응용통계연구 (2008)
21(4), 631–638

분위수 회귀를 이용한 가속수명시험 자료 분석

노지연[1] · 김희정[2] · 나명환[3]

[1]전남대학교 통계학과; [2]전남대학교 통계학과; [3]전남대학교 통계학과

(2008년 7월 접수, 2008년 7월 채택)

요 약

가속수명시험은 실제 사용조건보다 열악한 수준으로 시험하여 빠른 기간 내에 제품의 고장자료를 얻고, 실제 사용조건에서의 수명관련 품질 특성치를 추정하는 방법이다. 본 논문에서는 가속수명 자료를 이용하여 분위수 회귀추정 방법을 통해 정상 조건에서의 수명을 추정하는 방법을 제안한다. 대표적인 가속 스트레스인 온도와 전압을 갖는 실제 자료에 분위수 회귀 모형을 적용하여 수명을 추정하였다.

주요용어: 가속수명시험, 분위수 회귀, 아레니우스 모형, 역승 모형.

1. 서론

가속수명시험이란 전압, 온도, 진동, 압력 등 제품의 수명에 큰 영향을 미치는 변수의 스트레스 수준을 실제 사용조건 보다 열악한 수준으로 시험하는 것을 말한다. 실제조건과 가속화된 수준 사이에 일정한 규칙성이 존재한다고 보고, 가속화된 수준에서 더 짧은 시간 동안 발생된 고장 데이터를 이용하여 실제 사용조건에서의 수명을 추정한다. 이러한 가속수명시험은 제품의 성능 시험에 소비되는 시간을 단축할 수 있어서 개발기간을 단축가능하고, 이로 인한 제품의 경쟁력 향상에 도움이 된다. 가속수명시험에 관한 정의 및 여러 가지 분석 방법은 윤상운 (1994)이나 Elsayed (1996)을 참조 바란다.

본 논문에서는 수명과 스트레스간의 관계식으로 널리 사용되는 아레니우스 관계식과 역승 관계식을 다룬다. 아레니우스 관계식은 제품의 수명이 온도의 함수로 나타내어지는 경우에 주로 사용된다. 특히, 화학적 반응이나 금속의 확산 작용 때문에 고장이 발생하는 제품을 표현하기 위해 사용된다. 또한, 역승 관계식은 전압, 부하 등 온도 이외의 스트레스를 이용하여 절연체, 베어링, 백열전구 등의 가속수명시험에서 수명과 스트레스의 관계를 나타내는데 사용되는 모형이다. 역승 관계식은 수명이 가속화 스트레스 변수의 역수의 함수로 나타내어진다고 표현한다. 이들 관계식에서 명목수명은 로그변환을 통하여 온도(절대온도 역수)나 전압 등의 스트레스와 선형함수로 표현될 수 있고, 명목수명은 특정 백분위수(10%, 50%, 63.2%, 90% 등)로 나타내진다. 특히 수명이 대수정규(log-normal) 분포를 따른다고 가정 할 수 있는 경우는 50% 즉, 중위수에서 대수수명은 절대온도의 역수와 선형식을 이룬다. 그리고 수명이 와이블분포를 따른다고 가정되는 경우는 63.2% 백분위수에서 대수수명은 절대온도의 역수와 선형식을 이룬다. 수명과 스트레스간의 모형에 대한 추정방법으로는 각 모형이 확률지 상에서 직선으로

[1](500-757) 광주시 북구 용봉로 333, 전남대학교 통계학과, 대학원생. E-mail: sophist17@naver.com
[2]교신저자: (500-757) 광주시 북구 용봉로 333, 전남대학교 통계학과, 박사후과정생.
E-mail: 0909hehe@hanmail.net
[3](500-757) 광주시 북구 용봉로 333, 전남대학교 통계학과, 교수. E-mail: nmh@chonnam.ac.kr

표현된다는 점을 이용하는 그래프 분석 방법과 최소제곱법 추정 방법이 사용되고 있다. 본 논문에서는 단순선형회귀분석을 보완한 개념인 분위수 회귀추정 방법을 제안하고 있다. 분위수 회귀 추정법은 Koenker와 Bassett (1978)에 의해 소개된 방법으로 선형회귀 모형에서의 회귀계수 추정을 위한 준모수적 방법이다. 분위수 회귀는 최소제곱법이 조건부 평균 함수만을 추정하는 것에 반해 종속변수의 조건부 분위수 함수들을 추정함으로써 조건부 분포의 특성에 대한 더 자세한 정보를 제공한다. 분위수 회귀에 대한 자세한 내용은 박범조 (2003)나 Koenker와 Hallock (2001)을 참조바란다. Fitzenberger와 Wilke (2005)는 분위수 회귀 추정법이 이상치나 오차항의 분포에 민감하게 반응하지 않는다는 특징을 밝혔으며, 자료가 정규분포를 따르지 않는 경우에도 뛰어난 성능을 갖는 방법이라 하였다.

2. 가속수명시험

수명과 스트레스 간의 관계는 보통 가속화되는 스트레스 변수와 다른 변수들의 함수 형태로 나타내어진다. 여기서는 많이 사용되는 관계식으로 온도 가속화 시험에 대한 아레니우스 관계식과 그 외의 스트레스에 대한 역승 관계식 두 가지를 다룬다.

2.1. 아레니우스–대수정규 모형

아레니우스 관계식은 제품의 수명이 온도의 함수로 나타내어지는 경우에 널리 사용되는 관계식으로 아래와 같이 온도에 의한 화학 반응율이 온도에 관한 식으로 주어진다.

$$\text{화학 반응율}(r) = A' \exp\left[-\frac{E}{kT}\right],$$

여기서, E는 반응의 활성화 에너지로 단위는 전자볼트(eV)이고, k는 볼츠만 기체상수($8.6173 \times 10^{-5} e\mathrm{V}/^{o}\mathrm{C}$)이고, T는 절대온도(섭씨온도+273.16)이고, A'은 제품의 고장 구조와 시험조건에 따른 상수이다. 아레니우스 모형은 아레니우스 방정식을 가속수명시험에 응용한 것으로, 화학반응이 임계량(critical amount)에 도달하면 고장이 발생한다고 가정한다. 즉,

$$\text{임계값} = \text{반응율} \times \text{고장까지의 시간}.$$

따라서, 고장까지의 시간 t는

$$t = \frac{\text{임계값}}{\text{반응율}} = A \exp\left[\frac{E}{kT}\right]$$

으로 표현될 수 있다. 모형을 로그 변환하여 아래와 같은 선형 식을 얻을 수 있다.

$$\log(L) = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{1}{T}\right).$$

따라서 아레니우스 모형은 명목대수수명, $\log(L)$과 온도의 역수인 $(1/T)$이 선형으로 표현되는 대수선형(log-linear) 관계식이다. 수명은 대부분 특정의 백분위수나 (대수)수명분포의 평균을 택하는데, 일반적으로 50%, 63.2%, 10% 백분위수를 사용한다.

온도가속화 시험의 경우 많은 제품들의 수명분포는 대수정규분포로 설명이 가능하다. 아레니우스–대수정규 모형은 온도에 대한 수명의 아레니우스 관계식과 대수정규분포를 결합한 것으로 생각할 수 있으며, 다음의 세 가지 가정이 만족되어져야 한다.

가정1. 절대온도 T에서 제품의 수명은 모수 μ_T와 σ를 갖는 대수정규분포를 따른다.

가정2. 대수수명의 표준편차 σ는 상수이며, 온도에 독립적이다.

가정3. 절대온도 T에서 대수수명의 평균 μ_T의 로그는 T의 역수에 선형이다.

$$\log(\mu_T) = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{1}{T}\right).$$

이것을 아레니우스 수명관계식이라고 한다. 여기서 모수 γ_0, γ_1과 σ는 제품과 시험방법에 의한 특성치로 자료를 통해 추정되는 값이다. 이것은 절대온도 T에서 고장시간의 누적분포함수가 $F(t) = \Phi((\log t - \mu_T)/\sigma)$ 이므로 온도 T에서 수명에 대한 $100p\%$백분위수 $L_p(T)$는 다음과 같이 주어진다.

$$L_p(T) = \exp\left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{T} + z_p\sigma\right),$$

여기서 z_p는 표준정규분포의 $100p\%$백분위수이다. 특히, $p = 0.5$일 때 $z_p = 0$이므로 우리는 쉽게 아래와 같은 선형식을 얻을 수 있다.

$$\log(L_{0.50}(T)) = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{1}{T}\right).$$

또한, 신뢰성응용 분야에서는 목표로 하는 수명을 구하기 위해 설계온도를 역으로 설정해야 하는데 기대수명 L^*에 대한 설계절대온도 T^*는 다음과 같이 구할수 있다.

$$T^* = \frac{\gamma_1}{\log(L^*) - \gamma_0 - z_p\sigma}.$$

2.2. 아레니우스-와이블 모형

어떤 제품이나 재료의 경우는 온도가 가속화 되는 시험에서 수명이 와이블분포로 나타난다. 아레니우스-와이블 모형의 경우는 아래와 같은 가정이 존재한다.

가정1. 절대온도 T에서 제품의 수명은 척도모수 η_T와 형상모수 β인 와이블 분포를 따른다.

가정2. 와이블 분포의 형상모수 β는 상수이다.

가정3. 절대온도 T에서 척도모수 η_T의 로그는 절대온도 T의 역수에 선형이다.

$$\log(\eta_T) = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{1}{T}\right),$$

여기서 모수 γ_0, γ_1과 β는 제품과 시험방법에 의한 특성치로 자료를 통해 추정되는 값이다. 와이블분포의 누적분포함수를 이용하여 절대온도 T에서의 수명의 $100p\%$백분위수는 다음과 같다.

$$L_p(T) = \eta_T\left[-\log(1-p)\right]^{\frac{1}{\beta}} = \exp\left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{T}\right)\left[-\log(1-p)\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

특별한 경우로 63.2%백분위수의 경우는 $L_{0.632}(T) = \exp(\gamma_0 + \gamma_1/T)$이므로 아래와 같은 선형식을 얻을 수 있다.

$$\log(L_{0.632}(T)) = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{1}{T}\right).$$

특히, $\beta = 1$일 때 아레니우스-와이블 모형을 아레니우스-지수 모형이라 한다. 이것은 수명의 분포가 지수분포로 고장률이 상수인 경우로 사용이 간단한 모형이다.

2.3. 역승–대수정규 모형

역승 모형(inverse power rule model)은 전압, 부하 등 온도 이외의 스트레스를 이용하여 가속수명시험에서 수명과 스트레스의 관계를 함수로 모형화 시키는데 널리 사용되는 모형이다. 가속 스트레스가 V일 때의 명목수명 $L(V)$와 스트레스 V의 관계식은 아래와 같다.

$$L(V) = \frac{A}{V^r},$$

여기서, A와 r은 제품의 구조 및 시험 방법 등에 의한 상수이다. 역승 모형을 로그 변환하면 다음과 같이 선형식으로 표현이 된다.

$$\log(L(V)) = \log A - r \log V = \gamma_0 - \gamma_1 \log V.$$

따라서 역승 모형은 $\log L$와 $\log V$가 선형식으로 표현되는 대수선형(log-linear) 모형이다. 역승–대수정규 모형의 가정은 다음과 같다.

가정1. 스트레스 수준 V에서 제품 수명은 모수 μ_V와 σ를 갖는 대수정규분포를 따른다.

가정2. 대수수명의 표준편차 σ는 상수이다.

가정3. 스트레스 V에서 대수수명의 평균 μ_V의 로그는 스트레스 V의 로그에 선형이다.

$$\log(\mu_V) = \gamma_0 + \gamma_1 \log V,$$

단, $\gamma_1 < 0$이다. 여기서 모수 γ_0, γ_1과 σ는 제품과 시험방법에 의해 얻어지는 특성치로 자료를 통해 추정되는 값이다. 역승–대수정규 모형의 선형식도 위의 가정3.으로 부터 아레니우스–대수정규 모형과 같은 방법으로 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\log(L_{0.50}(V)) = \gamma_0 + \gamma_1 \log V.$$

2.4. 역승–와이블 모형

역승–와이블 모형의 가정은 아래와 같다.

가정1. 스트레스 수준 V에서 제품 수명은 척도모수 η_V와 형상모수 β인 와이블분포를 따른다.

가정2. 와이블 형상모수 β는 상수이다.

가정3. 스트레스 V에서 척도모수 η_V의 로그는 스트레스 V의 로그에 선형이다.

$$\log(\eta_V) = \gamma_0 + \gamma_1 \log V,$$

여기서 모수 γ_0, γ_1과 β는 제품과 시험방법에 의해 구해지는 특성값이다. 와이블 분포의 누적분포함수를 이용하여 아레니우스–와이블 모형과 같이 스트레스 수준 V에서의 수명의 63.2%백분위수의 로그가 스트레스의 로그에 선형을 얻을 수 있다.

$$\log(L_{0.632}(V)) = \gamma_0 + \gamma_1 \log V.$$

3. 분위수 회귀 추정법(Quantile regression estimation)

여기서는 단순선형회귀분석을 보완한 개념인 분위수 회귀추정 방법을 제안하고 있다. 분위수 회귀추정 방법은 Koenker와 Bassett (1978)에 의해 소개한 방법으로 선형회귀 모형에서의 회귀계수 추정을 위한 준모수적 방법으로 이상치나 오차항의 분포에 민감하게 반응하지 않는다는 장점을 갖는다.

반응변수 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$에 대해 Y는 p개의 독립변수(공변량) $X_1, X_2, \ldots, X_p$를 갖고, 아래와 같은 선형 회귀 모형을 가정한다.

$$y_i = x_i'\beta + \epsilon_i,$$

여기서 ϵ_i는 대칭의 중심이 0인 연속확률분포함수 F를 갖는 *i.i.d.* 확률변수이고, β는 추정해야 할 $p\times 1$ 모수벡터이다. 연속확률변수 Y의 분포함수는 아래와 같이 표현이 가능하고,

$$\Pr(Y < y) = F(y),$$

0과 1사이의 어떤 분위수 θ에 대해 다음의 등식을 만족하는 y를 Y의 θ^{th}분위수라고 정의한다.

$$F^{-1}(\theta) = \inf\{y : F(y) \geq \theta\},$$

여기서, $\theta = 0.5$인 경우는 0.5^{th}분위수인 중위수를 의미한다. 아래와 같이 정의되는 기대손실 함수를 최소화 하는 해를 θ^{th}분위수로 정의한다.

$$\min_{b\in R^k}\left[\sum_{t\in\{y_i\geq x_i b\}}\theta|y_i - x_i b| + \sum_{t\in\{y_i<x_i b\}}(1-\theta)|y_i - x_i b|\right]$$

분위수 회귀 추정량은 자료가 정규분포를 따르는 경우에는 최소제곱추정치만큼의 효율을 갖고, 비정규 자료인 경우에는 성능이 더 뛰어남이 알려져 있다. 분위수 회귀 추정량에 대한 자세한 근사적 분포와 equivariance 성질 등의 내용은 Koenker와 Bassett (1978)에서 확인 할 수 있다. 여기서는 추정량의 평균과 분산에 대한 근사적 이론을 다루는 정리만을 소개하기로 한다.

정리 3.1 θ^{th}분위수 $\beta_\theta = F^{-1}(\theta)$는 β_θ에서 연속인 밀도함수 $f(\beta_\theta) > 0$를 갖는다고 가정한다. 분위수 회귀 추정량을 $\hat{\beta}_\theta$라고 하면, $\sqrt{n}(\hat{\beta}_\theta - \beta_\theta)$은 근사적으로 $N(0, w^2)$에 수렴한다. 여기서 $w^2 = \theta(1-\theta)/f^2(\beta_\theta)$이다. 특히 중위수의 경우는 $w^2 = 1/4f^2(\beta_\theta)$의 근사적 분산을 갖는다.

분위수 회귀 추정량을 구하는 알고리즘은 Koenker와 Park (1996) 또는 `http://www.econ.uiuc.edu/~roger/research/rq/rq.html`에서 구할 수 있다.

4. 자료분석

본 절에서는 분위수 회귀를 가속수명시험 자료에 실제로 적용하여 수명을 추정해 보고 있다. 대표적인 가속 스트레스로 사용되는 온도와 전압을 분위수 회귀 모형에 적용하기위해 사용된 자료는 Nelson (1982)의 자료이다. 앞에서 언급한 두 가지 모형(아레니우스 모형, 역승 모형)에 대해 각각 적용해 보기로 한다.

4.1. H급 절연체 자료

Nelson (1982)의 H급 절연체 자료는 수명이 대수정규를 따르는 자료로 여기서는 아레니우스-대수정규 모형에 적용하여 보았다. 표 4.1은 절연체의 온도별 고장시간 자료의 로그값이다. 여러 가지의 가속화된 온도에서의 수명 자료를 분위수 회귀를 통하여 회귀식을 추정하여 표 4.2와 같이 180℃에서의 수명을 예측하였다. 이때 사용된 분위수는 $\theta = 0.50$으로 중위수를 의미하고, 이것은 중위수에서 대수정규 모형이 선형함수를 이루기 때문이다. 표 4.2에 함께 제시된 최소제곱 추정치는 윤상운 (1994)의 최소제곱추정치를 이용한 분석 결과로 제안된 방법과 비슷한 값을 가짐을 확인 할 수 있다.

표 **4.1.** 절연체의 온도별 대수 고장시간 자료

190^oC	220^oC	240^oC	260^oC
3.8590	3.2465	3.0700	2.7782
3.8590	3.3867	3.0700	2.8716
3.8590	3.3867	3.1821	2.8716
3.9268	3.3867	3.1956	2.8716
3.9622	3.3867	3.2087	2.9600
3.9622	3.4925	3.2214	3.1206
3.9622	3.4925	3.2338	3.1655
4.0216	3.4925	3.2458	3.2063
4.0216	3.4925	3.2907	3.2778

표 **4.2.** 180^oC에서의 대수수명 추정치

	절편	기울기	180℃ 대수수명추정치
분위수 회귀($\theta = 0.5$)	−3.77	3581.8	4.133
최소제곱 추정치	−3.16	3273.7	4.062

표 **4.3.** 절연 용액의 전압별 대수수명 자료

26 kV	28 kV	30 kV	32 kV	34 kV	36 kV	38 kV
1.7561	4.2319	2.0464	−1.3094	−1.6608	−1.0499	−2.4080
7.3648	4.6848	2.8361	−0.9136	−0.2485	−0.5277	−0.9417
7.7509	4.7031	3.0184	−0.3711	−0.0409	−0.0409	−0.7551
	6.0546	2.0454	−0.2358	0.2700	−0.0101	−0.3148
	6.9731	3.1206	1.0166	1.0224	0.5247	−0.3012
		3.7704	1.3635	1.1505	0.6780	0.1222
		3.8565	2.2905	1.4231	0.7275	0.3364
		4.9349	2.6354	1.5411	0.9477	0.8671
		4.9706	2.7682	1.5789	0.9969	
		5.1698	3.3250	1.8718	1.0647	
		5.2724	3.9748	1.9947	1.3001	
			4.4170	2.0806	1.3837	
			4.4918	2.1126	1.6770	
			4.6109	2.4898	2.6224	
			5.3711	3.4578	3.2386	
				3.4818		
				3.5237		
				3.6030		
				4.2889		

표 **4.4.** 전압별 대수 수명의 추정치

	절편	기울기	5 kV	10 kV	20 kV	30 kV
분위수 회귀($\theta = 0.428$)	59.3081	−16.3870	32.9341	21.5755	10.2169	3.5725
최소제곱 추정치	59.4468	−16.3909	33.0666	21.7502	10.3439	3.6980

4.2. 절연 용액 자료

분석된 Nelson (1982)의 절연 용액 자료는 전압별 대수 고장시간이 와이블 분포를 따르는 자료로 여기서는 역승-와이블 모형을 적용하였다. 자료는 표 4.3에 제시하였고 자료가 $\theta = 0.428$에서 선형임을 기반한 분위수 회귀의 적용결과는 표 4.4에서 확인 할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 가속수명자료에 대해 분위수 회귀 방법을 적용하여 실제 사용조건에서의 수명을 추정하였다. 분위수 회귀는 최소제곱추정을 이용하는 일반 회귀보다 이상치나 오차항의 분포에 민감하게 반응하지 않는다는 특징을 갖는 방법으로, 자료의 분포에 무관하게 효율성이 뛰어난 방법이라 생각된다. 자료 분석을 통하여 기존의 최소제곱추정의 결과와 유사한 값을 갖는 것을 확인하였다.

참고문헌

박범조 (2003). 분위수 회귀접근법, <계량경제학보>, **14**, 93–122.

윤상운 (1994). <가속화 신뢰도 분석>, 자유아카데미, 서울.

Elsayed, E. A. (1996). *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, New York.

Fitzenberger, B. and Wilke, R. A. (2005). Using quantile regression for duration analysis, *Discussion Paper*, No. 05-65.

Koenker, R. W. and Bassett, G. Jr. (1978). Regression quantiles, *Econometrica*, **46**, 33–50.

Koenker, R. and Park, B. J. (1996). An interior point algorithm for nonlinear quantile regression, *Journal of Econometrics*, **71**, 265–283.

Koenker, R. and Hallock, K. F. (2001). Quantile regression, *Journal of Economic Perspectives*, **15**, 143–156.

Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*, John wiley & Sons, New York.

Accelerated Lifetime Data Analysis Using Quantile Regression

Chee Youn Roh[1] · Heejeong Kim[2] · Myung Hwan Na[3]

[1]Dept. of Statistics, Chonnam National University; [2]Dept. of Statistics, Chonnam National University; [3]Dept. of Statistics, Chonnam National University

(Received July 2008; accepted July 2008)

Abstract

Accelerated Lifetime Test is a method of estimation of lifetime quality characteristics under operation condition with the accelerated lifetime data obtained under accelerated stress. In this paper we propose estimation method with accelerated lifetime data using quantile regression. We apply the method to real data with Arrhenius and Inverse power model.

Keywords: Accelerated lifetime,quantile regression, Arrhenius model, inverse power model.

[1]Graduated Student, Dept. of Statistics, Chonnam National University, 333 Yongbong-ro, Buk-Gu, Gwangju 500-757, Korea. E-mail: sophist17@naver.com

[2]Corresponding author: Post-doctor, Dept. of Statistics, Chonnam National University, 333 Yongbong-ro, Buk-Gu, Gwangju 500-757, Korea. E-mail: 0909hehe@hanmail.net

[3]Professor, Dept. of Statistics, Chonnam National University, 333 Yongbong-ro, Buk-Gu, Gwangju 500-757, Korea. E-mail: nmh@chonnam.ac.kr