

흡인식 자기부상시스템의 H_∞ PID 제어기 설계

論文
57-9-22

H_∞ PID Controller Design for an Attraction Type Magnetic Levitation System

金 碩 柱[†] · 金 春 經^{*} · 權 淳 萬^{*}
(Seog-Joo Kim · Chun-Kyung Kim · Soonman Kwon)

Abstract – This paper deals with a linear matrix inequality (LMI) approach to the design of a PID controller for an attraction type magnetic levitation system. First, we convert the H_∞ PID controller problem into a static output feedback problem. We then solve the static output problem by using the recently developed penalty function method. Numerical experiments show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key Words : Magnetic levitation system, PID, Linear matrix inequality,

1. 서 론

흡인식 자기부상시스템은 비접촉 베어링, 저속 또는 중속의 도시형 자기부상 열차, 비접촉 이송장치 등에 널리 활용되고 있다[1]. 하지만 흡인식 자기부상시스템은 공극(air gap)이 작아지면 흡인력이 커지는 개회로 불안정 시스템이다. 흡인식 자기부상시스템을 안정화시키기 위한 제어기 대해서 많은 연구가 이루어졌으며 대표적인 예가 공극과 가속도 센서를 이용한 상태궤환제어기[1]이다. 또한 현대의 장인제어 이론을 이용한 μ -합성법[2]과 비선형 H_∞ 제어기[3]에 관한 연구도 발표되었으며 고장허용 제어의 관점에서는 동시안정화(simultaneous stabilization)를 이용하는 방법[4]도 제안되었다.

본 논문은 간단하고 구현이 용이하여 산업현장에서 가장 많이 사용하는 PID(Proportional-Integral-Derivative) 제어기로[5] H_∞ 성능을 고려한 자기부상시스템의 제어기를 설계하고자 한다. 이것은 부상 제어기로 상태궤환제어기를 사용한다고 하더라도 가속도 센서가 고장이 나는 경우에 공극을 이용한 PID 제어기로 부상계를 유지할 수 있다는 것을 의미한다.

한편, 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality; LMI)은 많은 제어기 설계 및 해석 문제를 수치적으로 빠르게 풀 수 있는 도구로서 각광을 받고 있다. 기존의 방법으로 풀 수 있는 문제뿐만 아니라 풀 수 없었던 문제까지도 LMI 형태로 표현이 가능하다면 내접법(Interior Point Method)을 이용하여 매우 효율적으로 해를 구할 수 있다. 하지만 LMI에 있어서도 축소차수 제어기(reduced-order controller)나 PID 제어기와 같이 고정된 구조를 가지는 제어기 문제는 비볼록

(nonconvex) 문제로 보통의 경우 반복법[6,7]을 사용하여 해를 구하게 된다.

본 논문에서는 흡인식 자기부상시스템의 H_∞ PID 제어기 설계를 정적출력궤환 H_∞ 제어문제로 변환하고 변환된 H_∞ 제어문제를 반복법인 페널티 함수법[7]을 이용하여 풀고자 하며 시뮬레이션을 통하여 그 효용성을 입증하고자 한다.

2. 자기부상시스템

2.1 자기부상시스템의 모델링

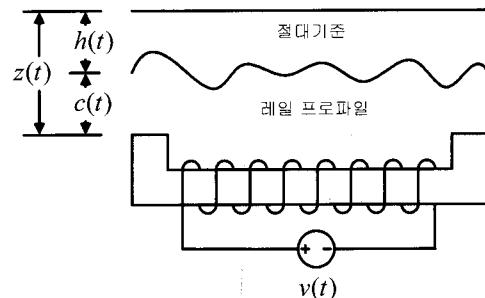


그림 1 흡인식 자기부상 시스템

Fig. 1 Attraction type magnetic levitation system

그림 1에 흡인식 자기부상시스템을 표시하였다. 마그네트의 절대위치를 $z(t)$, 상대위치를 $c(t)$, 인가전압을 $v(t)$, 마그네트에 흐르는 전류를 $i(t)$ 라 하자. 그러면 마그네트와 레일 사이에 작용하는 흡인력은 마그네트에 흐르는 전류의 제곱에 비례하고 마그네트와 레일 사이의 공극의 제곱에 반비례하기 때문에 다음과 같이 표현된다.

$$F(i, c) = \frac{\mu_0 N^2 A}{4} \left(\frac{i}{c} \right)^2 \quad (1)$$

여기서 μ_0 는 투자율, N 은 코일의 던수, A 는 마그네트의 단면적이다. 또한 마그네트의 인덕턴스는 전류에 비례하고 공

[†] 교신저자, 正會員 : 韓國電氣研究院 計測制御그룹

E-mail : sjkim@keri.re.kr

* 正會員 : 韓國電氣研究院 計測制御그룹

接受日字 : 2008年 7月 9日

最終完了 : 2008年 8月 8日

극에 반비례하므로 다음과 같고

$$L(c, i) = \frac{\mu_0 N^2 A}{2} \left(\frac{i}{c} \right) \quad (2)$$

마그네트의 전압 방정식과 운동 방정식은 각각 다음과 같이 비선형 상태방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) + \frac{d}{dt}(L(c, i)i) \\ \ddot{mz} &= -F(i, c) + f_d(t) + mg \end{aligned} \quad (3)$$

이제 (3)을 공칭전류와 공칭공극 $i_0, z_0(c_0)$ 에서 힘과 전류의 관계로 선형화하면 다음과 같다[1].

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{c}(t) \\ \Delta\ddot{z}(t) \\ \Delta\dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_z}{m} & 0 & -\frac{k_i}{m} \\ 0 & \frac{k_z}{k_i} - \frac{R}{L_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c(t) \\ \Delta z(t) \\ \Delta i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{k_z}{k_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d(t) \\ \Delta h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_0} \end{bmatrix} \Delta v(t) \quad (4)$$

이때 선형화 상수 k_i, k_z 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$k_i = \left. \frac{\partial F(i, z)}{\partial i} \right|_{(i_0, z_0)}, \quad k_z = \left. \frac{\partial F(i, z)}{\partial z} \right|_{(i_0, z_0)}$$

여기서 L_0 은 (i_0, z_0) 에서의 마그네트 인덕턴스, R 은 마그네트의 저항, m 은 마그네트의 질량, f_d 는 마그네트에 가해지는 외란(disturbance force)이다.

이와 같은 흡인식 자기부상시스템에서 제어기의 목적은 외부의 하중 외란(f_d)과 레일외란(h)에 대하여 안정한 부상력을 발생시켜 일정한 공극이 유지되도록 마그네트에 가해지는 전압을 제어하는 것이다. 레일외란의 경우 마그네트는 상대위치 $c(t)$ 의 고주파 성분에 대해서는 충분한 잡음 제거능력을 가지면서 저주파 성분에 대해서는 추종능력을 가지게 하는 것이 목적이다.

2.2 제어기 모델링

다음과 같은 일반적인 선형시불변 시스템을 생각하기로 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 은 상태벡터, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ 은 외부입력 벡터, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 는 제어입력 벡터, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 는 측정벡터이고 $z(t) \in \mathbb{R}^r$ 은 제어하고자 하는 출력벡터이다. 또한 $\hat{A}, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_{ij}$ 는 주어지는 시스템 행렬이고 $\hat{D}_{22}=0$ 이라 하여도 일반성을 잃지 않는다. 이때 $n_c < n$ 의 차수를 가지는 제어기는 상태변수를 $x_c(t)$ 로 놓으면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

와 같고 구해야 할 제어기 변수는 다음과 같으므로

$$K = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \quad (7)$$

(5)와 (6)을 페루프 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= A_d x_d(t) + B_d w(t) \\ z(t) &= C_d x_d(t) + D_d w(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $x_d = [x^T \ x_c^T]^T$ 이고

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \hat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_d &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, D_d = \hat{D}_{11} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \hat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 따라서 제어기 이득 K 는 다음과 같은 시스템 변수를 가지는

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \hat{B}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ D_{11} &= \hat{D}_{11}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} \hat{D}_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} \hat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

시스템의 정적출력궤환 제어기로 나타낼 수 있다.

페루프 방정식 (8)에서 H_∞ 성능이 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 일 조건은 Bounded Real Lemma와 소거정리[6]를 이용하면 다음 (10)과 (11)을 만족하는 양한정(positive definite) 행렬 $R=R^T > 0, S=S^T > 0$ 가 존재하는 것과 동가이다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^\perp &\left[\begin{array}{ccc} AR+RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{array} \right] \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \\ \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}^\perp &\left[\begin{array}{ccc} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \\ \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$RS = I \quad (11)$$

여기서 $<$ 는 좌변의 행렬이 음한정(negative definite)이라는 것을 나타내며 X^\perp 는 $X^\top X = 0$ 과 $X^\perp X^\top = 0$ 을 만족하는 행렬을 나타내는 기호이다. 또한 (11)은 제어기의 차수에 관계된 조건으로 전차수 제어기일 경우에는 없는 비볼록 조건이다. 조건 (11)을 다르게 표현하면 계수(rank)조건으로 나타낼 수 있기 때문에 LMI (10)과 조건 (11)을 계수조건부 LMI라고도 부른다. 계수조건부 LMI는 비볼록이기 때문에 반복법을 이용한 수치적인 방법으로 해를 구하는 것이 보통이다[6,7].

이제 이 방법을 PID 제어기 설계에 적용해 보기로 한다. 단일 입출력을 가지는 PID 제어기는 다음과 같이 표현된다.

$$C(s) = K_p + K_i \frac{1}{s + \tau_i} + K_d \frac{s}{\tau_d s + 1} \quad (12)$$

여기서 τ_i 와 τ_d 는 각각 적분값과 미분값의 크기를 제한하기 위한 상수이다. 전달함수 (12)를 상태공간으로 표현하면

$$A_c = \begin{bmatrix} -\tau_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} K_i & -\frac{K_d}{\tau_d} \end{bmatrix}, D_c = K_p + \frac{K_d}{\tau_d}$$

와 같이 표시되고 PID 이득을 $K_r = [K_p \ K_i \ K_d]$ 로 놓으면

$$K = \begin{bmatrix} D_c C_c \\ B_c A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\tau_i & 0 \\ \frac{1}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [K_p \ K_i \ K_d] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}$$

된다. 이제 시스템 방정식을 K_r 에 관한 출력궤환으로 하여 다시 표현하면 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & 0 \\ \hat{C}_2 & -\tau_i & 0 \\ \hat{C}_2 & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\hat{C}_2}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{D}_{21} & \frac{\hat{D}_{21}}{\tau_d} \end{bmatrix}, B_2 = [B_2 \ 0 \ 0], C_1 = [\hat{C}_1 \ 0 \ 0]$$

$$D_{11} = \hat{D}_{11}, D_{12} = \hat{D}_{12}, D_{21} = \left[\hat{D}_{21} \ 0 \ \frac{\hat{D}_{21}}{\tau_d} \right]$$

(13)

즉, PID 제어기의 이득은 (13)의 A, B_i, C_i, D_{ij} 를 시스템 행렬로 가지는 시스템의 정적출력궤환 제어기의 이득으로 표현된다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서 적용하고자 하는 단일 마그네트 시스템은 전기연구원의 실험용 마그네트 부상시스템이며 주요 제원은 다음과 같다.

표 1 마그네트의 사양

Table 1 Magnet specification

질량	3.3 Kg
공칭 인덕턴스	0.092 H
공칭공극	4 mm
k_i	36.3 Kg/A
k_z	15165 Kg/m
저항	3.4 Ω

이때 제어목적을 위한 변수는

$$w = \begin{bmatrix} f_d(t) \\ \dot{A}h(t) \end{bmatrix}, z = [c(t)]$$

로 놓고 시스템의 H_∞ 성능 $\|T_{zw}\|_\infty$ 를 최소화시키는 PID 제어기를 설계하였다. 여기서 H_∞ 성능 지표는 부상 마그네트에 가해지는 하중외란과 레일의 불균일성 외란에 대해서 공극을 일정하게 유지하도록 정하였다. 이때 하중외란과 레일 외란에 대한 하중함수는 다음과 같이 저역통과 필터와 고역통과 필터를 사용하였다.

$$W_1 = \frac{1}{5s+1}, W_2 = \frac{20s}{20s+1}$$

이외에도 여러 가지의 하중함수를 사용하였지만 거의 비슷한 결과를 얻었다.

제어기 이득을 얻기 위한 계수조건부 LMI (10), (11)의 해는 $\tau_i = 0.001$ 와 $\tau_d = 0.01$ 로 하고 페널티 함수법[7]을 이용하여 구하였다. 페널티 함수법은 그림 2와 같이 약500번의 반복횟수만에 $\gamma = 0.085$ 을 얻었으며 PID 이득은 다음과 같았다.

$$K_p = 1485.5, K_i = 31.5, K_d = 5.3$$

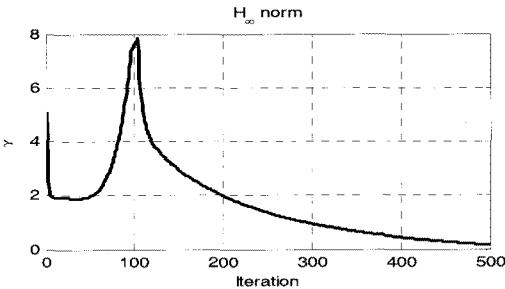
그림 2 페널티 함수법에서 반복횟수에 따른 H_∞ 놈Fig. 2 H_∞ norm of the penalty function method

그림 2에서 반복횟수 약 100번까지 H_∞ 놈이 증가하는 이유는 계수조건부 LMI 해를 구하는 방법인 페널티 함수법이 다음과 같은 형태를 취하고 있기 때문이다.

$$\min \gamma + \rho p(x)$$

여기서 ρ 는 페널티 변수이고 $p(x)$ 는 계수를 위반하면 0보다 커지는 페널티 함수이다. 즉, 계수를 만족시키기 위해서 페널티 변수 ρ 를 증가시키면 계수조건을 만족하는 가능해(feasible solution)를 구할 때까지는 γ 가 증가하다는 것을 의미한다. 그림 2에서 약 100회의 반복횟수 만에 계수조건을 만족하는 가능해가 얻어졌다고 볼 수 있다. 이 방법은 모든 경우에 해를 찾을 수 있는 전역적 알고리즘은 아니지만 몇몇 제어기를 설계하는 경우에 매우 유용하게 사용할 수 있다[7].

설계된 PID 제어기의 성능을 시험하기 위하여 비선형 모델(3)에 대하여 두 가지의 시뮬레이션을 하였으며 단일 입출력 시스템에 대해서 PID 이득 집합을 구할 수 있는 알고리즘[8]과 비교를 하였다. 먼저 그림 3은 1초 후에 마그네트에 10%의 하중 외란이 가해졌을 때 공극의 응답에 관한 것이다. 그림 3에서 10% 정도 질량이 무거워졌을 때 공극은 약 1.1mm 정도 늘어났다 다시 복원되는 것을 알 수 있다. 그림 4는 1초 후에 레일 높이가 약 1cm 정도 스텝으로 변화했을 때 공극의 응답을 나타낸 것이다. 그림 4에서 레일에 1cm 정도 매우 큰 단차가 있어도 공극은 약 ±0.6mm 이하로 변하는 것을 알 수 있다. 또한 2가지 시뮬레이션 모두 Ho[8]의 방법과 거의 유사한 결과를 보임을 알 수 있다. 하지만 본 논문에서 제시하는 알고리즘은 다중 입출력 시스템에도 적용할 수 있으며 순수 미분기와 적분기를 사용하는 Ho의 방법보다 적분기와 미분기의 이득을 제한하는 전달함수 (12)와 같은 형태를 사용함으로써 실용적이라고 할 수 있다.

이상에서 H_∞ 성능을 고려하여 설계한 PID 제어기도 외부의 외란에 충분한 대처 능력이 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문은 흡인식 자기부상 시스템의 H_{∞} 성능을 최대화하는 PID 제어기를 설계하는 방법에 대해서 서술하였다. PID 제어기 문제를 정적 출력 계획 H_{∞} 문제로 바꾸고 패널티 함수법을 이용하여 해를 구하였으며 시뮬레이션 결과 H_{∞} 성능을 고려한 PID 제어기를 쉽게 설계할 수 있음을 알 수 있었다.

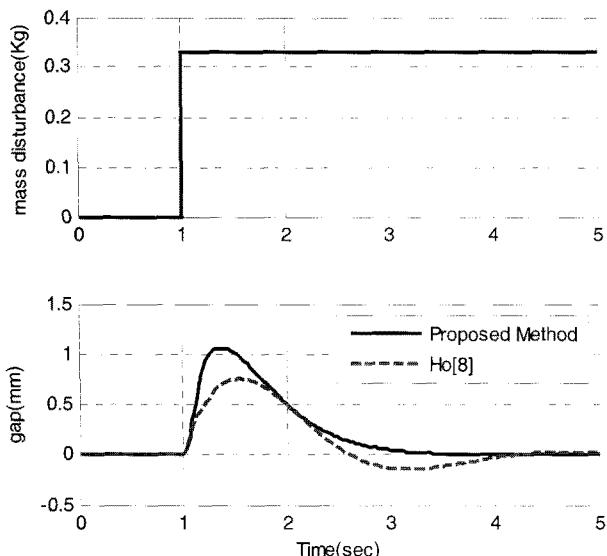


그림 3 하중외란에 대한 공극 응답

Fig. 3 Gap response to weight disturbance

참 고 문 헌

- [1] P. K. Shina, "Electromagnetic Suspension Dynamics & Control", Peter Peregrinus Ltd. 1987.
- [2] M. Fujiita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K. Uchida, " μ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, No. 3, pp. 530-536, 1995.
- [3] P. K. Shina and A. N. Pechev, "Nonlinear H_{∞} Controllers for Electromagnetic Suspension Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 49, No. 4, pp. 563-568, 2004.
- [4] Z. Zhang, Z. Long, L. She, and W. Chang, "Fault-tolerant Control for Maglev Suspension System based on Simultaneous Stabilization", Proc. IEEE International Conf. on Automation and Logistics, pp. 299-303, 2007.
- [5] K. J. Astrom, C. C. Hang, P. Persson, and W. K. Ho, "Towards Intelligent PID Control", Automatica, Vol. 28, No. 1, pp. 1-9, 1992.
- [6] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176, 1997.
- [7] S. J. Kim and Y. H. Moon, "Structurally constrained H_2 and H_{∞} control: A rank-constrained LMI approach", Automatica, vol. 42, no. 9, pp. 1583-1588, 2006.
- [8] M. T. Ho, "Synthesis of H_{∞} PID controllers: A parametric approach", Automatica, Vol. 39, pp. 1069-1075, 2003.

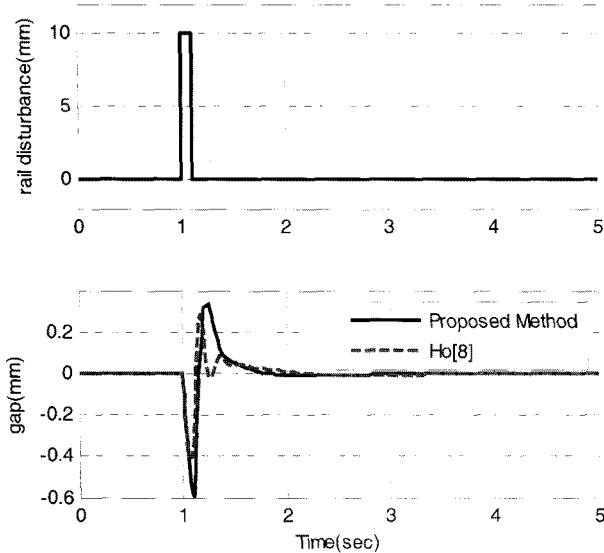


그림 4 레일 외란에 대한 공극 응답

Fig. 4 Gap response to rail disturbance