

축 대칭 지형 위를 전파하는 장파의 해석해

Analytical Solution for Long Waves on Axis-Symmetric Topographies

정태화* · 이창훈** · 조용식*** · 이진우****

Jung, Tae-Hwa · Lee, Changhoon · Cho, Yong-Sik · Lee, Jin-Woo

Abstract

In this study, we develop analytical solutions for long waves propagating over several types of axis-symmetric topographies where the water depth varies in an arbitrary power of radial distance. The first type is a cylindrical island mounted on a shoal. The second type is a circular island. To get the solution, the methods of separation of variables, Taylor series expansion and Frobenius series are used. Developed analytical solutions are validated by comparing with previously developed analytical solutions. We also investigate various cases with different incident wave periods, radii of the shoal, and the powers of radial distance.

Keywords : analytical solution, long waves, axis-symmetric topography, Frobenius series, separation of variables, Taylor series expansion

요 지

본 연구에서는, 바다의 수심이 반경의 임의 차수의 제곱 꼴로 표현되는 다양한 형태의 축 대칭 지형 위를 통과하는 장파의 해석해를 유도하였다. 첫 번째 지형은 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우이며 두 번째는 원형의 섬이 있는 경우이다. 해를 구하기 위하여 변수 분리법, Taylor 급수전개법 및 Frobenius 급수법을 사용하였다. 유도된 해석해를 기존에 유도된 해석해와 비교를 하여 그 정확성을 검증 하였다. 또한, 입사파의 주기, 둔덕의 반지름 및 차수를 가지는 경우에 대하여 분석하였다.

핵심용어 : 해석해, 장파, 축 대칭 지형, Frobenius 급수, 변수 분리법, Taylor 급수전개법

1. 서 론

파랑의 역학적인 거동을 이해하는 데 있어서 대표적으로 수리모형실험과 수치해석 등의 방법이 있다. 이 중에서 수리모형 실험은 자연현상을 비교적 정확히 볼 수 있는 장점이 있는 반면 여러 조건의 경우를 보기에는 시간과 비용이 많이 드는 문제점이 있다. 또한, 주로 축소모형에 의한 실험을 하게 되는데 그 결과가 실제 크기의 자연현상을 오히려 왜곡할 가능성도 있다. 1970년대 이후 컴퓨터의 급격한 발달에 힘 입어 여러 연구자들이 유한차분법, 유한요소법 등을 사용하여 편미분방정식을 직접 푸는 수치해석기법을 많이 사용하고 있다. 수치해석기법을 사용할 때 제한된 계산영역에서 외해의 경계에는 개방경계조건을 지정해야 한다. 현재까지 개방경계조건을 지정하는 방법들이 많이 개발되었지만 (Lee와 Suh, 1998; Lee 등, 2001; Lee와 Yoon, 2007) 아직까지 완전하지 못하여 어떤 경우에는 수치해의 오류가 크

게 발생하기도 한다.

이와는 별도로, 간단한 지형에 대하여는 해석해를 이용하여 파의 거동을 분석할 수 있다. 대부분의 해석해 기법은 컴퓨터가 발달하기 전에 개발되었다. 최근에는 해석해가 수치해 또는 수리모형실험결과의 비교 검증 수단으로 사용되기도 한다. 해석해를 구하기 위해서는 지형 조건이 단순하여 지배방정식인 편미분방정식이 상미분방정식으로 바뀌어 해석해가 나올 수 있다. 해석해 도출을 위한 지형조건으로 한 지점에서 반경을 따라 변하는 축대칭 지형이 많이 사용된다. 이러한 지형은 섬 주위에서 볼 수 있다. Homma(1950)에 의해 포물선형 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우에 대한 장파의 해석해가 처음으로 제시된 이후 지금까지 많은 학자들이 해석해에 관한 연구를 수행하였다. Zhang과 Zhu(1994)는 원뿔 모양의 섬 주위를 통과하는 장파의 해석해를 개발하였고, Zhu와 Zhang(1996)은 원뿔 모양의 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우 대한 해석해를 개발하

*교신저자 · 한양대학교 토목공학과 박사후과정 (E-mail : togye176@paran.com)

**정희원 · 세종대학교 토목환경공학과 부교수 (E-mail : clee@sejong.ac.kr)

***정희원 · 한양대학교 토목공학과 교수 (E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

****한양대학교 박사과정 (E-mail : moonguy@hanyang.ac.kr)

였고, Suh 등(2005)은 포물선형 함몰 지형 위를 통과하는 장파의 해석해를 개발하였다. 대부분의 해석해는 바닥의 수심이 섬의 중심에서 떨어진 거리의 1차 차수 또는 2차의 제곱에 비례하여 변한다고 가정하였다, 즉, 섬의 형상을 대부분 포물선 형이나 원뿔 모양으로 가정하였다. 그런데, 실제 바닥의 수심은 1보다 작은 차수의 제곱에 비례하여 변하기 때문에 기존에 유도된 해석해를 실제 지형에 적용시키기에는 무리가 있다. Bruun(1954)은 실제 연안에서 평형 상태에서의 수심은 해안선으로부터 거리의 2/3승에 비례하여 변한다고 주장하였고, 이후 Dean(1977)은 미국 소재 502개 해변의 형상을 조사한 결과 Bruun의 주장이 맞음을 확인하였고 이러한 해변의 형상을 equilibrium beach profile이라고 명명하였다.

본 연구에서는, 대표적인 축 대칭 지형으로 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우와 원형의 섬만 있는 경우 각각에 대하여 장파의 해석해를 유도하였다. 둔덕 위에 섬이 있는 지형에서 거리 대비 수심의 제곱차수가 다양한 경우에 Yu와 Zhang(2003)이 해석해를 제시한 바 있다. 그러나 그들의 해석해는 둔덕의 정점을 자유 수면에 고정된 상태에서 유도되었기 때문에 둔덕 형상에 제약이 있을 뿐만 아니라 지배 방정식을 Bessel 방정식의 형태로 만들기 위해 변수 치환을 여러 번 수행하기 때문에 식을 유도하는 과정이 번거롭다. 반면에 본 연구에서 고려하는 지형은 정점의 위치가 자유 수면 뿐만 아니라 그 아래 임의의 지점이 있기 때문에 Yu와 Zhang(2003)의 해 보다 적용성이 넓을 뿐만 아니라 Frobenius 급수해를 얻는 과정에서 한번의 변수 치환을 하기 때문에 그들의 유도 방법보다 간단하다. 원형 섬의 경우에 Zhang과 Zhu(1994)가 원뿔 모양, 즉 바닥의 수심이 섬의 중심에서 떨어진 거리에 1차로 비례하는 지형에 대하여 해석해를 제시하였다. 본 연구에서는 Zhang과 Zhu(1994)의 연구를 더욱 확장하여 바닥의 수심이 거리에 임의 차수의 제곱에 비례하는 지형에 대하여 해석해를 유도하였다.

2. 상미분 방정식 유도

비점성, 비압축성 유체의 비회전성 흐름이면서 미소 진폭을 가지는 선형파의 경우 다음과 같이 완경사 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (1)$$

여기서, ∇ 은 수평 미분 연산자, η 는 자유수면, C 는 파속도, C_g 는 군속도, 그리고 ω 는 각 주파수를 의미한다. 천해역에서 극좌표를 사용하면 식 (1)을 다음과 같이 편미분 방정식으로 표현할 수 있다.

$$h \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{dh}{dr} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0 \quad (2)$$

해의 형태를 $\eta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \Theta_n(\theta)$ 으로 가정하여 변수분리법을 사용하면 식 (2)는 다시 다음과 같은 2개의 식으로 나누어진다.

$$h \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \left(\frac{h}{r} + \frac{dh}{dr} \right) \frac{dR_n}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{g} - \frac{n^2 h}{r^2} \right) R_n = 0 \quad (3)$$

$$\Theta_n(\theta) = C_{1n} \cos n\theta + C_{2n} \sin n\theta \quad (4)$$

여기서, $R_n(r)$ 은 고유값(eigenvalue) n 에 해당하는 r 의 함수이며 C_{1n} 과 C_{2n} 은 미지 상수들이다.

3. 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우의 해석해

3.1 해의 유도

먼저, 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우에 대해 장파의 해석해를 유도하였다. 둔덕 위에서 수심은 그림 1과 같이 방사방향으로 거리의 임의 차수에 비례하여 증가한다. 그림 1에서 r_0 및 r_1 은 섬 중심에서 섬 아래 절벽 및 둔덕 끝까지의 반지름을 의미하며 h_0 및 h_1 은 각각 r_0 및 r_1 지점에서의 수심을 의미한다.

둔덕 주위에서의 수심은 다음과 같이 표현된다.

$$h = \begin{cases} h_\gamma \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\gamma - 1 \right] + h_0, & r_0 \leq r \leq r_1 \\ h_1, & r \geq r_1 \end{cases} \quad (5)$$

여기서, γ 는 수심을 결정하는 차수이며 h_γ 는 섬 중심과 섬 벽에서의 수심 차이를 나타내며 다음과 같이 r_0 , r_1 , h_0 , h_1 및 γ 에 의해 결정된다.

$$h_\gamma = h_0 - h_{r=r_0} = \frac{h_1 - h_0}{[(r_1/r_0)^\gamma - 1]} \quad (6)$$

식 (5)로 표현된 수심에 대해서 식 (3)의 해석해를 Frobenius 급수를 이용하여 구할 수 있다. Frobenius 급수해를 사용하기 위해서는 수심이 변하는 영역, 즉 Frobenius 급수를 적용하는 영역이 급수해의 수렴 반경 내에 있어야 한다. 적용 영역을 급수해의 수렴 반경 내에 두기 위하여 다음과 같은 변수치환기법을 사용하였다.

$$t = 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^\gamma \quad (7)$$

식 (7)을 이용하면 식 (3)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\gamma^2 (1-t)^2 [h_0 - (h_0 - h_\gamma)t] \frac{d^2 R_n}{dt^2} - \gamma^2 (h_0 - h_\gamma) (1-t) \frac{dR_n}{dt}$$

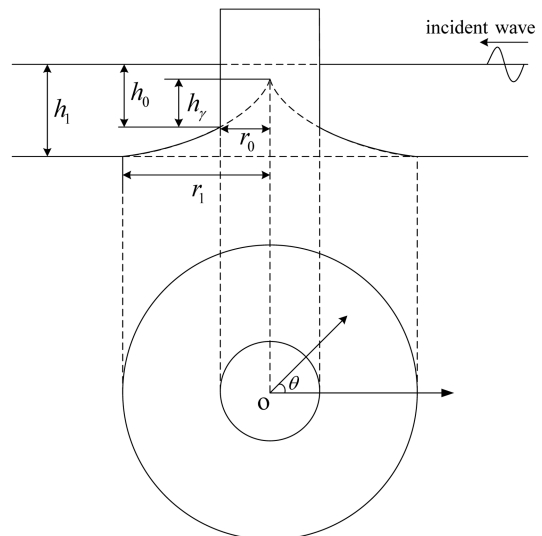


Fig. 1 Computational domain for waves to a cylindrical island mounted on a shoal

$$\left\{ \frac{\omega^2 r_0^2 (1-t)^{\frac{2}{\gamma}+1}}{g} - [h_0 - (h_0 - h_\gamma)t]n^2 \right\} R_n = 0 \quad (8)$$

따라서, 수심이 변화하는 해석 영역 ($r_0 \leq r \leq r_1$) 은 $0 \leq t \leq 1 - (r_0/r_1)^\gamma$ 에 있게 되며 이 영역은 수렴 영역 ($0 \leq t \leq 1$) 내에 항상 위치하게 된다. Frobenius 급수를 사용하면 식 (8)의 해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} t^{m+c} \quad (9)$$

식 (8)에서 { } 안의 첫 번째 항은 Taylor 급수전개를 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\omega^2 r_0^2 (1-t)^{\frac{2}{\gamma}+1}}{g} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l t^l \quad (10)$$

여기서, $\beta_0 = \omega^2 r_0^2 / g$ 이다. 식 (9) 및 (10)을 식 (8)에 대입한 후 t 에 관하여 차수 순으로 정리하면 가장 낮은 차수로부터 다음과 같이 c 의 값을 구할 수 있으며,

$$c = 0, 1 \quad (11)$$

이 값을 이용하여 다음과 같이 두 개의 독립 해를 구할 수 있다.

$$R_n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} t^m \quad (12)$$

$$R_n = \ln t \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{m,n} t^{m-1} \quad (13)$$

여기서 $\alpha_{0,n}$ 및 $\alpha_{1,n}$ 은 미지 상수이다. 섬 벽면 ($t=0$)에서의 자유수면은 유한한 값을 가지기 때문에 식 (13)으로 표현된 해는 적합하지 않다. 식 (12)에서 $\alpha_{i,n} (i \geq 2)$ 값들은 $\alpha_{0,n}$ 및 $\alpha_{1,n}$ 에 의해 결정되는 값들이기 때문에 식 (12)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_n = \alpha_{0,n} R_{0,n}(t) + \alpha_{1,n} R_{1,n} \quad (14)$$

최종적으로, 둔덕 위를 전파하는 장파의 자유 수면 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_i = \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_{0,n} R_{0,n}(t) + \alpha_{1,n} R_{1,n}(t)] \cos n\theta \quad (15)$$

여기서 아래 첨자 i 는 수심이 변하는 영역을 의미한다. 식 (4)의 $\sin n\theta$ 는 해가 x 축에 대하여 대칭이기 때문에 생략하였다. 둔덕을 둘러싸고 있는 일정 수심 영역에서의 자유수면변위 (η_0)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_0 = \eta^I + \eta^S = \sum_{n=0}^{\infty} [i^n \varepsilon_n J_n(kr) + D_n H_n^{(2)}(kr)] \cos n\theta \quad (16)$$

여기서, η^I 및 η^S 는 각각 입사파 및 산란파를 의미하며, J_n 은 제 1종 n 차 Bessel 함수, $H_n^{(2)}$ 는 제 2종 n 차 Hankel 함수, ε_n 은 Jacobi 상수(즉, $n=0$ 인 경우 $\varepsilon_n=1$, 그리고 $n \geq 1$ 인 경우 $\varepsilon_n=2$), 그리고 D_n 은 미지의 복소수 상수이다. 식 (15)

와 (16)의 미지수를 결정하기 위하여 다음과 같은 정합조건을 사용한다.

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial r} = 0, \quad r = r_0 \quad (17)$$

$$\eta_i = \eta_0, \quad r = r_1 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial r} = \frac{\partial \eta_0}{\partial r}, \quad r = r_1 \quad (19)$$

3.2 해의 검증

Homma(1950)는 둔덕의 정점이 자유수면에 있고 바다의 수심이 중심에서 떨어진 거리의 2차 제곱에 비례하여 증가하는 지형에 대하여 장파의 해석해를 유도하였고, Zhu와 Zhang(1996)은 수심이 거리에 비례하여 증가하는 지형에 대하여 해석해를 제시한 바가 있다. 본 연구에서 유도한 장파의 해석해를 Homma의 해석해와 Zhu와 Zhang의 해석해와 비교하여 본 연구에서 유도된 해석해의 타당성을 검증하였다. $r_0=10$ km, $r_1=30$ km, $h_1=4$ km의 값을 공통적으로 사용하였으며 h_0 의 값은 $\gamma=2$ 인 경우 $h_0=4/9$ km, $\gamma=1$ 인 경우에 $h_0=4/3$ km의 값을 사용하였다.

본 논문에서 유도한 해석 해는 무수히 많은 고유값과 급수항들로 이루어져 있지만 실제로 계산을 하기 위해서는 적절한 항까지만을 계산하여야 한다. 다양한 수치 검증을 통하여 $N=100$ 으로 고정하였으며, M 의 값은 $\alpha_{M,100}^M / \sum_{m=0}^M \alpha_{m,100}^m < 10^{-4}$ 값을 만족할 때의 값을 사용하였다. 여기서, $N=100$ 및 M 은 각각 고유값 및 급수항들의 개수를 의미한

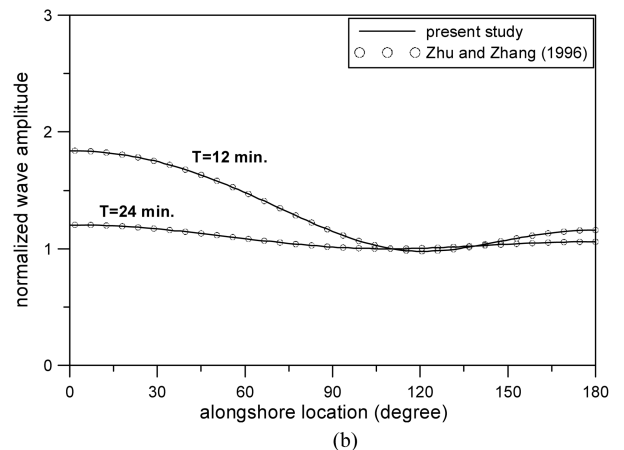
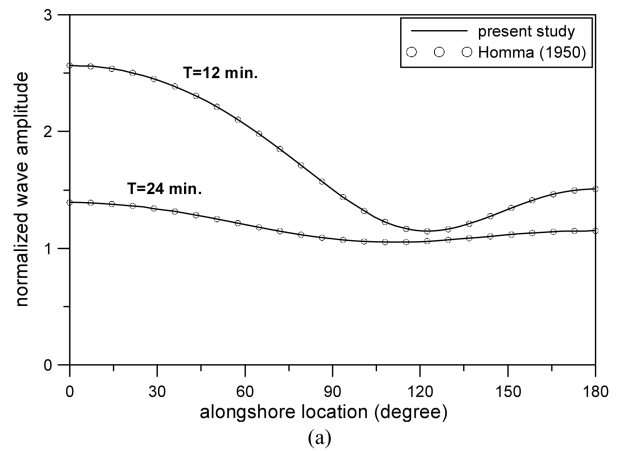


Fig. 2 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline: (a) $\gamma=2$; (b) $\gamma=1$

다. 식 (10)의 Taylor 급수항의 개수는 Frobenius 급수항의 개수와 동일하게 사용하였다.

그림 2는 주기 12분 및 24분에 대하여 해안선을 따라 본 연구에서 유도한 해석해와 기존에 유도된 해석해의 무차원화된 파고(즉, 입사파 대비 계산된 파고의 비)를 비교한 것이다. $\gamma=2$ 및 $\gamma=1$ 인 경우 모두, 본 연구에서 유도된 해석해와 기존의 해석해가 일치하였다. 입사파의 주기가 24분인 경우, 해안선을 따른 파고의 변화는 크지 않으나 입사파의 주기가 12분인 경우에는, 주기의 감소에 따라 굴절에 의한 파 에너지의 집중이 더 크게 나타나 파고 변화가 두드러진 것을 볼 수 있었다. 섬의 전면($\theta=0^\circ$)에서는 굴절에 의해 집중된 파와 섬 벽면에서 반사된 파가 중첩하여 최대 파고가 발생하였다. 또한 섬 후면 $\theta=120^\circ$ 부근에서 최소 파고가 발생하였으며 더 뒤로 갈수록 ($\theta>120^\circ$) 섬의 양쪽에서 회절된 파가 만나 파고가 증가하는 것을 알 수 있었다. 이것은 지진해일과 같은 장파가 섬에 내습할 때 섬의 뒷면이 안전하지 않다는 것을 의미한다. 이러한 현상은 $\gamma=2$ 인 경우에 더욱 현저하게 발생하였다.

3.3 해의 적용

검증된 해를 이용하여 입사파의 주기, 둔덕의 반경, 또는 정점의 위치 등을 변화시키면서 다양한 분석을 하였다. 실제 지형에 근접한 지형을 고려하기 위하여 Bruun(1954)이 주장한 수심을 결정하는 차수값을 $\gamma=2/3$ 로 하였다.

그림 3은 $r_0=10$ km, $r_1=30$ km, $h_1=4$ km 및 $h_0=h_1\gamma=1.923$ km의 조건에서 입사파의 주기를 바꾸면서 섬 둘레의 무차원화된 파고를 계산한 결과이다. 입사파의 주기는 9분, 12분, 18분, 24분으로 증가시켰으며 이에 따라 일정 수심 영역에서의 상대수심(kh)은 0.235, 0.176, 0.117, 0.088로 장파의 조건을 만족하면서 감소하였다. 모든 주기에 대하여 섬 전면에서 가장 큰 파고가 관측되었다. 측면으로 돌아갈수록 파고는 감소하여 후면 $\theta=120^\circ$ 부근에서 최소값이 나타났고, 더 뒤로 갈수록 파고는 다시 증가하였다. 입사파의 주기가 짧을수록 무차원화된 파고의 최대값은 더 커졌고 최소값은 더 작아졌다.

그림 4는 둔덕의 반지름을 변화시키면서 무차원화된 파고를 분석한 것이다. 앞서 경우와 마찬가지로 정점은 자유 수면에 고정시켰으며 둔덕의 반지름을 제외한 나머지 조건들

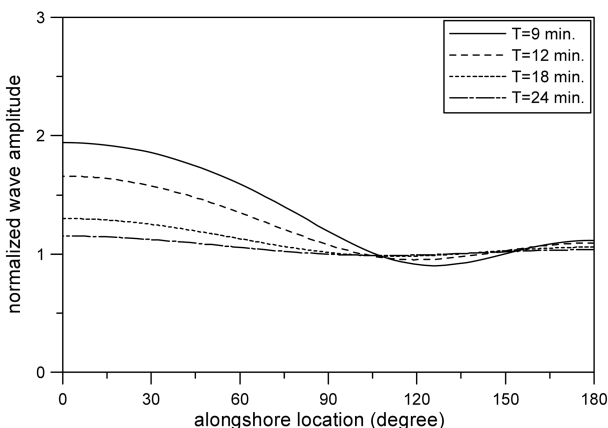


Fig. 3 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline for different incident wave periods

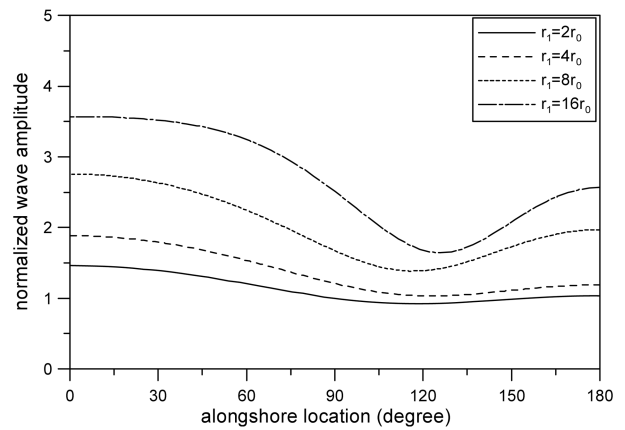


Fig. 4 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline for different radii of shoal

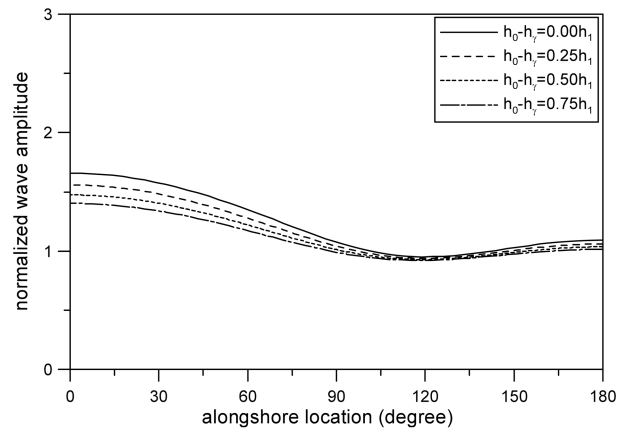


Fig. 5 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline for different levels of vertex

은 $r_0=10$ km, $h_1=4$ km, 및 $T=12$ 분으로 고정하였다. 둔덕의 반지름은 $r_1=2r_0, 4r_0, 8r_0, 16r_0$ 로 증가시켰으며 이에 따라 h_0 의 값은 2.52, 1.59, 1.00, 0.63 km으로 변화하였다. 둔덕의 반지름이 증가할수록 둔덕의 수평 영역은 증가하고 섬 ($r=r_0$)벽에서의 수심은 감소하였다. 따라서 보다 많은 파 에너지가 섬 방향으로 굴절되어 높은 파고가 발생하는 것을 알 수 있었다. 최대 파고는 반지름에 상관없이 섬 전면에서 발생하였으나 최소 파고는 반지름이 증가할수록 섬 후면으로 이동하였다.

그림 5는 둔덕 정점의 위치를 변화시키면서 무차원화된 파고를 계산하여 비교한 결과이다. 나머지 조건들은 다음과 같이 고정하였다: $r_0=10$ km, $r_1=30$ km, $r_1=4$ km, 및 $T=12$ 분. 정점의 위치는 $h_0-h_1=0, 0.25 h_1, 0.5 h_1, 0.75 h_1$ 으로 변화시켰으며 각각에 해당하는 h_0 의 값은 1.92, 2.44, 2.96, 3.48 km이 되었다. 둔덕 정점의 위치가 낮을수록 섬 벽에서의 수심은 감소하고, 따라서 굴절 현상은 약하게 발생하여 섬 주위의 파고는 감소하게 된다. 그러나 파고 감소의 폭은 미미하였다.

4. 원형 섬의 경우에 대한 해석해

4.1 해의 유도

다음으로, 그림 6과 같이 원형 섬의 경우에 대해 해석해를 유도하였다.

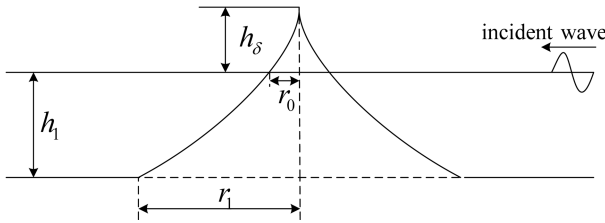


Fig. 6 Computational domain for wave over a circular island

이 경우, 수심은 다음과 같이 표현된다.

$$h = \begin{cases} h_\delta \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\gamma - 1 \right], & r_0 \leq r < r_1 \\ h_1, & r \geq r_1 \end{cases} \quad (20)$$

여기서, h_δ 는 r_0 , r_1 , h_1 및 γ 에 의해 결정되는 자유수면으로부터의 정점의 높이이다.

$$h_\delta = \frac{h_1}{[(r_1/r_0)^\gamma - 1]} \quad (21)$$

해안선 부근에서의 수심의 변화가 그림 6과 같은 경우, 이 지점에서의 경계 조건은 다음과 같이 주어질 수 있다 (Mei, 1989).

$$\lim_{r \rightarrow r_0} h \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \quad (22)$$

해석해의 적용 영역을 Frobenius 급수해의 수렴 영역 내에 두기 위하여 식 (7)의 변수치환기법을 사용하였다. 그 결과, 수심을 고려한 지배 방정식은 다음과 같이 된다.

$$t(1-t) \frac{d^2 R_n}{dt^2} + (1-t) \frac{dR_n}{dt} + \left[\frac{\omega^2 r_0^2}{gh\delta^\gamma} (1-r)^{-\frac{2}{\gamma}+1} - t \left(\frac{n}{\gamma} \right)^2 \right] R_n = 0 \quad (23)$$

식 (9)로 표현되는 Frobenius 급수를 식 (23)에 대입하면 다음과 같이 c 의 값을 얻을 수 있으며,

$$c=0 \quad (24)$$

R_n 및 η_i 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_n = \alpha_{0,n} R_{0,n}(t) \quad (25)$$

$$\eta_i = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{0,n} R_{0,n}(t)] \cos n\theta \quad (26)$$

여기서 아래첨자 i 는 수심이 변하는 섬의 내부 영역을 나타낸다. 섬 주위를 둘러싸고 있는 일정 수심 영역은 식 (16)으로 표현할 수 있다. 식 (16) 및 (26)의 미지수들은 $r=r_1$ 에서 정의되는 식 (18) 및 (19)의 정합 조건을 사용하여 구할 수 있다. 식 (22)의 경계식은 식 (18) 및 (19)에 의해 $\alpha_{0,n}$ 값이 결정되면 자동적으로 만족된다.

4.2 해의 검증

본 장에서 유도된 해석해는 $\gamma=1$ 인 경우에 유도된 Zhang과 Zhu(1994)의 해석해와 비교하여 검증하였다. 지형 조건은 Homma(1950)의 경우와 비슷하게 $r_0=10$ km, $r_1=30$ km, 및 $h_1=4$ km로 하였다. 이 경우 h_0 는 Homma의 경우가 $h_0=4/3$ km인 반면에 본 장에서 유도된 해석해의 경우에는 $h_0=0$

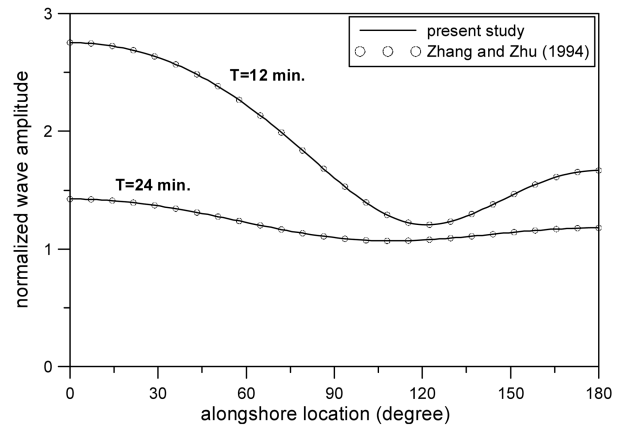


Fig. 7 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline for a conical island with $\gamma=1$

km이 된다.

그림 7은 해안선을 따른 무차원 파고의 변화를 나타낸 결과이다. 그림 2(b)의 결과와 비슷한 결과가 나타났다. 섬 전면에서 가장 큰 파고가 발생하였으며 후면으로 갈수록 감소하여 $\theta=120^\circ$ 에서 최소값을 가진 후에 더 뒤에서는 다시 증가하였다. h_0 의 값이 그림 2(b)에 비해 작기 때문에 굴절 현상이 더욱 두드러지게 발생하여 섬 전체적으로 그림 2(b)보다 높은 파고가 발생하는 것을 볼 수 있었다.

4.3 해의 적용

이 장에서는 차수가 $\gamma=2/3$ 및 $\gamma=3$ 인 경우에 대하여 섬 주위에서의 파의 편향에 대하여 살펴보았다. 지형 조건은 앞의 경우와 마찬가지로 $r_0=10$ km, $r_1=30$ km 및 $h_1=4$ km로 설정하였다. 축 대칭 지형처럼 수심의 변화가 섬 중심으로부터 떨어진 거리로만 변할 때, 파의 꺾임은 상대 수심 값에 의하여 결정된다(Mei, 1989). 즉, 파향각 θ 를 다음의 식으로 계산할 수 있다.

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{|\kappa|}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (27)$$

또는, 적분 형태로,

$$\theta - \theta_1 = \pm \kappa \int_{r_1}^r \frac{dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (28)$$

여기서, $\kappa = k r \sin \theta (= k_1 r_1 \sin \theta_1)$ 은 $r=r_1$ 에서 초기 위치와 그 위치에서의 입사각에 의해 결정되는 상수이다. 식 (27)을 보면, 파선은 $kr > \kappa$ 인 조건에서만 존재한다. 임계 반지름 $r=r_*$ 에서, $kr = \kappa$ 가 되며 이에 해당하는 파향각 $\theta = \theta_*$ 는 다음과 같이 된다.

$$\theta_* - \theta_1 = \pm \kappa \int_{r_1}^{r_*} \frac{dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (29)$$

식 (27)에서 (r_* , θ_*)인 지점에서 $dr/d\theta=0$ 인 경우, 파선은 섬의 중심에서 멀어질 수도 있다.

그림 8은 서로 다른 차수에 대하여 r 값의 변화에 따른 상대수심 (kr) 값의 변화를 나타낸 그림이다. $\gamma=3$ 인 경우, r 값이 섬의 끝($r=30$ km)에서 해안($r=10$ km)으로 작을수록 상대수심은 꾸준히 증가하여 해안선에서 무한대의 값으로 발산한다. 그러나 $\gamma=2/3$ 인 경우에는 r 이 감소함에 따라 kr 값이 처

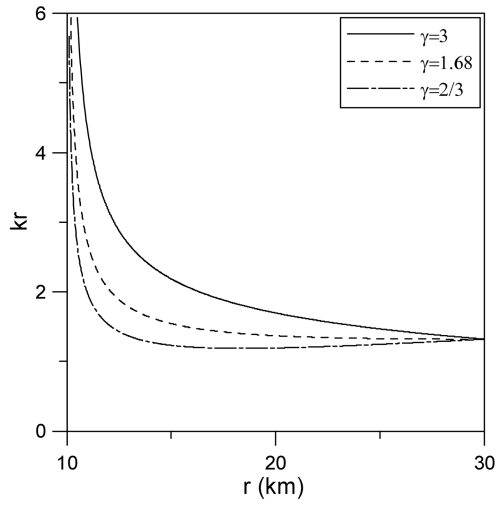


Fig. 8 Variation of relative water depths kr with radius r

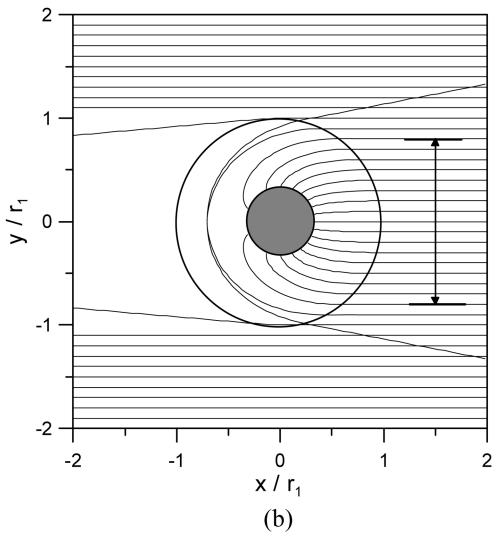
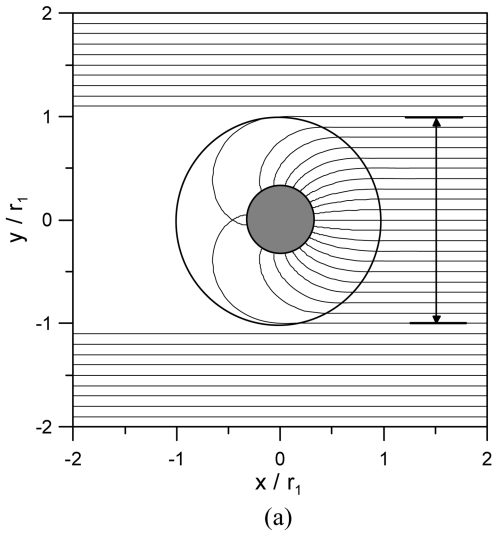


Fig. 9 Wave rays for a circular island: (a) $\gamma=3$; (b) $\gamma=2/3$.

음에는 감소하여 $r=18.36$ km에서 최소값 $kr=1.19$ 이 나타난 후 다시 증가하여 $r=10$ km에서 무한대로 발산한다. 이러한 경향은 차수값이 $\gamma \leq 1.68$ 인 경우에 항상 발생하였다.

그림 9(a)에 $\gamma=3$ 인 경우에 계산된 파향선을 보였다. 이 경우에는 섬 위를 진행하는 모든 파가 섬의 중심으로 모였다. 그림 9(b)에 보인 $r=2/3$ 인 경우의 파향선을 보면 섬의 중심 근처로 진입하는 파들은 섬의 중심으로 모인 반면에

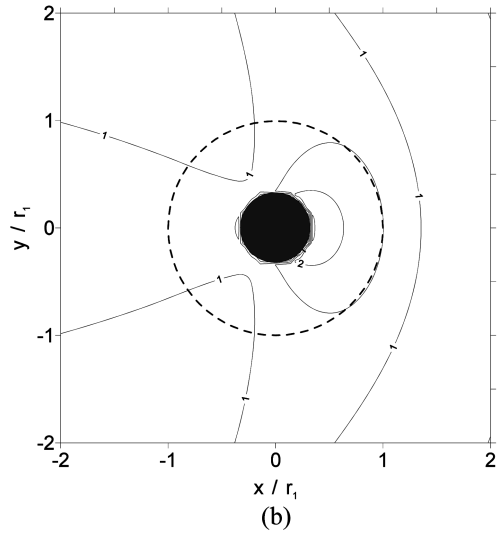
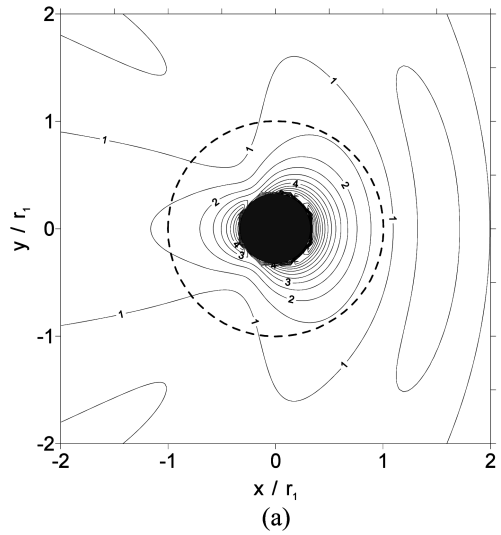


Fig. 10 Contour of normalized wave amplitudes for a circular island: (a) $\gamma=3$; (b) $\gamma=2/3$

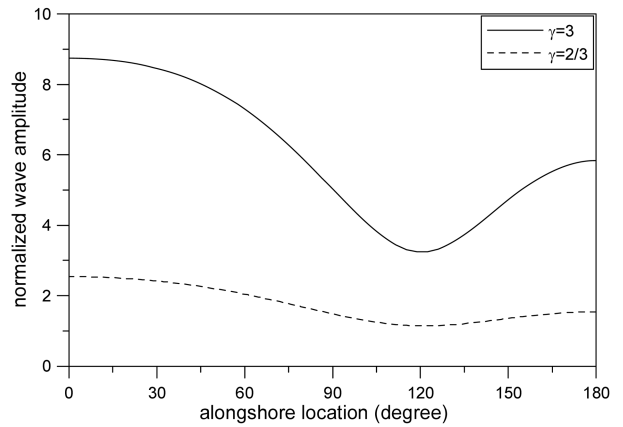


Fig. 11 Variation of normalized wave amplitudes along the coastline for different powers of radial distance

섬의 중심에서 먼 곳으로 향한 파들은 해안선에 도달하지 않고 섬에서 떨어졌다.

그림 10(a) 및 (b)는 각각 $\gamma=3$ 및 $2/3$ 인 경우에 대하여 섬 주위의 파고 등고선을 나타낸 그림이며 그림 11(a) 및 (b)는 각각 경우에 해안선에서의 무차원 파고를 나타낸 그림이다. 전체적으로 $\gamma=3$ 인 경우 파고가 $2/3$ 인 경우보다 더 높았다. 해안선에서의 무차원 파고의 최대값은 $\gamma=3$ 및 $\gamma=2/3$ 인 경우에 각각 9.75 및 2.54가 되었다.

본 연구에서는 두 가지 유형의 축 대칭 지형에 대해 장파의 해석해를 유도하였다. 첫 번째 지형은 둔덕 위에 원기둥 모양의 섬이 있는 경우이고, 두 번째 지형은 원형 섬이 있는 경우이다. 모든 경우 바닥의 수심이 섬의 중심에서 떨어진 거리에 임의 값의 차수에 비례하여 증가하여 거의 모든 지형에 대해 해석이 가능하게 하였다. 장파의 경우 지배 방정식을 단순화 시켰으며 편미분 형태의 지배 방정식을 상미분 형태로 변환하기 위하여 변수분리법을 사용하였다. 또한, 변수치환기법을 사용하여 해석해의 적용 영역이 Frobenius 급수해의 수렴영역 안에 두게 한 후 Frobenius 급수기법을 사용하여 해석해를 구하였다. 유도된 해석해를 특정 지역에 대하여 유도된 기존의 해석해들과 비교를 해본 결과 매우 잘 일치하였다.

타당성이 검증된 해석해를 이용하여 차수, 섬의 형상, 또는 입사파의 주기 등을 바꾸면서 다양한 지형 조건 및 파랑 조건에 적용해 보았다. 대부분의 경우 파가 입사하는 섬 전 면에서 가장 큰 파고를 보였으며 해안선을 따라 섬 후면으로 갈수록 파고가 감소하여 $\theta=120^\circ$ 부근에서 최소값이 나타났다. 더 뒤로 가서는 파고가 다시 증가하여 섬 후면에서는 입사 파고보다 높은 파고가 관측되었다. 이러한 현상은 차수가 증가할수록 더 뚜렷하게 발생하였다. 본 연구에서 유도된 해석해는 기존의 해석해보다 다양한 지형에 적용이 가능하며 유도된 두 종류의 해석해를 합치면 더욱 다양한 지형에 대하여도 해석해를 구할 수가 있다.

감사의 글

본 논문은 중소기업청의 “산학연 공동기술개발 컨소시엄사업(공동연구: (주)세광종합기술단)”의 지원을 받았다.

- Bruun, P. (1954) *Coast Erosion and the Development of Beach Profiles*. Technical Memo, Vol. 44, US Army Corps of Engineering, Beach Erosion Board, Washington, DC.
- Dean, R.G. (1977) *Equilibrium Beach Profiles: U.S. Atlantic and Gulf Coasts*. Ocean Engineering Report No. 12, University of Delaware.
- Homma, S. (1950) On the behavior of seismic sea waves around circular island. *Geophys. Mag.*, Vol. 21, pp. 199-208.
- Lee, C., Cho, Y.-S., and Yum, K. (2001) Internal generation of waves for extended Boussinesq equations. *Coastal Engineering*, Vol. 42, pp. 155-162.
- Lee, C. and Suh, K.D. (1998) Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations. *Coastal Engineering*, Vol. 34, pp. 35-57.
- Lee, C. and Yoon, S.B. (2007) Internal generation of waves on an arc in a rectangular grid system. *Coastal Engineering*, Vol. 54, pp. 357-368.
- Mei, C.C. (1989) *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, Singapore.
- Suh, K.D., Jung, T.H., and Haller, M.C. (2005) Long waves propagating over a circular bowl pit. *Wave Motion*, Vol. 42, pp. 143-154.
- Yu, X. and Zhang, B. (2003) An extended analytic solution for combined refraction and diffraction of long waves over circular shoal. *Ocean Engineering*, Vol. 30, pp. 1253-1267.
- Zhang, Y.L. and Zhu, S.P. (1994) New solutions for the propagation of long water waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, Vol. 278, pp. 391-406.
- Zhu, S.P. and Zhang, Y.L. (1996) Scattering of long waves around a circular island mounted on a conical shoal. *Wave Motion*, Vol. 23, pp. 353-362.

(접수일: 2008.1.30/심사일: 2008.4.2/심사완료일: 2008.5.7)