

등기하 해석법을 이용한 형상 최적설계

Shape Design Optimization Using Isogeometric Analysis

하 승 현* 조 선 호†

Ha, Seung-Hyun Cho, Seon-Ho

(논문접수일 : 2008년 6월 7일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 20일)

요 지

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 선형 탄성문제에 대한 형상 최적설계 기법을 개발하였다. 실용적인 공학문제에 대한 많은 최적설계 문제에서는 초기의 데이터가 CAD 모델로부터 주어지는 경우가 많다. 그러나 대부분의 설계 최적화 도구들은 유한요소법에 기초하고 있기 때문에 설계자는 이에 앞서 CAD 데이터를 유한요소 데이터로 변환해야 한다. 이 변환과정에서 기하 모델의 근사화에 따른 수치적 오류가 발생하게 되고, 이는 응답 해석뿐만 아니라 설계민감도 해석에 있어서도 정확도 문제를 발생시킨다. 이러한 점에서 등기하 해석법은 형상 최적설계에 있어서 유망한 방법론중 하나가 될 수 있다. 등기하 해석법의 핵심은 해석에 사용되는 기저 함수와 기하 모델을 구성하는 함수가 정확히 일치한다는 것이다. 이러한 기하학적으로 정확한 모델은 설계민감도 해석 및 형상 최적설계에 있어서도 사용된다. 이로 인해 높은 정확도의 설계민감도를 얻을 수 있으며, 이는 설계구배 기반의 최적화에 있어서 매우 중요하게 작용한다. 수치 예제를 통하여 본 논문에서 제시된 등기하 해석 기반의 형상 최적설계 방법론이 타당함을 확인하였다.

핵심용어 : 형상 최적설계, 형상 설계 민감도, 등기하 해석법, NURBS

Abstract

In this paper, a shape design optimization method for linearly elastic problems is developed using isogeometric approach. In many design optimization problems for practical engineering models, initial raw data usually come from a CAD modeler. Then, designers should convert the CAD data into finite element mesh data since most of conventional design optimization tools are based on finite element analysis. During this conversion, there are some numerical errors due to geometric approximation, which causes accuracy problems in response as well as design sensitivity analyses. As a remedy for this phenomenon, the isogeometric analysis method can be one of the promising approaches for the shape design optimization. The main idea of isogeometric approach is that the basis functions used in analysis is exactly the same as the ones representing the geometry. This geometrically exact model can be used in the shape sensitivity analysis and design optimization as well. Therefore the shape design sensitivity with high accuracy can be obtained, which is very essential for a gradient-based optimization. Through numerical examples, it is verified that the shape design optimization based on an isogeometric approach works well.

Keywords : *shape design optimization, shape design sensitivity, isogeometric analysis, NURBS*

1. 서 론

등기하 해석법은 2003년 소개된 이래(Cho 등, 2003; Roh 등, 2004; 2005), 2005년 Hughes 등에 의해 수학적으로 정립된 해석법이다(Hughes 등, 2005; Cottrell 등, 2006, 2007). 이는 CAD의 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)를 직접 기저함수로 사용하기 때문에 기하학적으로

엄밀하게 형상을 표현할 수 있다. 따라서 기존의 유한요소법에 서의 요소망(mesh)의 구성에 따른 형상의 근사화를 막을 수 있다. 또한 등기하 해석법은 고차의 기저함수를 자유롭게 사용할 수 있다는 장점으로 인해 법선 벡터나 곡률과 같은 고차항의 정보를 정확하게 계산할 수 있고(하승현 등, 2007), 따라서 이러한 값들이 사용되는 형상 설계민감도 해석과 형상 최적 설계 분야에 있어서 기존의 유한요소법에 비해 커다란 이점을

* 책임저자, 정회원 · 서울대학교 조선해양공학과 및 RIMSE 부교수
Tel: 02-880-7322 ; Fax: 02-880-9298
E-mail: secho@snu.ac.kr

* 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

가지고 있다. 그 밖에도 최적화 진행 과정 중에서 형상의 변화에 따른 요소망의 재구성 없이도 고 정밀도의 최적 형상을 얻을 수 있다는 특징을 가지고 있다. 초기의 모델로부터 형상의 수정, 개선이 용이하기 때문에 현재 다방면으로 사용이 확장되고 있다.

2. B-SPLINE

본 논문에서 사용되는 B-spline의 정의 및 기본 특성에 대해서 간략히 정리하면 다음과 같다(Piegl 등, 1997; Rogers, 2001; Farin, 2002).

2.1 노트 벡터 및 기저 함수

노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서 노트 값들의 집합으로, 이는 등기화 해석법에서의 기저함수를 정의하는데 사용된다. 편의를 위해서 1차원 문제에서의 노트 벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서 n 은 기저함수의 개수이고, p 는 기저함수의 차수이다. 그리고 p -차의 기저함수가 n 개 사용되면, 총 $n+p+1$ 개의 노트 벡터가 사용된다. 만일 파라메트릭 공간상에 노트 벡터가 균일하게 분포되어 있으면 균일(uniform) 노트 벡터, 그렇지 않으면 불균일(non-uniform) 노트 벡터라고 한다. 그리고 한 노트 값이 같은 좌표에 여러 번 반복될 수 있는데, 이때를 중복(repeated) 노트 벡터라고 한다. 또한 첫 번째와 마지막 노트가 $p+1$ 번 반복되면 열린(open) 노트 벡터라고 한다.

앞서 언급한 바와 같이 등기화 해석법에서는 해 공간의 기저함수가 기하학적 형상을 표현하는데 사용된 B-spline과 동일하며, 식 (2)~(3)과 같이 재귀적으로 구성된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

위와 같이 정의되는 B-spline 기저함수의 주요 특성을 정리하면 다음과 같다.

a. $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ (partition of unity)

b. $N_{i,p}(\xi)$ is contained in the interval $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ (compactness)

c. $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ (non-negativity)

2.2 B-Spline 곡선

B-spline 곡선은 B-spline 기저함수의 선형결합(linear combination)으로 얻어지는데, 이때 기저함수들의 계수로서 조정점(control point)이 사용된다. n 개의 p -차 기저함수 $N_{i,p}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)와 이에 대응하는 조정점 B_i 가 주어졌을 때, B-spline 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (4)$$

그림 1에서 보듯이 사각형으로 주어진 조정점과 노트 벡터 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2]$ 으로써 B-spline 곡선이 정의된다. 이와 같은 B-spline 곡선의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

- a. $p-1$ 차의 미분값에 대한 연속성을 가진다.
- b. 중복된 노트나 중복된 조정점이 k 번 사용되면, 미분의 연속성이 k -차수만큼 감소한다.
- c. 조정점들의 움직임에 따라 B-spline 곡선이 따라 변하게 된다.

2.3 H-refinement

등기화 해석법에서는 해의 정확도를 높이기 위해서 h-refinement 를 사용한다. 이는 유한요소법에서 요소망을 재구성(remesh)하는 것과 같은 효과를 나타낸다. 기존의 유한요소법에서 초기 모델에 대해서 요소망을 재구성하기 위해서는 원래의 CAD 모델로부터 다시 재구성해야 하는 것에 반해서, 등기화 해석법에서는 기존의 노트 벡터에 새로운 노트값을 추가(knot

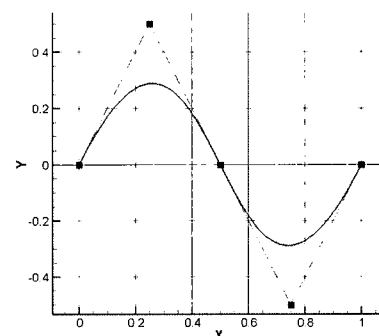


그림 1 3차 B-spline 곡선 ($\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2]$)

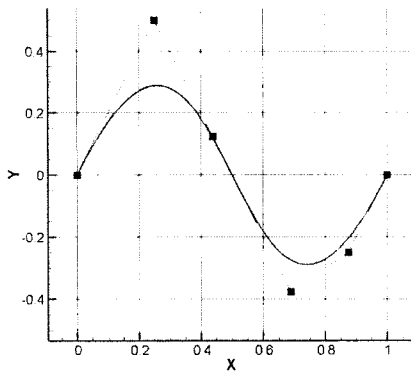


그림 2 3차 B-spline 곡선 ($\bar{\xi} = [0.0, 0.0, 0.1, 1.5, 2.2, 2.2, 2.2]$)

insertion)하는 것으로써 h-refinement 가 이루어진다. 따라서 원래의 CAD 모델과의 정보 교환 없이도 해의 정확도를 높일 수 있다는 점에서 큰 이점을 가질 수 있다. 기존에 주어진 노트 벡터 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 조정점 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 에 대해서 새로운 노트 값 $\bar{\xi} \in \{\xi_k, \xi_{k+1}\}$ 을 추가할 때, 새로운 노트 벡터 $\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 에 대한 새로운 $n+1$ 개의 조정점 $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ 의 위치는 다음의 식 (5)~(6)에 의해서 구성된다. 그림 2에서 알 수 있듯이, 새로운 조정점이 추가 되었으나 기존의 곡선 형상을 정확히 유지하고 있음을 확인할 수 있다.

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \tag{5}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \leq n+1 \end{cases} \tag{6}$$

2.4 B-spline 평면

위와 같은 B-spline 곡선을 바탕으로, B-spline 평면은 식 (7)의 텐서 곱으로 정의된다. 조정점 $B_{i,j}$ 와 노트 벡터 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+p+1}\}$ 에 대해서,

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \tag{7}$$

여기서 $N_{i,p}(\xi)$ 와 $M_{j,q}(\eta)$ 는 각각 ξ, η 방향으로의 기저 함수이다. 수치적분을 위해서 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ 구간이 기존 유한요소법의 요소(element) 역할을 하게 된다. 위의 기저함수를 사용해서 강성 행렬을 구성하고 수치적분을 수행하는 과정은 유한요소법과 동일하게 수행된다. 비록 기저함수를 구성하는데 계산 시간이 상대적으로 소요되지만, 같은 모

델에 대해서 보다 적은 수의 절점으로 나타낼 수 있기 때문에 수치 비용은 크게 문제가 되지 않는다.

3. 등기하 설계 민감도 해석

3.1 전미분 (Material Derivative)

그림 3과 같이 현재의 설계 영역 Ω 와 변화 후의 설계 영역 Ω_τ 가 있을 때, 이 두 개의 영역 사이의 맵핑 관계 T 는 시간 변수 τ 에 의해서 정의된다고 가정하자. 이때, 맵핑 관계 $T: x \rightarrow x_\tau, x \in \Omega$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$x_\tau = T(x, \tau) \tag{8}$$

$$\Omega_\tau = T(\Omega, \tau) \tag{9}$$

이 때, 설계 속도장은 식 (10)과 같이 정의된다.

$$V(x_\tau, \tau) \equiv \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{dT(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \tag{10}$$

다음과 같은 일반적인 형태의 영역 적분과 경계 적분으로 주어지는 성능함수 ψ_1 과 ψ_2 에 대해서,

$$\psi_1 = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \tag{11}$$

$$\psi_2 = \int_{\Gamma} g(x) d\Gamma \tag{12}$$

형상 설계 변수 τ 에 대한 1차 변분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_1' &\equiv \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f_\tau(x_\tau) d\Omega_\tau \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega} \{f'(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{V}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{V}(\mathbf{x})\} d\Omega \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \psi_2' &\equiv \frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma_\tau} g_\tau(x_\tau) d\Gamma_\tau \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Gamma} \{g'(\mathbf{x}) + (\nabla g(\mathbf{x})^T \mathbf{n} + \kappa g(\mathbf{x})) \mathbf{V}^T \mathbf{n}\} d\Gamma \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 곡률은 $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ 로 나타난다.

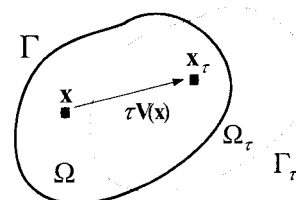


그림 3 설계 영역의 변화

등기하 해석법을 사용한 설계민감도 해석에서는 설계하고자 하는 경계가 선형이고, 설계 영역이 선형 설계 속도장에 의해서 변화할 경우, 기존의 유한요소법과 동일한 결과를 제공한다. 그러나 일반적으로 등기하 해석법은 법선 벡터와 곡률의 고차항의 정보를 잃지 않기 때문에 보다 정확한 설계민감도를 얻을 수 있고, 따라서 형상 최적 설계에서도 보다 정확한 최적해를 얻을 수 있다.

3.2 형상 설계 민감도

그림 4(a)는 내부에서 압력 P가 작용하는 홀이 있는 사각 평판의 1/4 모델이다(Hughes 등, 2005). 이 모델을 나타내기 위한 조정점은 그림 4(b)에 나타나 있는데, 여기서 점선과 실선은 각각 변형 전과 후의 형상을 나타낸다. 등기하 형상 설계민감도의 정확도를 검증하기 위해서 각각의 조정점들을 변형 방향으로 1% 이동되었으며, 이로 인해 식 (15)와 같은 설계 속도장이 얻어진다. 이를 그려보면 그림 4(c)와 같다.

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n N_{i,p} \delta \mathbf{B}_i \quad (15)$$

이 때 임의의 속도장에서 변위에 대한 설계민감도 식은 식 (16)과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega &= \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,m} V_{m,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega + \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,m} V_{m,l} \\ &d\Omega - \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,j} V_{m,m} d\Omega + \int_{\Omega} f_{i,k} \bar{z}_i V_k d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} f_i \bar{z}_i V_{k,k} d\Omega + \int_{\Gamma_N} T_{i,k} \bar{z}_i V_k d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \kappa(T_i \bar{z}_i)(V_k n_k) d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 마지막 항을 살펴보면 곡률 κ 가 포함되어 있는데, 일반적인 유한요소법에서는 법선 벡터와 곡률과 같은 고차항의 정보는 부정확하거나 때로는 누락되기도 한다. 그러나 등기하 해석법에서는 B-spline 기저 함수로부터 법선 벡터와 곡률 정보를 정확하게 계산할 수가 있다. 위의 표 1에서 곡률 정보의 유무에 따른 등기하 설계 민감도를 유한차분 민감도와 비교하였다. 예상되는 바와 같이 곡률 정보를 포함하지 않았을 때에는 유한차분 민감도에 대한 정확도가 매우 낮게 나타났으나 곡률을 포함하였을 때에는 매우 높은 정확도가 얻어지는 것을 확인할 수 있다. 같은 문제를 유한요소법으로 접근하였을 때 설계 민감도의 오차를 줄이기 위해서는 많은 수의 절점과 요소가 필요로 하는 반면에, 등기하 설계 민감도 해석에서는 단 11개의 조정점만으로도 매우 높은 정확도의 설계 민감도 값을 얻어낼 수 있다.

4. 등기하 형상 최적설계

앞서 유도된 형상 설계민감도 식을 이용하여 그림 5의 토

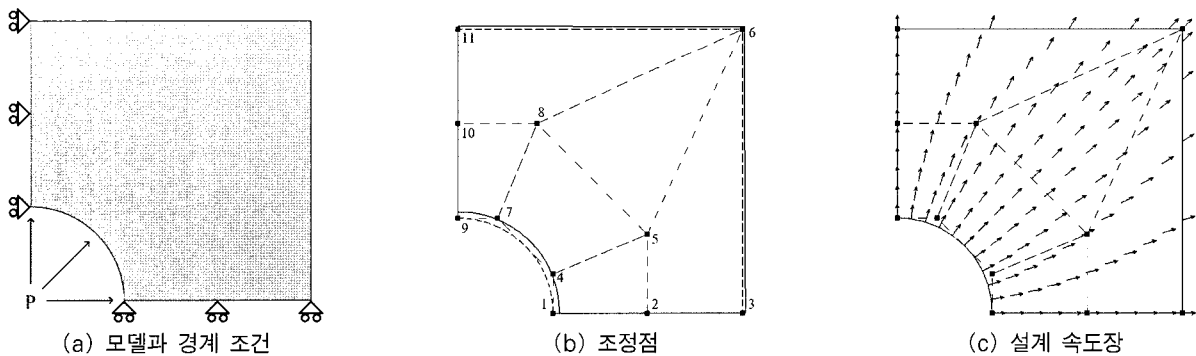


그림 4 형상 설계 민감도 해석 모델

표 1 등기하 해석법에서의 변위 설계민감도 비교

자유도	유한차분 민감도	등기하 민감도 (곡률 제외)	정확도 (%)	등기하 민감도 (곡률 포함)	정확도 (%)
1_x	6.59260E-04	3.98536E-14	0.00	6.59260E-04	100.00
2_x	3.35657E-04	2.80316E-14	0.00	3.35657E-04	100.00
3_x	3.20934E-04	-4.61273E-15	0.00	3.20934E-04	100.00
4_x	6.95526E-04	4.66874E-14	0.00	6.95526E-04	100.00
5_x	1.92809E-04	-6.76382E-14	0.00	1.92809E-04	100.00
6_x	1.94837E-04	7.25398E-15	0.00	1.94837E-04	100.00

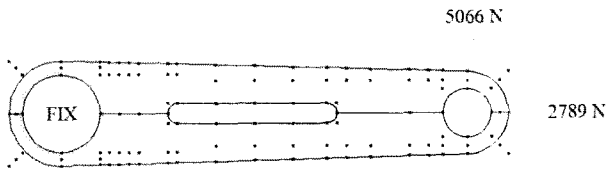


그림 5 토크암 모델

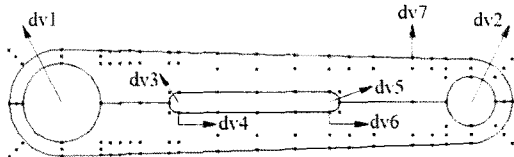
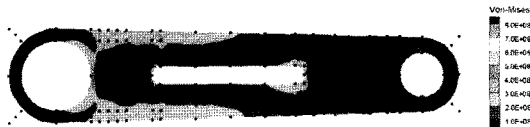


그림 6 설계 변수 매개화



(a) 초기 형상



(b) 최적 형상

그림 7 초기 형상 및 최적 형상 비교

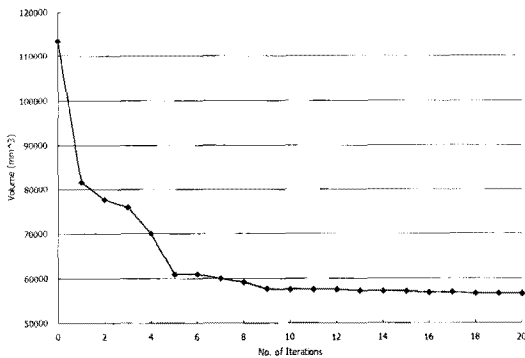


그림 8 최적화 이력 그래프

크암 모델에 대해서 형상 최적설계를 수행하였다. 최적화의 목적함수는 사용 재료의 양을 최소로 하는 것이다. 초기 모델의 조정점은 그림 5에서 사각의 점으로 표시되어 있다. 좌측의 홀은 고정되어 있으며 우측의 홀에는 그림 5와 같은 하중이 가해지고 있다. 부드러운 형상의 변화를 위해서 그림 6과 같이 조정점들이 7개의 설계변수로 매개화 되었다. 사용 재료의 두께는 3mm, 영률은 207.4GPa이고, 포아송비는 0.3 이다(Lindby 등, 1997).

그림 7(a)의 초기 형상에 대해서 사용 재료의 양을 최소로 하는 최적화를 진행하였다. 제약 조건은 von-Mises 응력

표 2 각 설계 변수에 대한 하한값, 상한값, 최적해

설계 변수	u_i^{lower}	$u_i^{initial}$	u_i^{upper}	$u_i^{optimal}$
dv1	-0.42E-2	0.00E-2	4.00E-2	-0.11E-2
dv2	-0.77E-2	0.00E-2	4.00E-2	-0.77E-2
dv3	-0.50E-2	0.00E-2	3.00E-2	1.97E-2
dv4	-4.00E-2	0.00E-2	4.00E-2	1.22E-2
dv5	-0.50E-2	0.00E-2	3.00E-2	-0.07E-2
dv6	0.00E-2	0.00E-2	4.00E-2	1.11E-2
dv7	-3.43E-2	0.00E-2	4.00E-2	-3.05E-2

을 허용치인 $\sigma_{ALLOW} = 800 MPa$ 이하로 하는 것이다. 이에 대해서 최적화 문제는 다음의 식 (17)~(19)과 같이 정식화된다.

$$\text{Minimize } m = \int_{\Omega} d\Omega, \quad (17)$$

$$\text{subject to } \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_{ALLOW}} - 1 \leq 0, \quad (18)$$

$$u_i^{lower} \leq u_i \leq u_i^{upper}. \quad (19)$$

20회의 반복 계산을 통하여 그림 7(b)와 같은 부드럽고 대칭인 형태의 최적 형상이 얻어졌다. 낮은 응력이 작용하는 부분의 재료들이 제거되면서 최대 von-Mises 응력은 799MPa로 얻어졌다. 각각의 설계 변수에 대한 하한값, 상한값, 그리고 최적해는 표 2에 정리되어 있다. 최적화 이력 그래프는 그림 8과 같은데, 제약 조건을 만족시키면서도 사용 재료량이 50% 정도로 감소한 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 응답 해석, 설계 민감도 해석 및 형상 최적설계를 수행하였다. 등기하 해석법에서는 CAD 형상을 나타내는데 사용되는 B-spline 함수가 해석에 있어서 그대로 기저함수로 사용되므로 정확한 기하형상을 표현하는 해석모델을 구성할 수 있다. 설계민감도 해석에서는 주어진 고차의 기저함수를 이용해서 법선 벡터와 곡률과 같은 고차항의 정보를 정확하게 계산할 수 있기 때문에 유한요소 기반에서의 설계민감도 해석에 비해 매우 정확한 설계민감도 값을 구할 수 있다. 이러한 등기하 설계민감도 해석을 기반으로 형상 최적설계를 수행하였다. 설계 변수의 매개화를 통해서 부드러운 형상 변화를 얻을 수 있었으며, 상용 프로그램의 도움 없이도 조정점들의 관계를 이용하여 설계 속도장을 쉽게 계산할 수 있었다. 이렇게 얻어진 최적 형상은 기존의 참고 문헌들에서의 예제와 동일한 결과를 나타냄을 확인하였다. 비록 현재 단계에서는 CAD 상용 소프트

웨어와의 정보 교환을 위한 인터페이스가 개발되지 않아서 초기 형상 모델링이 쉽지 않지만, 이는 추후 개선되리라 생각한다.

감사의 글

본 논문의 내용은 2007년도 첨단조선공학 연구센터 지원 과제(R11-2002-104-06003-0)의 일부로 수행된 것을 정리한 것으로, 위 기관의 후원에 감사드립니다.

참고 문헌

- 조선호, 정현승, 양영순 (2002) 기하학적 비선형 구조물의 설계민감도 해석 및 위상 최적설계, 한국전산구조공학회 02 봄 학술발표회 논문집, pp.335~342.
- 하승현, 조선호 (2007) 등기하 해석법을 이용한 설계민감도 해석, 한국전산구조공학회논문집, 20(3), pp.339~345.
- Arora, J.S., Lee, T.H., Cardoso, J.B. (1992) Structural shape design sensitivity analysis: Relationship between material derivative and control volume approaches, *AIAA Journal*, 30(6), pp.1638~1648.
- Azegami, H., Kaizu, S., Shimoda, M., Katamine, E. (1997) Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique, *Computer Aided Optimization Design of Structures*, V, pp.309~326.
- Braibant, V., Flury, C. (1984) Shape optimal design using B-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44, pp.247~267.
- Cho, M., Roh, H.Y. (2003) Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(1), pp.81~115.
- Cho, S., Ha, S.H. (2007) Shape design optimization of geometrically nonlinear structures using isogeometric analysis, *9th United States National Congress on Computational Mechanics*, San Francisco, California, U.S.A., July 22~26.
- Choi, K.K., Chang, K.H. (1994) A study of design velocity field computation for shape optimal design, *Finite Elements in Analysis and Design*, 15, pp.317~341.
- Choi, K.K., Duan, W. (2000) Design sensitivity analysis and shape optimization of structural components with hyperelastic material, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187, pp.219~243.
- Choi, K.K., Kim, N.H. (2004) Structural Sensitivity Analysis and Optimization: Volume 1, Linear Systems & Volume 2, Nonlinear Systems and Applications, *Springer*, New York, NY.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A. (2007) Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.4160~4183.
- Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R. (2006) Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.5257~5296.
- Farin, G. (2002), Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, *Academic Press*.
- Ha, S.H., Cho, S. (2007) Shape design optimization of structural problems based on isogeometric approach, *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, COEX Seoul, Korea, May 21~25.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.4135~4195.
- Lindby, T., Santos, J.L.T. (1997) 2-D and 3-D shape optimization using mesh velocities to integrate analytical sensitivities with associative CAD, *Structural Optimization*, 13, pp.213~222.
- Piegl, L., Tiller, W. (1997) The NURBS Book (Monographs in Visual Communication), second ed., *Springer-Verlag*, New York.
- Rogers, D.F. (2001) An Introduction to NURBS With Historical Perspective. *Academic Press*, San Diego, CA.
- Roh, H.Y., Cho, M. (2004) The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp.2261~2299.
- Roh, H.Y., Cho, M. (2005) Integration of geometric design and mechanical analysis using B-spline functions on surface, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(14), pp.1927~1949.