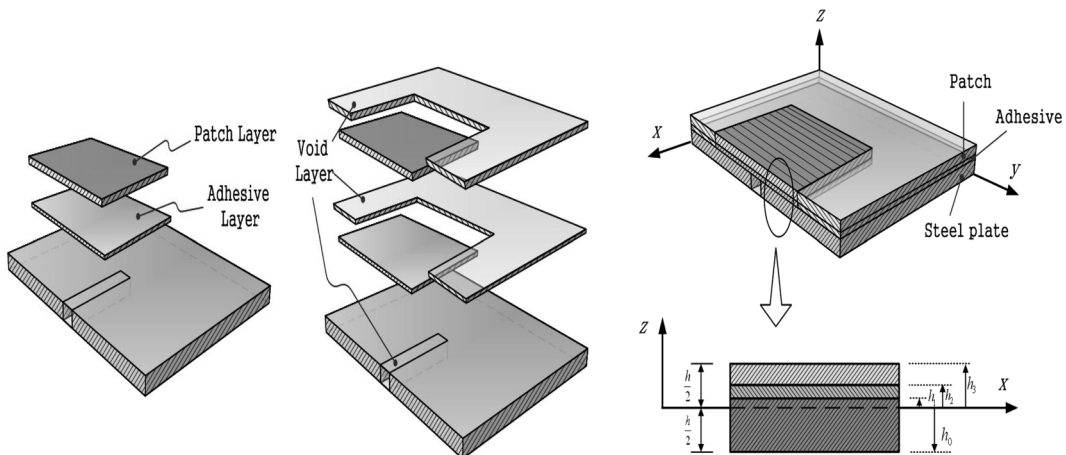


그림 2. 균열보강판의 적층모델과정과 적층평판의 기하형상의 정의

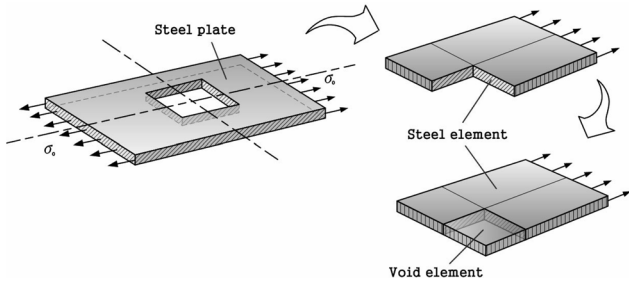


그림 3. 사각형 개구부를 갖는 강판의 계층적 무강성요소를 적용한 유한요소 모델링

소(Zero stiffness element)로 주로 균열부, 개구부, 원공부 등 실제 재료가 존재하지 않는 영역을 모델링할 때 편법으로 사용되기 때문에 void element란 이름이 붙는다. 그러나, 재료의 강성이 0인 요소와 강재와 같이 재료의 강성이 큰 요소가 접합하게 될 경우, 그리고 균열부같이 가로·세로비로 치면 일 대 수백 또는 수천의 변장비가 될 수 있는 부분을 모델링할 경우 이 요소들에 대한 강성도행렬은 매우 악조건 행렬(ill-conditioned matrix)이 되어 유한요소해를 나쁘게 만들 수 있다. 이러한 이유로 요소의 강건성(robustness)이 뛰어난 계층적 요소(Zienkiewicz 1983, Woo 1993)의 채택이 모색되었다. 계층적 무강성요소는 그림 3에서 보듯이 사각형 개구부(cut-out)를 갖는 강판에 대한 해석에서 사각형 개구부를 요소모델링 하거나 적층모델에서 패치보강시 균열의 빈 공간을 채우는 요소로 사용되며 비보강 층요소 등의 요소를 표현하기 위한 요소이다. 계층적 무강성요소의 유한요소 해석에 적용성을 검토하기 위하여 유한요소 입력데이터의 민감도(sensitivity)에 대한 조사가 필요하며 그 적용의 타당성을 보이고자 한다.

3. 계층적 무강성요소의 민감도 분석

일반적으로 요소의 강건성(robustness)을 평가하기 위하여 요소의 변장비(aspect ratio), 왜곡도(skewness), Tapered ratio,

Poisson ratio($\nu \approx 0.5$)인 비압축성재료 등을 검토할 수 있으나 본 연구에서는 균열부를 모델링하는 목적이므로 매우 큰 변장비와 강성이 0인 조건을 맞추어야 하므로 탄성계수 $E \approx 0.0$ 로 가정하였을 때 적분형 르장드르 다항식에 기초를 둔 계층적 무강성요소의 민감도를 조사하고자 한다.

계층적 무강성요소의 사용성 검토를 위하여 기존의 연구자들이 다루었던 균열문제에 대해서 대칭성을 감안하여 1/4 모델링하여 해석을 실시하였다. 우선 $H/W=2$ (평판의 높이 $H=200$ mm, 평판의 폭 $W=100$ mm)인 두께 $t=1$ mm의 중앙균열판(centrally cracked plate)에 인장력 $\sigma_0=0.1$ MPa이 작용하는 경우에 대하여 빈 균열공간을 계층적 무강성요소로 모델링하여 해석하였다. 요소의 개수는 4개로 하였으며 해석값에 대하여 정확성을 높이고자 형상함수의 차수는 8차로 고정시켰다. 모재의 재료물성치는 탄성계수 $E_p=200$ GPa이며 포아슨비는 $\nu=0.3$ 으로 설정하였다.

3.1 변장비에 따른 민감도 검토

균열부를 표현하기 위해서 가로(균열길이) a 와 세로(균열폭) b 를 갖는 사각형요소로 간주하였다. 따라서, 요소의 변장비(a/b) 변화에 따라 해석하였는데, 하나는 통상적인 Gauss 적분법을, 또 하나는 절점의 위치에서도 응력값을 산출할 수 있는 Lobatto 적분법을 이용하여 해석한 응력값을 균열선단으로부터 거리 r 지점의 y 방향 응력 σ_y 과 대하여 그림 5와 6에 비교하였다. 그림 5에서 보는 바와 같이 변장비 a/b 가 작을수록 응력특이현상이 발생하는 균열선단부위에 대한 응력값이 다소 작은 값으로 표현되는 것을 볼 수 있다. 반면에 변장비 a/b 가 증가 될수록 균열부를 보다 가깝게 표현할 수 있는데, 이 경우는 응력특이현상을 잘 표현하고 있으나 몇몇의 적분점에서 음의 값이 나타나 변장비 a/b 의 한계성을 보이고 있다. 수치해석 결과로부터 Gauss 수치적분에 비해 Lobatto 수치적분이 보다 큰 변장비에 대해 합리적인 결과를 보여주는 것으로 판단된다. 하지만 기존의 h -version에서는 Robinson(1976)의 연구결과로부터 변장비의 유효범위를 변위에 대한 적합성으로 $a/b=7$ 을 제한하고 있으며, 응력에 대

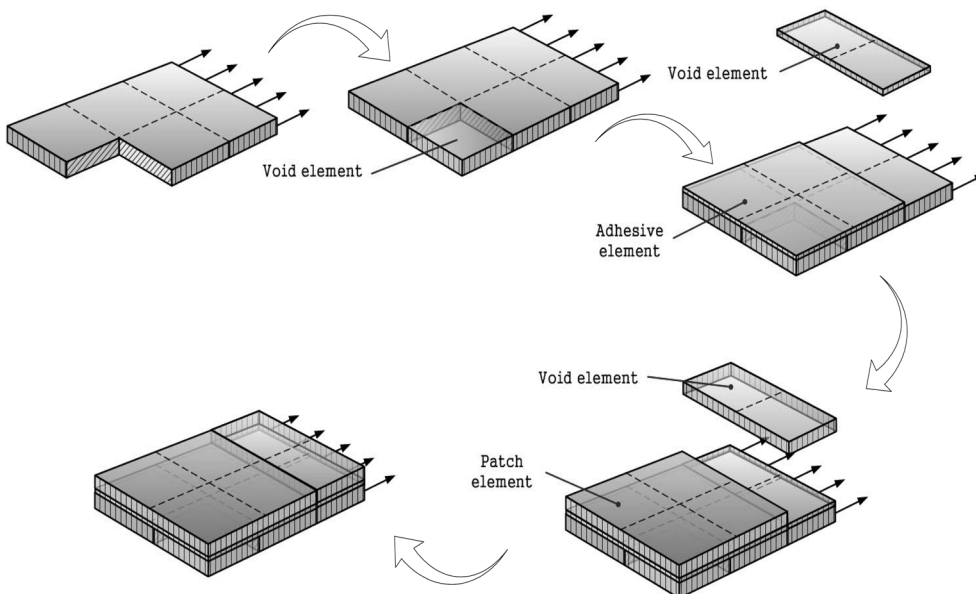


그림 4. 패치보강된 Cut-out 강판의 계층적 무강성요소를 적용한 유한요소 모델링과정

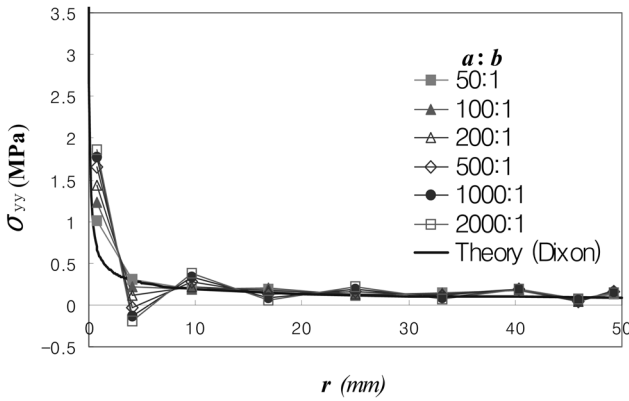


그림 5. 팻취보강되지 않은 균열강판의 변장비에 따른 균열선단부의 응력분포(Gauss 적분)

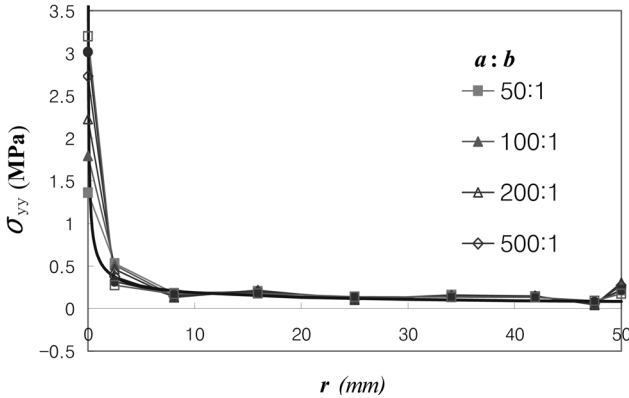


그림 6. 팻취보강되지 않은 균열강판의 변장비에 따른 균열선단부의 응력분포(Lobatto 적분)

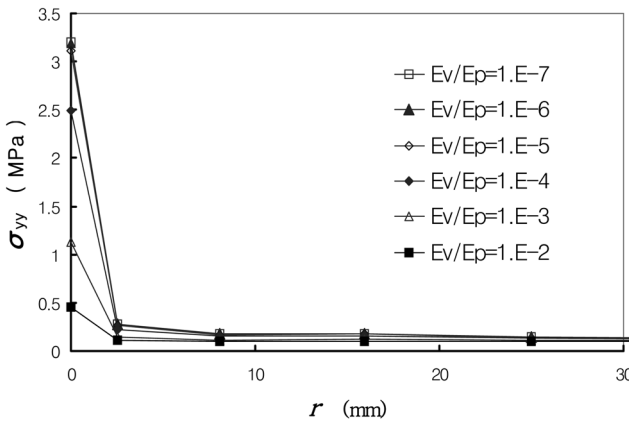


그림 7. 팻취보강되지 않은 균열강판의 탄성계수비에 따른 균열선단부의 응력변화

한 적합한 변장비를 $a/b=5$ 로 제한하고 있는데 비해 계층적 무강성요소의 경우 h -version에 비하여 상대적으로 큰 변장비에 대한 강건성을 갖는 것으로 분석되었다. 해석결과에 의하면 변장비 a/b 는 Gauss 수치적분에서는 100~500사이가 적합하며 Lobatto 수치적분에서는 100~2000이상 까지 적합하다고 판단된다.

3.2 탄성계수에 따른 민감도 검토

계층적 무강성요소는 실제로 재료가 존재하지 않는 Void element이므로 강성이 0에 가까운 요소이나 유한요소 해석에 있어서 0을 직접 넣게 되면 수치오류가 발생된다. 따라서, 강성을 0에 어느 정도나 가깝게 표현하느냐에 따라서 수치

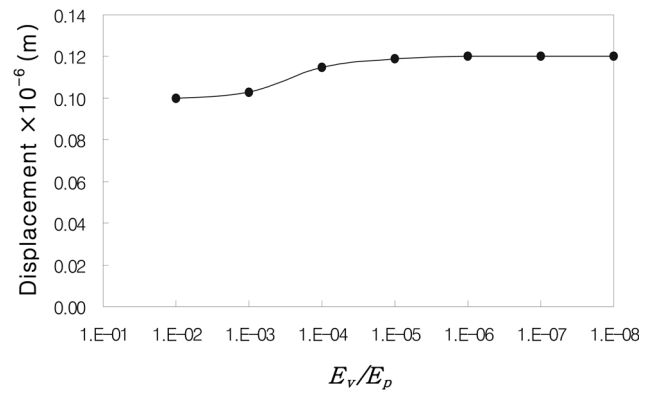


그림 8. 팻취보강되지 않은 균열강판의 탄성계수비에 따른 최대변위 변화

해석 결과값에 영향을 미치게 된다. 그림 7은 균열선단 방향으로 거리 r 만큼 떨어진 수치적분점에서의 응력 σ_{yy} 를 모재의 탄성계수 E_p 와 무강성요소인 계층적 무강성요소의 탄성계수 E_v 비율에 따른 변화를 나타내었다. 그림 7에서 보는 바와 같이 $E_v/E_p=1.0 \times 10^{-6}$ 이후로부터 일정한 값들로 나타나기 시작하였다. 따라서 Void element의 탄성계수는 $0 \leq E_v \leq (1.0 \times 10^{-6})E_p$ 의 범위의 값으로 사용하도록 결정하였다. 이 결과는 최창근(2002)에 “.....실제적으로 무강성은 요소의 탄성계수(E)를 매우 작은 값(예: 인접요소 탄성계수의 $1/10^6$)으로 정의하면 구현할 수 있다.”는 내용과 잘 일치합니다.

4. 강성도 미분법에 의한 응력확대계수 산정

균열진전에 따른 포텐셜에너지 감소를 나타내는 에너지 방출률(energy release rate) G 값으로 응력확대계수를 구하게 되며 G 와 응력확대계수 K 와의 관계는 다음과 같다.

$$G \equiv \left. \frac{-\partial P}{\partial l} \right|_{load} = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \quad \text{plane strain} \quad (13)$$

$$G \equiv \left. \frac{-\partial P}{\partial l} \right|_{load} = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{plane stress} \quad (14)$$

여기서 E 는 탄성계수, ν 는 포아송비를 나타낸다.

균열이 있는 2차원 평면 탄성체의 유한요소해석을 통하여 절점변위 벡터 $\{u\}$ 를 구할 수 있으며 유한요소법에서 포텐셜에너지 P 를 다음과 같이 표현하고 있다.

$$P = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} \quad (15)$$

여기서 $[K]$ 는 강성도행렬이고, $\{f\}$ 는 절점하중 벡터이다. 위의 식을 균열길이 l 로 미분하게 되면 에너지 방출률은 다음과 같이 구할 수 있다(Parks 1974).

$$\frac{\partial P}{\partial l} = -\frac{\partial \{u\}^T}{\partial l} [K] \{u\} - \{f\} - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial l} \quad (16)$$

$$\frac{K_I^2}{E} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial l} \quad (17)$$

$$-\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial [k_i^c]}{\partial l} \{u\} \quad (18)$$

여기서 $[k_i^c]$ 는 Γ_0 와 Γ_1 사이의 요소의 강성도행렬이며, N_c 는 Γ_0 와 Γ_1 사이의 요소의 개수이다. 균열길이

에 대한 한 요소의 강성도매트릭스의 변화는 다음과 같이 바로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial [k_i^c]}{\partial t} = \frac{\partial [k_i^c] \partial x_j}{\partial x_j \partial t} \quad (19)$$

여기서 절점 좌표인 x_j 는 균열길이 l 의 함수로 간주된다. $\partial x_j / \partial t$ 는 Γ_0 가 선상에 위치한 절점의 x 좌표인지 아닌지에 따라 각각 1 또는 0 이 된다. 다시 말하면 Γ_0 선상의 절점만이 미소 크랙진전에 의해 좌표의 미소변화가 있다는 것이며 그 변화량이 Δl 와 같아서 $\partial x_j / \partial t$ 의 값은 1이 되며 Γ_0 선상 외의 절점에 대한 좌표변화는 없기 때문에 $\partial x_j / \partial t$ 는 0 이 된다는 것이다.

5. 수치해석 예제

수치해석 예제로 그림 9에 나타난 바와 같이 $W_p=120$ mm, $H_p=120$ mm, $t_p=3$ mm 인 알루미늄 판에 대하여 균열폭 $a=12\sim 72$ mm 따른 팽취보강 전후에 대한 유한요소해석 실시하였다. 모재의 재료물성치로는 $E_p=72000$ MPa,

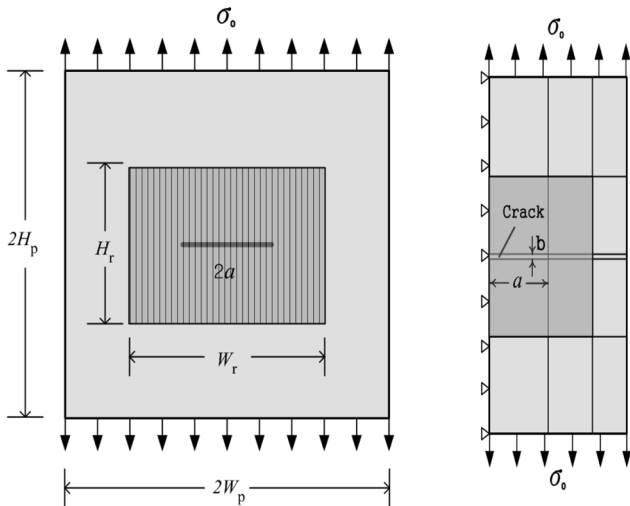


그림 9. 팽취보강된 중앙균열판의 기하형상과 1/2 유한요소모델링 형상

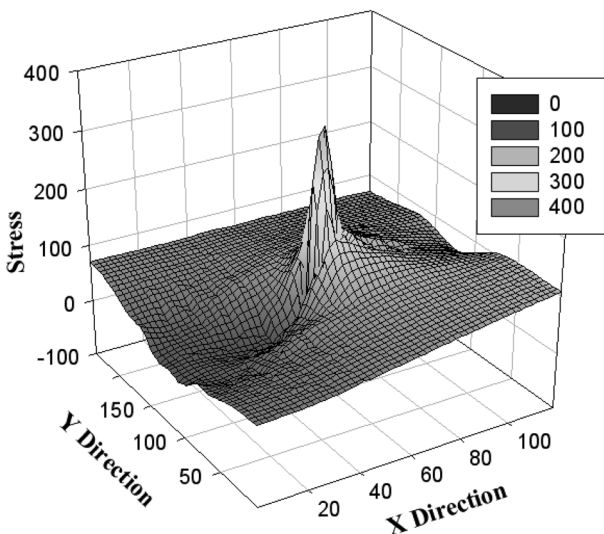


그림 10. 팽취 보강전 중앙균열판의 응력분포도($a/W_p=0.5$, $a/b=200$, Lobatto 적분)

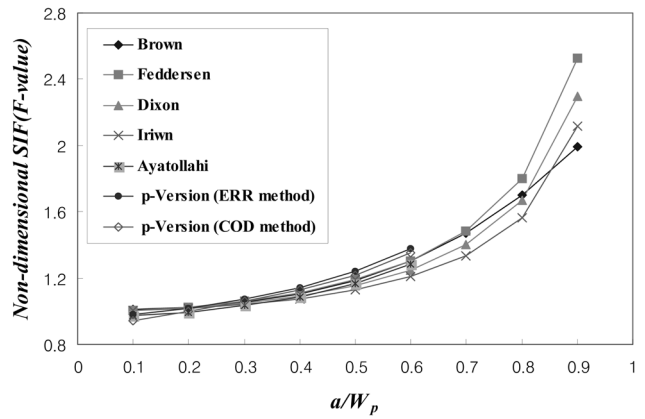


그림 11. 팽취보강되지 않은 중앙균열판의 무차원 응력확대계수(F)

$\nu=0.33$ 이며 계층적 무강성요소의 형상비 a/b 는 200으로 하고 탄성계수비는 $E_v/E_p=1.0 \times 10^{-6}$ 로 입력하였으며 인장력 $\sigma_0=70$ MPa을 작용하여 해석하였다. 그림 10은 팽취 보강되지 않은 중앙 균열판에 대해서 균열길기와 모재의 폭 비 $a/W_p=0.5$ 에 대하여 해석된 응력분포를 나타내었다.

팽취 보강되지 않은 중앙 균열판에 대한 수치해석의 결과 값을 분석하여 응력확대계수를 구하는 방법은 여러 가지가 있다. 본 연구에서는 변위외삽법 중에 하나인 COD(Crack Opening Displacement)법으로 균열길이에 따른 응력확대계수 K_I 의 값을 Point Matching Approach로 구하고, 또 다른 방법으로는 ERR(Energy Release Rate)법의 개선법인 강성도 미분법(Stiffness derivative method; Parks 1974)으로 구한 K_I 을 이용하여 무차원 응력확대계수인 F 에 대한 값을 그림 11에 기존 연구자에 의한 이론값들 및 수치해석값과 비교하였다.

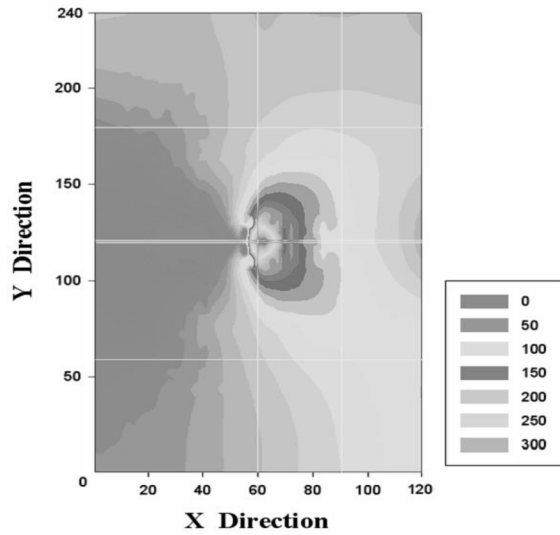
다음 예제로는 팽취 보강된 중앙 균열판 해석으로 팽취보강 전과 후의 변화를 비교하여 내구성의 비교를 시도하였다. 팽취보강재와 접착제(adhesive)에 대한 기하형상 및 재료물성치는 표 1에 정리하였다.

해석에 대한 분석결과로 그림 12는 팽취보강 전후에 대하여 모재만의 응력분포와 팽취를 포함한 응력분포를 비교해 놓았다. 그림 12에서 보듯이 팽취 보강이후에는 높은 응력분포를 보이던 부분이 없어졌으며 전반적으로 낮은 응력분포를 보이고 있으며 팽취를 포함한 전체적인 응력분포를 살펴 볼 때 팽취 보강된 해석에서 팽취를 통한 응력분배가 된 양상을 쉽게 알 수가 있다. 그림 13은 중앙균열판의 팽취 보강 전후에 대하여 응력확대계수의 변화를 나타내고 있으며

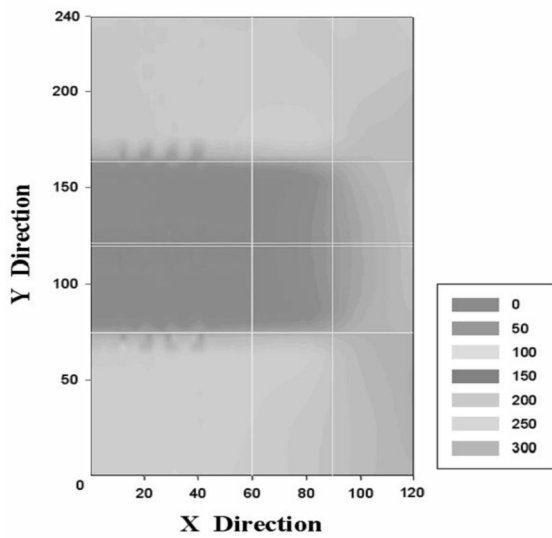
표 1. 복합재료 팽취의 기하형상 값 및 재료물성치

• Geometric dimension (단위 mm)			
	W_r	H_r	t
Boron/epoxy	180	90	$t_r=1$
Adhesive	180	90	$t_r=0.2$

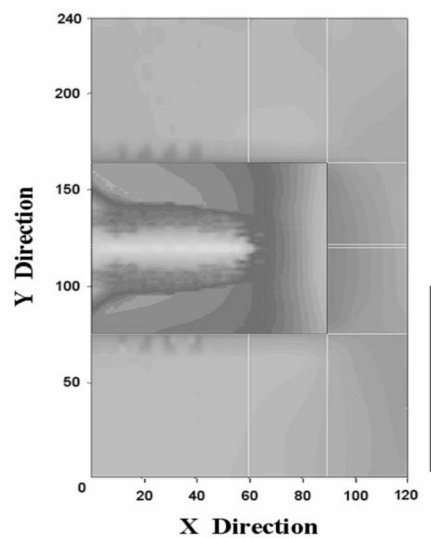
• Material properties (E, G 단위 MPa)					
	E_2	E_1, E_3	G_{12}, G_{23}	G_{13}	ν
Boron/epoxy	208000	25400	7240	7240	0.17
Adhesive	970	90			0.3



(a) 패취보강되지 않은 중앙균열판의 응력분포



(b) 패취보강후 모재만의응력분포



(c) 패취보강후 패취를 포함한 응력분포

그림 12. 패취보강 전후의 중앙균열판의 패취를 포함한 응력분포($a/W_p=0.5$)

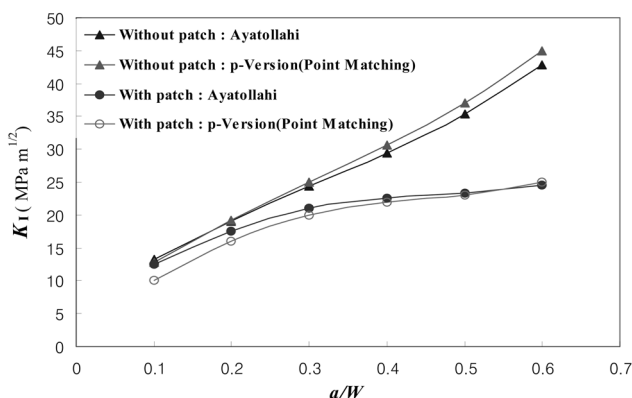


그림 13. 패취보강 전후의 응력확대계수 의 비교

Ayatollahi(2007)의 해석값과 비교하여 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 Ayatollahi의 연구결과와 비교하여 본 연구에서 채택한 계층적 무강성요소를 사용한 유한요소 모델링은 충분한 정확도를 갖는 것으로 평가된다. 다시말하면, Ayatollahi의 해석값과 본 연구에서 제안하는 계층적 무강성

요소의 정확도를 정량적으로 비교해보면, 패취보강되지 않은 균열강판의 경우 상대오차가 $\pm 5\%$ 로 미만으로 나타나고 있으며 패취보강된 모델에 대해서는 상대오차가 $\pm 5\sim 10\%$ 정도를 보여주고 있다. 아울러, 균열크기가 $a/W=0.4$ 이후에서는 패취보강효과가 현저하여 응력확대계수가 크게 감소된 것을 확인 할 수 있다. 즉, K_I 값은 최대 43%의 보강 효과를 확인하였고 최대응력에 대해서는 최고 90%의 보강효과를 보여주고 있다.

6. 결론 및 고찰

본 연구는 기존의 수치해석적 방법에서 응력특이 발생하 는 균열문제에서 계층적 무강성요소(hierarchical void element)의 적용으로 유한요소 해석에 있어서 자유도 감소를 유도하여 보다 효율적인 해석을 도모하고자 적층모델을 통한 해석을 유도하였고 중앙 균열판에 대하여 패취 보강 전 후의 모델을 해석해본 결과 다음과 같은 측면을 생각해 볼 수 있다.

1. 계층적 무강성요소의 사용 적합성검토를 위하여 여러 수치해석결과에 대하여 분석해본 바 패취 보강되지 않는 중앙 균열판에 대하여 형상비 a/b 가 100~2000이상의 값에서도 수렴성을 보였으며, 패취 보강된 모델링 해석에서는 $a/b=100\sim 400$ 정도의 범위에 대하여 적합성을 보였다. 다음으로는 불연속부인 균열부를 연속체로 모델링하기 위해 사용되는 계층적 무강성요소는 재료의 탄성계수를 0에 가까운 값으로 가정하였다. 즉, 계층적 무강성요소의 탄성계수가 0에 근접할수록 해의 수렴성을 보였으며 해석과정에서 문제가 발생하지 않았으나 수렴구간에 들어가는 탄성계수 값으로 다음의 $0 \leq E_v \leq (1.0 \times 10^{-6})E_p$ 값을 제안하고자 한다.
2. 응력계수의 산정에 있어서 패취 보강되지 않은 중앙균열판에 대하여 COD법 및 ERR법에 의해 구해진 K_I 값에 대하여 그림 13에서 보는 바와 같이 기존의 연구자에 의해 구해진 값에 대한 상대오차가 $\pm 5\%$ 로 미만으로 나타나고 있으며 패취보강된 모델에 대해서는 상대오차가 $\pm 5\sim 10\%$ 정도를 보이고 있어 적층모델을 통한 패취보강된 해석의 유효성을 확인 할 수 있었다.
3. 패취보강된 중앙균열판의 해석결과에 대하여 K_I 값 최대 43%의 보강 효과를 확인하였고 최대응력에 대해서는 최고 90%의 보강효과를 보였다.
계층적 무강성요소의 적용으로 3차원 고체요소 모델링을 통한 균열보강 해석이 2차원 요소화 하여 해석의 효율을 도모하였다. 또한 적층모델 유한요소 프로그램의 적합성을 보였으며 향후에는 프로그램 내에 아직 적용되지 않은 곡선면이나 원형경계에 대한 Transfinite Mapping과 요소층간의 형상함수의 적용으로 원공이 있는 판의 해석과 곡면이 있는 셸구조의 해석 등 앞으로 다양한 손상된 구조물의 보강전후의 해석이 가능해질 것으로 기대되어진다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성

사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구(KRF-2007-313-D00778)되었으므로 귀 재단에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

- 최창근(2002) 유한요소법, 테크노프레스.
홍종현, 박진환, 우광성(2002) 기하 및 재료비선형을 갖는 적층 평판의 p-Version 유한요소해석. 한국전산구조공학회 논문집, 한국전산구조공학회, 제15권, 제3호(통권 53호), pp. 491-499.
- Robinson, J. (1976) A single element test. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 7, pp. 191-200.
- Reddy, J.N. (1997) *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.
- Hinton, E. and Owen, D.R.J. (1984) *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, Swansea, U.K.
- Park, D.M. (1974) A stiffness derivative finite element technique of crack tip stress intensity factors for determination. *International Journal of Fracture*, Vol. 10, pp. 487-520.
- Zienkiewicz, O.C., De, J. P., Gago, S.R., and Kelly, D.W. (1983) The Hierarchic Concept in Finite Element Analysis. *Computer & Structures*, Vol. 16, pp. 51-65.
- Woo, K.S. (1993) Robustness of hierarchical elements formulated by integrals of Legendre polynomials. *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 421-426.
- Ellyin, F., Ozah, F., and Xia, Z. (2007) 3-D modelling of cyclically loaded composite patch repair of a cracked plate. *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 486-494.
- Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C. (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Numer. Meth. Engng*, Vol. 2, pp. 419-451.
- Ayatollahi, M.R. and Hashemi, R. (2007) Computation of stress intensity factor (K_I , K_{II}) and T-stress for cracks reinforced by composite patching. *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 602-609.
- Woo, K.S., Park, J.H., and Hong, C.H.(2004) A new hierarchic degenerated shell element for geometrically non-linear analysis of composite laminated square and skew plates. *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 17, No. 6, pp. 751-766

(접수일: 2008.1.22/심사일: 2008.4.7/심사완료일: 2008.6.30)