

확장 B-스플라인 기저함수를 이용한 레벨셋 기반의 형상 최적설계

Level Set based Shape Optimization Using Extended B-spline Bases

김민근* 조선희†

Kim, Min-Geun Cho, Seon-Ho

(논문접수일 : 2008년 6월 7일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 20일)

요 지

확장 B-스플라인 기저함수(extended B-spline basis functions)을 이용한 레벨셋 기반의 위상 형상 최적설계 기법을 정상 상태의 열전도 문제에 대하여 개발하였다. 본 해석법은 레벨셋으로 결정된 영역 안쪽만 고려하여 해석을 수행하게 되므로 열전달 문제에서 생길 수 있는 영역 바깥부분의 영향을 제거할 수 있다. 설계민감도 해석으로부터 결정되는 법선속도를 활용하여 헤밀턴-자코비 방정식의 해를 구하게 되며, 주어진 체적조건 하에서 열 컴플라이언스(thermal compliance)가 최소가 되는 방향으로 최적의 형상을 결정할 수 있다. 형상 설계민감도를 정확하게 얻기 위해서는 레벨셋 함수와 B-스플라인 함수를 이용하여 수직 단위 벡터와 형상의 곡률을 정확히 결정하며, 위상 설계민감도를 통해 최적화과정 동안 필요한 위치와 시점에서 위상의 변화를 주는 홀을 쉽게 생성할 수 있다.

핵심용어 : 레벨셋 기법, 위상 형상 최적화, 확장 B-스플라인, 형상 설계민감도, 위상 설계민감도

Abstract

A level set based topological shape optimization using extended B-spline basis functions is developed for steady-state heat conduction problems. The only inside of complicated domain identified by the level set functions is taken into account in computation, so we can remove the effects of domain outside parts in heat conduction problem. The solution of Hamilton-Jacobi equation leads to an optimal shape according to the normal velocity field determined from the sensitivity analysis, minimizing a thermal compliance while satisfying a volume constraint. To obtain exact shape sensitivity, the precise normal and curvature of geometry need to be determined using the level set and B-spline basis functions. Using topological derivative concept, the nucleation of holes for topological changes can be made whenever and wherever necessary during the optimization.

Keywords : level set method, topological shape optimization, extended b-spline, adjoint shape sensitivity, topological derivative

1. 서 론

형상 최적설계에서 레벨셋 방법은 암시적 이동경계(implicit moving boundary)를 이용함으로써 고정된 균일 격자에서 복잡한 형상을 표현할 수 있는 장점이 있다. Osher 등(1988)은 평균 곡률에 의한 자유 경계면의 움직임을 표현하기 위한 레벨셋 방법을 제안하였다. Allaire 등(2004)은 구조 문제에서 컴플라이언스와 변위에 관하여 형상 최적설계와 레벨셋 방

법을 결합한 최적화 방법을 제안하였고, Ha 등(2005)은 열전달 문제로 확장하여 형상 최적설계를 수행하였다. 레벨셋 기반의 형상 최적설계는 위상 변화를 위해서 기존 홀(hole)들의 결합은 가능하나 생성은 용이하지 않다. 이를 위해서는 유한한 크기의 홀 생성에 따른 목적함수의 변화량인 위상 민감도(Novotny, 2000)를 활용할 수 있다. 이러한 위상 민감도는 원하는 시기에 원하는 수량의 홀을 생성할 수 있는 판단기준이 될 수 있다. 특히 위상 변화의 표현이 자유로운 레벨셋 기법과

† 책임저자, 정희원 · 서울대학교 조선해양공학과 및 RIMSE 부교수
Tel: 02-880-7322 ; Fax: 02-880-9298

E-mail: secho@snu.ac.kr

* 서울대학교 조선해양공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

결합하여 원하는 위상의 변화를 쉽게 표현할 수 있다(Burger 등, 2004). 일반적인 레벨셋 기반의 형상 최적설계에서는 유한요소법을 사용한다. 그러나 유한요소법은 형상 최적설계의 해석에 기하학적인 제한과 기저함수의 낮은 차수로 인하여 곡률과 같은 높은 차수의 미분이 필요한 계산에는 부적합한 방법이다. 특히 형상 최적설계에서는 경계에서의 수직 단위벡터와 곡률의 정보가 필요하기 때문에 이를 정확히 계산하기 위한 기저의 선택이 매우 중요하다. B-스플라인 기저함수는 컴퓨터를 이용한 설계(CAD)분야에서 형상을 표현하는 기저함수로 가장 많이 쓰이는 함수이다. Höllig 등(2003)은 고정된 균일격자에서 이러한 B-스플라인 기저함수를 이용하여 임의의 형상에 대한 해석이 가능하도록 하는 WEB-spline(Weighted Extended B-spline)방법을 제안하였다. 본 연구에서는 레벨셋으로 주어진 임의의 형상에 대해서 Höllig가 제안한 확장된 B-스플라인 방법으로 해석을 수행하고, 형상 설계민감도와 위상 민감도를 이용한 형상 최적설계를 수행하였다. 확장된 B-스플라인 함수를 이용하여 곡률 계산의 정확성을 확인하였고, 정상 상태 열전도 문제에 대해서 열 컴플라이언스가 최소가 되도록 위상 및 형상 최적설계를 수행하여 합리적인 결과를 얻었다. 이러한 방법은 레벨셋으로 주어지는 영역의 안쪽부분만 해석이 가능하게 함으로써 기존의 유한요소를 이용한 레벨셋 방법에서 생기는 영역 바깥쪽부분에 의한 영향을 제거할 수 있다. 또한, 기존의 밀도법은 경계의 표현이 모호하고, 비 균질적인 재료 분포로 인해서 실제 공학 모델의 제조의 어려움이 있지만, 레벨셋 방법은 경계의 표현이 명확하고, 균질적인 재료 분포가 가능하게 하며, 직접 경계 해석법(Explicit boundary analysis)이므로 열 전달 문제와 같이 정확한 경계 조건이 부여되어야 하는 문제에서 커다란 장점을 지닌다.

2. 확장된 B-spline 기법

2.1 B-스플라인 기저함수

임의의 위치 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 에서 정의된 p 차 m 차원 B-스플라인 기저 함수는 다음과 같이 정의된다.

$${}^h b_\alpha^p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m b_i^p\left(\frac{x_i}{h} - k_{i\alpha}\right) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{k}_\alpha = (k_{1\alpha}, k_{2\alpha}, \dots, k_{m\alpha})$ 은 그림 1과 같이 α 번째 기저 함수의 시작 위치를 나타내며, h 는 격자의 크기이다. 이러한 B-스플라인 기저 함수는 항상 양의 값을 가지며, 그림 1의 첫 번째 그림과 같이 $h(p+1) \times h(p+1)$ 크기의 지지 영역을, $\sum_k {}^h b_k^p(x/h - k) = 1$ 을 항상 만족시킨다.

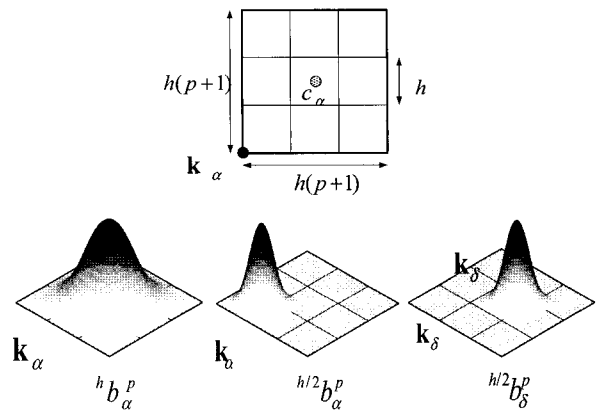


그림 1 B-스플라인 기저함수

2.2 확장 B-스플라인 기저함수

p 차 확장된 B-스플라인 ${}^h B_\beta^p$ 를 이용한 기저함수는 구하고자 하는 해 T 를 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha {}^h b_\alpha^p(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in I} c_\gamma {}^h b_\gamma^p(\mathbf{x}) + \sum_{\beta \in J} c_\beta {}^h b_\beta^p(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서, 인덱스 $\gamma \in I$ 는 1개 이상의 격자 크기 이상의 충분한 지지영역을 갖는 기저함수를 나타내며, 이를 내적 기저라 한다. $\beta \in J$ 는 영역의 영향을 받지만 1개 격자 크기 이상의 충분한 지지영역을 갖지 못한 기저함수를 나타내며, 외적 기저라 한다. 즉, 해석에서는 이러한 영역의 영향을 받는 2가지 기저함수만을 이용하게 되고 전혀 영향을 받지 않는 함수는 해석에서 제거하게 된다. 해석에 쓰이는 함수의 집합을 $\alpha \in K$ 로 표현하며, $K = I \cup J$ 같은 관계가 있다. 그림 2는 임의의 주어진 영역에 대해서 검정색 원은 내적 기저함수의 지지영역의 시작점 나타내며, 흰색 원은 외적 기저함수의 지지영역의 시작점을 나타낸다. 외적 기저는 충분하지 않은 지지 영역 때문에 적분시에 수치적인 불안정성을 야기시킨다. 따라서 이러한 외적 기저의 영향을 없애기 위해 다음과 같이 라그랑지안 외삽법을 통해 외적 기저영역 계수를 내적 기저영역 계수로 근사화시킨다.

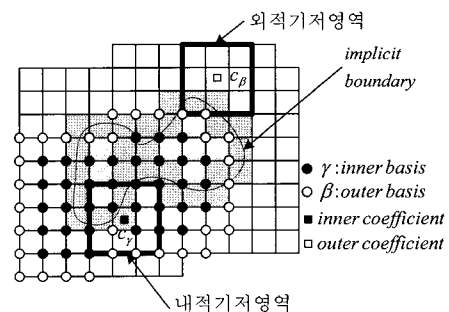


그림 2 임시적 경계에 따른 내적 외적 B-스플라인 기저함수

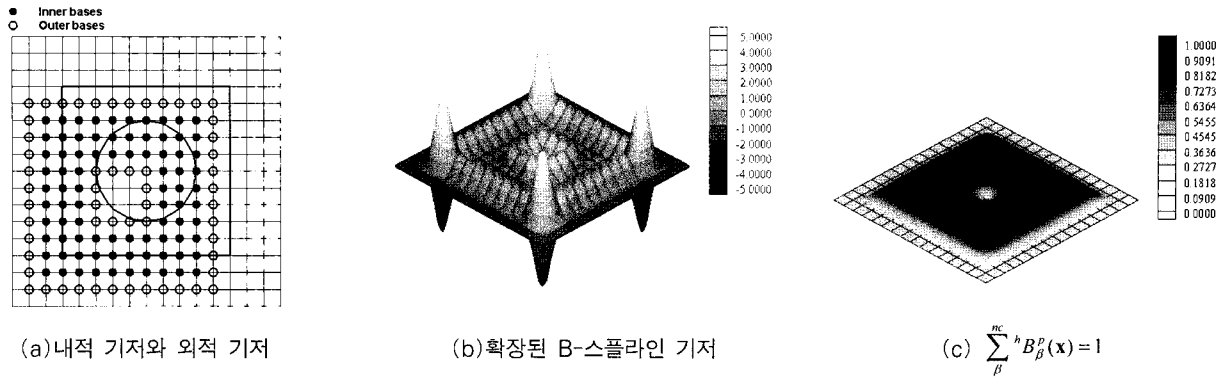


그림 3 임시적 경계에 따른 내적 외적 B-스플라인 기저함수

$$T = \sum_{\gamma \in I} \left[{}^h b_{\gamma}^p(\mathbf{x}) + \sum_{\beta \in J(\gamma)} e_{\beta, \gamma} {}^h b_{\beta}^p(\mathbf{x}) \right] c_{\gamma} = \sum_{\gamma \in I} {}^h B_{\gamma}^p(\mathbf{x}) c_{\gamma},$$

$$c_{\beta} = \sum_{\gamma \in I(\beta)} e_{\beta, \gamma} c_{\gamma}, \quad e_{\beta, \gamma} = \prod_{\substack{\nu=1 \\ i \neq \mu}}^m \prod_{\mu=0}^p \frac{(k_{\nu}^{\gamma} - k_{\nu}^{\mu})}{(k_{\nu}^{\beta} - k_{\nu}^{\mu})} \quad (3)$$

$I(\beta)$ 은 외적 기저함수 계수 c_{β} 를 근사화 하는데 사용한 내적 기저함수 계수들의 집합을 의미하고, 이 집합은 $\gamma \in I$ 에 대한 합에 대하여 내적 기저함수에 의해서 근사화되는 외적 기저함수의 집합 $J(\gamma)$ 으로 대치 될 수 있다. $e_{\beta, \gamma}$ 은 라그랑지안 확장 계수이며, ${}^h B_{\alpha}^p$ 은 내적 기저함수로 이루어진 확장된 새로운 기저이다. 즉, 식 (3)은 외적 기저함수를 내적 기저함수로 근사화하여, 모두 내적 기저함수로 표현되기 때문에 외적 기저함수의 영향을 제거한 식이므로 수치적인 불안정성을 없앨 수 있다. 영역 내에서 이 기저의 전체 합은 그림 3(c)와 같이 '1'이며(partition of unity property), 해석에서 오직 내적 기저함수 계수 c_{γ} 만 구하면 된다. 또한 식(3)에서 알 수 있듯이 모든 기저함수가 실제 물리적인 좌표 \mathbf{x} 에서 정의 되므로 유한요소법과 같이 변환을 위한 자코비안이 필요가 없다. 본 연구에서는 이러한 확장된 B-스플라인 기저함수를 해석뿐만 아니라 레벨셋 함수의 재생에 사용하여 높은 미분값을 요구하는 곡률 계산의 정확성을 향상시켰다. 임의의 주어진 임시적 경계에 대해서 그림 3(a)와 같이 외적 기저와 내적 기저로 나눌 수 있으며, 확장된 B-스플라인 기저는 그림 3(b)와 같다.

3. 레벨셋 기법

그림 4와 같이 정의된 영역에 대해서 레벨셋 함수는 다음과 같이 정의된다.

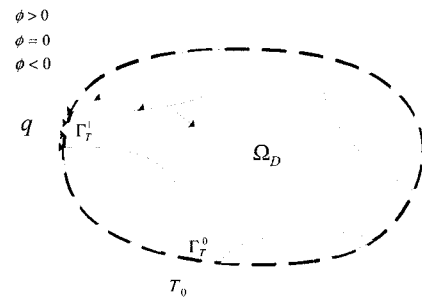


그림 4 레벨셋 함수

$$\phi(\mathbf{x}, \tau = 0) = \begin{cases} +\zeta(\mathbf{x}, \Gamma) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ -\zeta(\mathbf{x}, \Gamma) & \mathbf{x} \in \Omega, \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (4)$$

이러한 레벨셋은 설계 민감도 해석으로 얻어지는 V_n 을 이용하여 다음과 같은 해밀턴-자코비 (Hamilton-Jacobi) 방정식에 의해 움직이게 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = V_n |\nabla \phi| \quad (5)$$

4. 정상 상태 열전도 문제의 설계 민감도와 위상 민감도 해석

4.1 열전도 문제

영역 Ω 에서 정의된 정상 상태 열전도 문제의 변분 방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$A(T, \bar{T}) \equiv \int_{\Omega} T_i \kappa \delta_j \bar{T}_j d\Omega = \int_{\Omega} Q \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma} q \bar{T} d\Gamma \equiv \ell(\bar{T}),$$

$$\forall \bar{T} \in \bar{Y} \quad (6)$$

여기서 Q 과 q 은 내부 발열 에너지와 열속(heat flux)이

며, T 는 온도장이며, Γ_T^1 은 열속 경계조건을 의미한다. \bar{T} 과 \bar{Y} 은 균질 경계 조건(homogeneous boundary condition)을 만족시키는 해의 변분값과 함수 공간으로 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{Y} = \{ \bar{T} \in H^1(\Omega) : \bar{T} = 0 \text{ on } \Gamma_T^0 \} \quad (7)$$

식 (6)을 식 (2)를 이용해 이산화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{\beta, \gamma} \int_{\Omega} {}^h B_{\beta, i}^p \kappa \delta_{ij} {}^h B_{\beta, j}^p c_i \bar{c}_j d\Omega \\ = \sum_{\beta} \int_{\Omega} Q^h B_{\beta}^p \bar{c}_{\beta} d\Omega + \sum_{\beta} \int_{\Gamma_T^1} q^h B_{\beta}^p \bar{c}_{\beta} d\Gamma \\ \bar{T} = \sum_{\beta} {}^h B_{\beta}^p(\mathbf{x}) \bar{c}_{\beta} \in \bar{Y} \end{aligned} \quad (8)$$

4.2 설계 민감도 해석

형상 설계 민감도는 형상의 경계가 바뀔 때 따른 목적함수의 변화를 의미한다. 따라 나타나는 다음과 같이 파라미터 τ 와 의 해 Ω 의 변환된 영역을 Ω_{τ} 라 하고, 식 (11)의 이 영역에서 정의된 라그랑지안을 다음과 같이 정의한다(Haug 등, 1987),

$$\begin{aligned} L(T_{\tau}, \lambda_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} Q(T_{\tau} + \lambda_{\tau}) d\Omega_{\tau} + \int_{\Gamma_{\tau}^1} q(T_{\tau} + \lambda_{\tau}) d\Gamma_{\tau} \\ - \int_{\Omega_{\tau}} T_{\tau, i} \kappa \delta_{ij} \lambda_{\tau, j} d\Omega_{\tau}, \quad \forall \lambda_{\tau} \in Z_{\tau}, \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\lambda_{\tau} \equiv \lambda(\mathbf{x}_{\tau})$ 은 변환된 영역에서 정의된 다음 보조 방정식(Adjoint equation)의 해이며, 밀 점자 τ 는 이러한 변환된 영역에서 정의된 변수들 혹은

$$a_{\tau}(\lambda_{\tau}, \bar{\lambda}_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} \mathbf{b} \cdot \bar{\lambda}_{\tau} \Omega_{\tau} + \int_{\Gamma_{\tau}^1} \mathbf{t} \cdot \bar{\lambda}_{\tau} d\Gamma_{\tau}, \quad \forall \bar{\lambda}_{\tau} \in Y_{\tau}. \quad (10)$$

식 (9)를 τ 에 전미분을 취하면 다음과 같은 형상 설계민감도 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\tau}(T, \lambda) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \{ (Q(T + \lambda) - T_{i,j} \kappa \delta_{ij} \lambda_{i,j}) \mathbf{V} \} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_T^1} [\nabla \{ q(T + \lambda) \}^T \mathbf{n} + Hq(T + \lambda) \mathbf{V}] d\Gamma \\ \equiv \int_{\Omega} \nabla \cdot (\Pi(T, \lambda) \mathbf{V}) d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, \mathbf{V} 는 형상 설계 속도장으로, 형상 변화의 방향성을 나타낸다.

4.4 위상 민감도 해석

형상 민감도와는 달리 위상 민감도는 재료의 연결성을 결정 짓는 위상의 변화에 따른 목적함수의 변화량을 뜻한다. 일반적으로 레벨셋 방법에서 주어지는 속도장은 경계에서만 값을 갖기 때문에 경계에 움직임에 의한 위상의 변화만 표현할 뿐, 홀이 생기는 것과 같은 새로운 위상의 변화는 표현할 수 없다 (Burger, 2004). 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 위상 민감도 해석을 수행하였다. 임의의 위치 $\hat{\mathbf{x}}$ 에 열속이 '0'인 경계를 갖는 홀이 생길 때, 열 컴플라이언스에 대한 위상 민감도는 다음과 같다(Novotny, 2000).

$$\dot{L}_{\tau}(T, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) = -\{ Q(T + \lambda) - 2\kappa \nabla T \cdot \nabla \lambda \}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (12)$$

만약, 내부 발열량 Q 가 없다고 할 때, 위의 위상 민감도는 항상 양수의 값을 갖는다. 즉, 홀이 생성될 때 항상 컴플라이언스가 증가함을 의미하며, 물리적으로 타당한 결과이다. 체적 조건을 고려할 때 아래 식과 같이 ε 값을 조절하여 홀의 생성 정도를 조절할 수 있다. 본 연구에서는 식 (13)이 음수의 값을 가지는 위치에 홀을 만든다.

$$\Theta(\hat{\mathbf{x}}) = -2\Sigma(T, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) - \varepsilon \quad (13)$$

5. 위상적 형상 최적 설계

본 연구의 목적은 선형 단성 구조물에 하중이 주어졌을 때 체적 제한조건을 위배하지 않고 컴플라이언스가 최소가 되는 구조물의 위상적 형상 최적 설계를 수행하는 것으로 다음과 같이 최적화 문제를 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \\ L(T, \lambda) = \int_{\Omega} Q \cdot T d\Omega + \int_{\Gamma_T^1} q \cdot T d\Gamma + \ell(\lambda) - A(T, \lambda) \quad (14) \\ \text{Subject to } m = \int_{\Omega} d\Omega \leq M_{\max}. \quad (15) \end{aligned}$$

최적화 방법은 구배 최적화 기법(gradient based optimization)을 이용하였으며, 쿤-터커 최적 조건(Kuhn-Tucker optimality conditions)에 의해 다음과 같이 목적함수가 감소 되도록 경계의 수직 방향 속도를 결정할 수 있다.

$$V_n = -\{ \Pi(\mathbf{z}, \lambda) + \xi \} \quad (16)$$

여기서 ξ 는 체적 조건을 만족시키도록 하는 양의 라그랑지안 계수로 다음과 같이 정의된다.

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{if } \int_{\Omega} d\Omega < M_{\max} \\ \mu & \text{if } \int_{\Omega} d\Omega \geq M_{\max} \end{cases} \quad (17)$$

최적화 과정은 확장된 B-spline 방법을 이용하여 얻은 해를 이용하여 위상 설계민감도를 구하고, 식 (12)을 이용하여 위상을 변화시킨 새로운 형상을 구한다. 그 후 주어진 형상에서 형상 설계 민감도를 구하여 주어진 체적 내에서 목적함수가 최소가 되도록 헤밀턴-자코비 방정식을 풀어서 형상을 결정한다. 이러한 과정을 경계에서의 수직 방향의 속도가 사라질 때까지 반복하면 궁극적으로 최적의 형상을 얻을 수 있다.

6. 수치적 예제

6.1. 유한요소해석과 확장 B-스플라인 방법의 비교

그림 5(a)와 같이 레벨셋으로 정의된 영역에 내부 발열량 $Q=100KW/m^3$, 열속 $q=200W/m^2$, 온도 경계 조건 $T_0=0^{\circ}C$ 이 부과된 열전도 문제에 대해서 유한요소 해석과 B-스플라인 방법을 비교하였다. 그림 5(b), 5(c)는 각각의 온도분포를 나타낸다.

유한요소를 이용한 레벨셋 방법은 영역 바깥부분까지 적분을 수행하지만, 확장된 B-스플라인 방법은 오직 영역 안쪽만 적분이 된다. 그림 5(b)의 결과는 최대 온도 $T_{\max} = 0.01881^{\circ}C$, 최소 온도 $T_{\min} = 0^{\circ}C$ 이지만 그림 5(c)의 결과는 최대 온도 $T_{\max} = 0.01876^{\circ}C$, 최소 온도 $T_{\min} = -0.01293^{\circ}C$ 로 영역 바깥 부분의 해가 영역 안쪽에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 확장 B-스플라인 해석법은 영역 안쪽부분만 적분함으로써, 영역 바깥부분의 가상의 재료에 의한 영향을 제거할 수 있다.

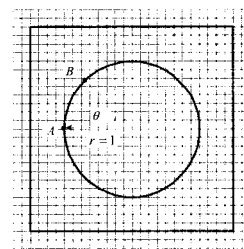
6.2. 확장 B-스플라인 함수를 이용한 곡률 계산

레벨셋을 이용한 곡률의 계산은 다음과 같이 표현되며, 레벨셋 함수의 2차 미분 값을 필요하기 때문에 일반적인 1차 기저를 이용하는 유한요소 방법으로는 곡률을 계산할 수 없고, 2차 이상의 기저함수를 이용하기 위해서는 복잡함이 따른다.

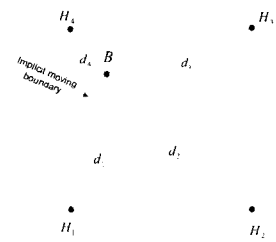
$$H = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = -(\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx}) / \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (18)$$

그러나 확장된 B-스플라인 함수는 차수를 올리기에 용이하고 형상을 정확히 표현할 수 있는 함수이다. 이를 이용하여 레벨셋 함수 ϕ 를 재생하여 곡률 계산을 하면 식 (23)에서 나타나는 2차 미분계수를 정확히 계산할 수 있다.

그림 6(a)에서 주어진 비 격자점 B에서의 곡률을 계산하여 유한차분법과 비교하였다. 유한차분법을 이용한 B에서의 곡률 계산은 각 격자점에서 계산한 후, 그림 6(b)와 같은 근사화를 이용하여 계산하였다. 표 1에서와 같이 유한차분법에 비해 확장된 B-스플라인 방법이 더 정확함을 알 수 있다.



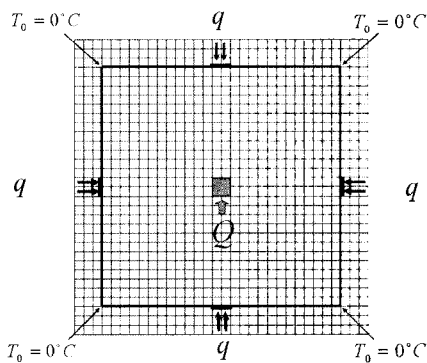
(a) 곡률 계산 모델



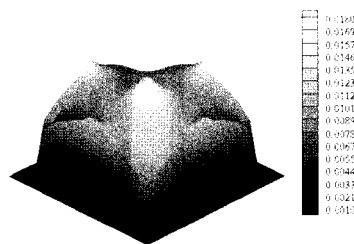
(b) 유한 차분법을 이용한 곡률

$$\text{계산 } (H_B = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} H_i) / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i})$$

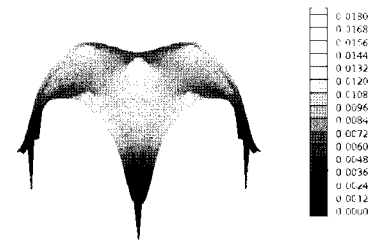
그림 6 곡률 계산 모델



(a) 모델



(b) 확장 B-스플라인 해석



(c) 유한요소 해석

그림 5 정상 상태 열 전달 해석 결과

표 1 B 점에서의 유한 차분법과 확장 B-스플라인 방법을 이용한 곡률 계산

| # of GRID | EXACT(a) | 유한차분법 | | 확장 B-스플라인 | |
|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | CURVATURE(b) | (b)/(a)*100% | CURVATURE(c) | (c)/(a)*100% |
| 2 | 1.0000000 | 0.0796472 | 7.96 | 1.11932 | 111.93 |
| 4 | | 2.5342644 | 253.43 | 1.19829 | 119.83 |
| 8 | | 2.4365658 | 243.66 | 1.0633653 | 106.34 |
| 10 | | 2.4192972 | 241.93 | 1.0048677 | 100.49 |

6.3. 확장 B-스플라인 기저를 이용한 레벨셋 기반 형상 최적설계

그림 5(a)에 주어진 모델에서 내부 발열량 $Q=1000W/m^3$, 열속 $q=100W/m^2$, 그리고 온도 경계 조건 $T_0=0^\circ C$ 이 작

용하는 모델에 대해서 초기 체적의 50%이하의 체적 제한조건에서 열 컨플라이언스가 최소가 되는 형상 최적설계를 수행하였다. 그림 5는 최적 형상의 결과를 나타낸 것이고 그림 6은 최적화 과정을 보여준다. 그림 7에서 알 수 있듯이 주어진 체적에서 얻어진 형상이 최소 열 컨플라이언스를 가지는 것을 확인할 수 있다.

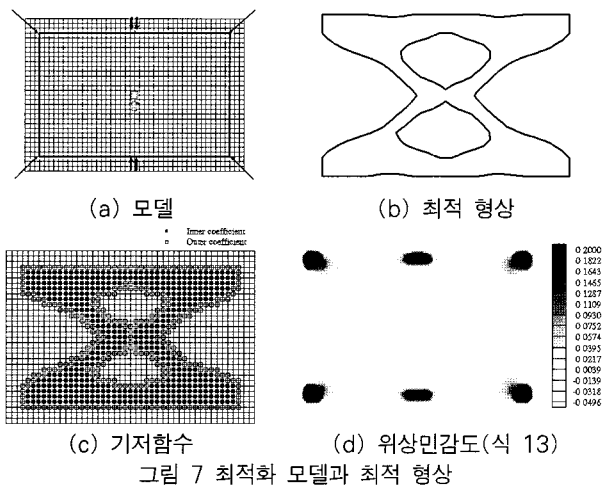


그림 7 최적화 모델과 최적 형상

7. 결 론

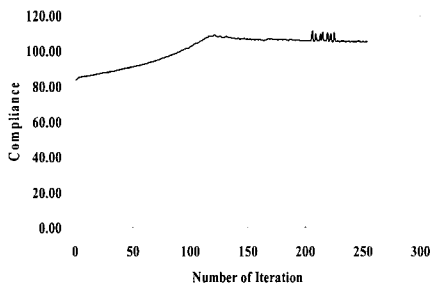
본 연구에서는 해밀턴-자코비 방정식을 풀어서 얻은 임의의 형상에 대해서 Hollig가 제안한 확장된 B-스플라인 방법으로 응답 및 설계민감도 해석을 수행하고, 이를 활용한 레벨셋 기반 위상 및 형상 최적설계 기법을 개발하였다. 확장된 B-스플라인 함수를 이용하여 기존의 유한요소 기반의 해석을 이용할 때 생기는 영역 바깥쪽 재료의 영향을 제거하여 해의 정확성을 개선하였으며, 동시에 정확한 곡률과 법선의 계산을 수행할 수 있었다. 또한, 정상 상태 열전도 문제에 대해서 주어진 체적 조건에서 열 컨플라이언스가 최소가 되도록 하는 위상 및 형상 최적설계를 수행하여 합리적인 결과를 얻었다.

감사의 글

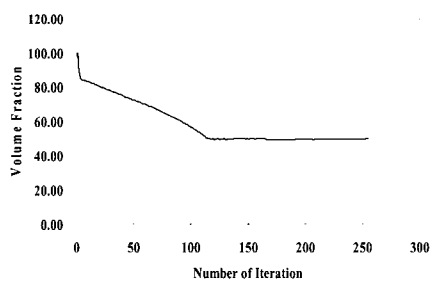
본 논문의 내용은 2007년도 첨단조선공학 연구센터 지원과 제(R11-2002-104-06003-0)의 일부로 수행된 것을 정리한 것으로, 위 기관의 후원에 감사드립니다.

기호 정리

| | | | |
|-------------------|----------------------|--------------|---------------------------------|
| ${}^h b_\alpha^p$ | P 차 B-스플라인 기저함수 | σ | 응력 |
| ${}^h B_\alpha^p$ | 확장 P 차 B-스플라인 기저함수 | κ | 열전도 계수 |
| H | 곡률 | Γ_T^0 | 온도 경계 |
| \mathbf{n} | 수직 단위 벡터 | Γ_T^1 | 열속 경계 |
| Q | 내부 발열 에너지 | λ | 보조 평형 방정식 |
| q | 열속(heat flux) | ξ | 라그랑지 계수 (Lagrangian multiplier) |
| T | 온도장 | ϕ | 레벨셋 함수 |
| V_n | 수직 속도 | τ | 섭동 파라미터 |
| $\bar{\Gamma}$ | 함수 공간 | Ω | 영역 |
| Γ | 경계 | Ω_i | 초기 영역 |



(a) 열 컨플라이언스 변화



(b) 체적 변화

그림 8 최적화 과정

참 고 문 헌

- Allaire, G., Jouve, F., Toader, A. (2004) Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, 194, pp.363~393.
- Burger, M., Hackl, B., Ring, W. (2004) Incorporating topological derivatives into level-set methods, *Journal of Computational Physics*, 194, pp.344~362.
- Ha, S.H., Cho, S. (2005) Topological Shape Optimization of Heat Conduction Problems Using Level Set Method, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 48, pp. 67~88.
- Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov V. (1986) *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, New York.
- Höllig, K. (2003) *Finite element methods with B-splines*, *Frontiers in Applied Mathematics* 26, SIMA, Philadelphia, PA.
- Novotny, A.A., Feijóo, R.A., Tarroco, E., Padra, C. (2000) Topological sensitivity analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, pp.713~726.
- Osher, S., Sethian, J.A. (1988) Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, 79, pp.12~49.
- 하승현, 조선희 (2007) 등가하 해석법을 이용한 설계민감도 해석, *한국전산구조공학회논문집*, 20(3), pp.339~345.