

크리깅 기반 차원감소법을 이용한 베이지안 신뢰도 해석

Bayesian Reliability Analysis Using Kriging Dimension Reduction Method(KDRM)

안 다 운*

An, Dawn

최 주 호*

Choi, JooHo

원 준 호**

Won, Junho

(논문접수일 : 2008년 6월 13일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 19일)

요 지

신뢰성 기반 형상 최적화(RBDO)를 위한 기술은 한정된 정보로 인한 인식론적 불확실성을 다룰 수 있는 베이지안 접근에 근거하여 발달된다. 최근까지, 전통적인 RBDO는 측정 데이터가 무한히 많아서 확실한 확률정보를 알고 있다는 가정 하에 실행되었다. 하지만 실제로는, 부족한 데이터로 인해 기존의 RBDO 방법의 유용성을 떨어뜨린다. 본 연구에서는, 확률 정보의 불확실성을 인식하고, 따라서 산포를 갖게 되는 시스템 신뢰도의 확률 분포에서의 신뢰수준의 하한 값을 고려하기 위해 '베이지안 신뢰성'이 소개 된다. 이런 경우, 베이지안 신뢰성 해석은 기존 신뢰도 해석의 이중 해석을 요구하게 된다. 크리깅 기반 차원 감소 방법(KDRM)은 신뢰도 해석을 위한 새로운 효율적인 방법으로써 사용되며, 제시된 방법은 몇 가지 수치예제를 사용하여 설명된다.

핵심용어 : 베이지안, 신뢰성, 크리깅, 차원감소법

Abstract

A technique for reliability-based design optimization(RBDO) is developed based on the Bayesian approach, which can deal with the epistemic uncertainty arising due to the limited number of data. Until recently, the conventional RBDO was implemented mostly by assuming the uncertainty as aleatory which means the statistical properties are completely known. In practice, however, this is not the case due to the insufficient data for estimating the statistical information, which makes the existing RBDO methods less useful. In this study, a Bayesian reliability is introduced to take account of the epistemic uncertainty, which is defined as the lower confidence bound of the probability distribution of the original reliability. In this case, the Bayesian reliability requires double loop of the conventional reliability analyses, which can be computationally expensive. Kriging based dimension reduction method(KDRM), which is a new efficient tool for the reliability analysis, is employed to this end. The proposed method is illustrated using a couple of numerical examples.

Keywords : bayesian, reliability, kriging, DRM

1. 서 론

생산된 제품이 제 기능을 다하기 위해서는 설계자가 최적의 조건으로써 고려한 설계요소들을 모두 만족시켜 제작되어야 한다. 하지만 실제 제품을 설계하고 제작하는 과정에는 언제나 불확실성이 존재하며, 이로 인해 제품의 성능은 변동을 갖게 된다. 제품 생산 과정에서 발생하는 가공 오차와 재료의 물리적 성질, 생산 환경의 변화 등의 요인에서 오는 불확실성의 영

향을 줄이기 위해, 최근에는 초기 설계 단계에서부터 불확실성을 고려한 설계를 통해 제품의 품질향상과 기업의 이윤을 높이기 위한 노력을 하고 있다. 과거에는 이를 위한 방법으로써 설계시 적절한 안전계수를 도입하였지만, 말 그대로 '적절한' 안전계수는 재료의 과도 사용으로 이어 질 수 있어 생산비용의 절감에 대한 기대는 크게 할 수 없었다. 이에 대한 개선 방안으로써, 요구되는 안전조건하에서 최소비용의 사용이라는 목표를 이루기 위해 확률적인 기법을 이용하여 설계변수의 불확정성을 고려하고 생산된 제품의 품질을 실패확률로 정량화하는 신뢰성 설계에 대한 연구가 활발해져 왔다. 신뢰성 해석 기법에는 크게 몬테카를로 추출법(MCS), 중요도 추출법, 모멘트법이 속하는 추출법과 FORM(First Order Reliability Method), SORM(Second Order Reliability Method) 등

† 책임저자, 학생회원 · 한국항공대학교 기계공학과 석사과정

Tel: 02-3159-0130 ; Fax: 02-3158-2191

E-mail: skal34@nate.com

* 정회원 · 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 교수

** 한국항공대학교 기계공학과 박사과정

이 속하는 급속 확률 적분법이 있다. 이중 몬테카를로 추출법은 많은 시행횟수로 정확도가 보장되지만 경제성이 떨어지는 단점이 있다. 본 논문에서는 몬테카를로 추출법과 같은 정확도를 얻기 위해서 Kriging 보간법을 사용한 개선된 차원감소법(이하 KDRM)을 사용한다. 최근에는 제한된 샘플 데이터로부터 입력변수의 분포를 역추정하는 베이지안 개념까지 도입한 신뢰성 연구가 진행 되고 있다. 본 연구에서는 KDRM을 사용하여 불확실한 변수에 대한 분포의 추정과 시스템이 갖고 있는 불확실성을 파괴확률로 정량화하는 과정을 몇 가지 예제에 적용하고, 이를 몬테카를로 추출법과 다른 논문에서의 방법과 비교한다.

2. Kriging 기반 차원감소법 (KDRM)

2.1 가법분해방법(Additive decomposition methods)을 이용한 차원감소법

일반적인 시스템 응답함수의 m 차 통계적 모멘트는 다음과 같이 계산된다.

$$E(Y^m(X)) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Y_m(X) \cdot f_X(X) dX \quad (1)$$

식에서 보여지는 것과 같이 변수의 개수만큼 다중적분이 요구되지만 이는 매우 어려운 문제이다. 이를 해결하기 위해 차원감소법에서는 가법분해방법을 사용하여 다중적분을 다 변수 일차적분으로 바꾼다. 가법분해방법은 다음 식으로 정의된다.

$$Y(X_1, \dots, X_N) \cong Y_a(X_1, \dots, X_N) = \sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1) Y_a(\mu_1, \dots, \mu_N) \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리 하면 다음과 같다.

$$E(Y^m(X)) \cong E \left\{ \left[\sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1) Y_a(\mu_1, \dots, \mu_N) \right]^m \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1) Y_a(\mu_1, \dots, \mu_N) \right]^m \cdot f_{X_j}(x_j) dx_j \quad (3)$$

식 (3)의 적분을 수행하면 m 차 통계적 모멘트를 구할 수 있다.

2.2 Kriging 보간법

Kriging방법은, 1950년대, 프랑스의 지질수학자인 Georges Matheron이 남아프리카 광산 기술자였던 D. G. Krige가 적용했던 초기의 경험적인 방법을 수학적으로 정립하면서 사용되기 시작했다. 그 후 1989년 Sacks 등에 의해 전산 실험에 적합하도록 수정되면서부터 공학분야에 적용되기 시작하였고, 지질 통계학에서 Kriging이 variogram을 사용해 공간적 데이터들의 상관관계를 표현하던 것을 상관함수(correlation function)를 이용한 공분산 함수(covariance function)로 표현하였다. Kriging 방법은 구현하기 어렵고 계산과정이 복잡하지만 설계 변수와 제한조건식이 많고, 비선형성이 강한 문제에 대해 효과적인 방법으로 평가받고 있다. Kriging 모델은 일반적으로 상수항으로 처리되는 전역모델 $f(x)$ 과 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따르는 국소변형 $Z(x)$ 을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (4)$$

$Z(x)$ 의 공분산 식은 다음과 같이 표현된다.

$$Cov[Z(x^i), Z(x^j)] = \sigma^2 R[R(x^i, x^j)] \quad i, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$R(x^i, x^j)$ 은 임의의 두 점 (x^i, x^j) , $i, j = 1, \dots, n$ 사이의 상관함수이다. R 은 상관행렬(correlation matrix)로써 상관함수 값을 열성분으로 하는 대각성분이 1인 대칭행렬이다. 상관함수가 결정되면 다음과 같은 근사모델을 구성할 수 있다.

$$\hat{y} = \hat{\beta} + r^T(x) R^{-1} (y - f\hat{\beta}) \quad (6a)$$

여기서

$$r^T(x) = [R(x, x^1), R(x, x^2), \dots, R(x, x^n)], \quad \hat{\beta} = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} y \quad (6b)$$

이다.

3. 베이지안 신뢰성(Bayesian Reliability)

베이지안 방법은 불확실성을 정량화하기 위해 통계적 데이터 분석에 기반 한 확률모델을 이용하여 시스템의 응답을 추론하는 것이다. 과거 자료에 의한 것이나 이론 등 다른 어떤 것으로부터 얻은 사전정보에 대한 분포를 $p(\theta)$ 라 하고, 샘플 또는 데이터의 분포로 우도함수를 $p(y|\theta)$, 미지 변수이지만 측정 가능한 y 의 확률분포를 주변분포 $p(y)$, 이러한 값들에

의해 달라지는 추정하고자 하는 분포를 사후분포 $p(\theta|y)$ 라 하면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \quad (7a)$$

여기서

$$p(y) = \int p(y, \theta)d\theta = \int p(y|\theta)p(\theta)d\theta \quad (7b)$$

이다. 식 (7)이 나타내는 것이 베이저안 법칙이며, 신뢰도 평가시, 변수의 사전지식이 측정된 데이터에 따라 결정되어 계산되어지는 과정이 반복된다. 따라서 사전지식을 잘 알고 있는 것은 베이저안 추론 과정에서 매우 중요한 요소이다.

4. 적용예제

본 연구에서는 KDRM을 이용한 베이저안 신뢰성 해석의

정확도와 효율성을 논의하기 위해 수치예제와 공학문제에 적용하였다.

4.1 예제 1

선행된 논문(Youn 등, 2007)에서 다루어진 수치예제로써 KDRM에 적용하여 확률분포의 통계적 모멘트와 베타분포의 파라미터, P_y 의 5%, 95% 신뢰수준의 결과를 비교하여 나타내었다.

$$Y(X_1, X_2) = 1 - X_1^2 X_2 / 20 \quad (8)$$

여기서 두 변수는 독립적인 관계이고, X_1 은 파라미터가 알려지지 않은 정규분포로써 단지 20개의 샘플로부터 샘플평균이 2.9이고, 샘플의 표준편차가 0.2이라는 것을 안다. X_2 는 평균이 2.8이고, 표준편차가 0.2인 정규분포를 따른다. 비교를 위해 MCS는 총 1e8번의 계산을 수행하였다. 표 1은 샘플

표 1 Comparison of the results by MCS and KDRM

sample number	Method	Num. of gcalls	Statistical moments				Parameters of beta PDF of P_y		P_y values			
			mean	stdev	skew.	kurt.	alpha	beta	5%	MLE	95%	interval
20	MCS	1.E+08	0.831	0.060	-0.741	3.753	31.279	6.386	0.722	0.849	0.919	0.197
	KDRM	25	0.828	0.058	-0.533	3.502	33.735	7.021	0.723	0.845	0.914	0.191
	ratio		99.66	96.85	72.01	93.31	107.85	109.95	100.17	99.53	99.46	-
	Youn	100			N/A		18.707	3.293	0.712	0.885	0.952	0.240
17	MCS	1.E+08	0.828	0.066	-0.818	3.938	25.956	5.396	0.708	0.850	0.924	0.216
	KDRM	25	0.825	0.064	-0.595	3.627	28.108	5.945	0.710	0.846	0.919	0.209
	ratio		99.70	96.54	72.72	92.11	108.29	110.18	100.30	99.53	99.46	-
	Youn	85			N/A		16.285	2.715	0.710	0.899	0.961	0.252
14	MCS	1.E+08	0.826	0.072	-0.814	3.778	21.925	4.607	0.695	0.853	0.930	0.235
	KDRM	25	0.822	0.072	-0.677	3.830	22.470	4.855	0.692	0.848	0.926	0.234
	ratio		99.50	99.45	83.08	101.37	102.49	105.39	99.57	99.41	99.57	-
	Youn	70					13.305	2.695	0.661	0.879	0.954	0.293
11	MCS	1.E+08	0.823	0.082	-0.891	3.895	16.935	3.646	0.671	0.858	0.938	0.267
	KDRM	25	0.817	0.083	-0.804	4.196	16.765	3.752	0.664	0.851	0.935	0.271
	ratio		99.30	101.34	90.22	107.72	99.00	102.91	98.88	99.18	99.63	-
	Youn	55			N/A		11.118	1.882	0.674	0.920	0.974	0.300
8	MCS	1.E+08	0.815	0.100	-0.999	4.038	11.392	2.592	0.626	0.867	0.951	0.324
	KDRM	25	0.808	0.103	-1.026	4.999	11.107	2.644	0.616	0.860	0.948	0.332
	ratio		99.15	102.19	102.68	123.80	97.50	102.01	98.31	99.19	99.68	-
	Youn	40			N/A		8.660	1.340	0.663	0.958	0.986	0.323
5	MCS	1.E+08	0.797	0.130	-1.055	4.013	6.884	1.754	0.549	0.886	0.965	0.416
	KDRM	25	0.788	0.137	-1.285	6.389	6.196	1.670	0.524	0.886	0.965	0.441
	ratio		98.85	105.94	121.86	159.22	90.01	95.18	95.55	100.00	100.05	-
	Youn	25			N/A		5.754	1.246	0.555	0.951	0.982	0.428
3	MCS	1.E+08	0.766	0.175	-1.057	3.679	3.716	1.135	0.423	0.953	0.980	0.557
	KDRM	25	0.757	0.170	-0.711	3.862	4.085	1.312	0.429	0.908	0.972	0.543
	ratio		98.81	96.91	67.30	104.98	109.90	115.53	101.47	95.28	99.20	-
	Youn	15			N/A		3.764	1.236	0.411	0.921	0.974	0.563

수의 감소에 따른 MCS와 KDRM, Youn 방법의 결과 비교를 보여준다. KDRM에서의 평균과 편차의 MCS대비 비율이 95~105%로 높은 정확도를 보이며, 이는 왜도(skewness)와 첨도(kurtosis)의 비교적 낮은 정확도와 상관없이 베타분포의 파라미터인 α 와 β 를 비교적 정확히 구해내는데 이용된다. 결과적으로, 베이지안 신뢰성 해석의 궁극적인 목표로서, MCS 대비 100%에 가까운 정확도의 신뢰수준(P_Y Values)을 얻게 된다. 이는 샘플수가 20개에서 3개로 줄어드는 과정에서도 적용되는 결과이며, 이러한 결과에서, 실제 제품의 설계·제작 시, 큰 비용절감의 효과를 기대할 수 있다.

4.2 예제 2

$$Y(X_1, X_2) = 1 + X_1^3 + 2X_2^2 - 5X_2^4 \tag{9}$$

여기서 두 변수는 독립적인 관계이고, X_1 은 20개의 샘플로부터 샘플평균이 2이고, 샘플의 표준편차가 0.3이다. X_2

는 $Wei(1.925, 6.925)$ 를 따르며, 이에 상응하는 평균과 표준편차는 각각 1.8, 0.3 이다. 표 2에서 확률분포의 통계적 모멘트와 베타분포의 파라미터, P_Y 의 5%, 95% 신뢰수준을 비교한 결과를 보여주고 있다.

4.3. test bed examples

KDRM이 아무 비선형 함수에나 잘 맞는 것은 아니다. 평균을 기준으로 주위 분포에서 비선형성이 비교적 커지는 경우에는 MCS에서 조차도 비선형성의 정도에 따라 정확도가 떨어지며, KDRM에서의 결과 역시 정확도가 떨어진다. 이에 대한 예제 함수로 식 (10)과 식 (11)를 사용하여 확률분포의 통계적 모멘트 결과를 표 3에 나타내었으며, 그림 1에서 이들 함수에 대한 비선형성을 확인할 수 있다.

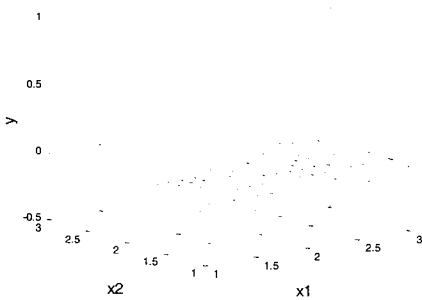
$$Y(X_1, X_2) = -\sin X_1 \cos^3 X_2 \tag{10}$$

표 2 Comparison of the results by MCS and KDRM

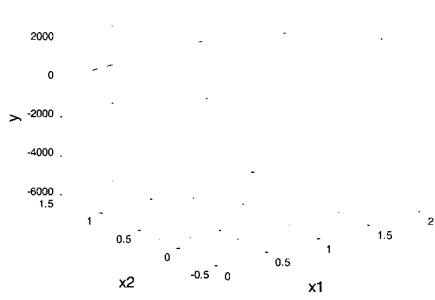
Method	Num. of gcalls	Statistical moments				Parameters of beta PDF of P_Y		P_Y values			
		mean	stdev	skew.	kurt.	alpha	beta	5%	MLE	95%	interval
MCS	1.E+08	0.944	0.008	-0.658	4.002	774.144	46.248	0.930	0.945	0.956	0.026
KDRM	25	0.946	0.008	-0.580	3.748	750.421	42.584	0.933	0.947	0.959	0.026
ratio		100.29	100.00	88.12	93.65	96.94	92.08	100.29	100.21	100.27	-
Youn	100	N/A				19.937	2.063	0.789	0.947	0.982	0.193

표 3 Statistical moments of P_Y

Method	Statistical moments				Method	Statistical moments					
	mean	stdev	skew	kurt		mean	stdev	skew	kurt		
(a) $Y(X_1, X_2) = -\sin X_1 \cos^3 X_2$	MCS	0.223	0.004	0.258	4.076	(b) $Y(X_1, X_2) = 1/(X_1^2 X_2^2 - 5X_2^4)$	MCS	0.565	0.038	-0.056	3.211
	KDRM	0.413	0.001	1.287	160.00		KDRM	0.280	0.036	2.490	10.937
	ratio	185.11	27.91	498.33	3925.37		ratio	49.50	94.44	-4478.06	340.59



(a) $Y(X_1, X_2) = -\sin X_1 \cos^3 X_2$



(b) $Y(X_1, X_2) = 1/(X_1^2 X_2^2 - 5X_2^4)$

그림 1 nonlinearity of example functions

여기서 두 변수는 독립적인 관계이고, X_1 은 20개의 샘플로부터 샘플평균이 2이고, 샘플의 표준편차가 0.3이다. X_2 는 평균이 1.8이고, 표준편차가 0.3인 정규분포를 따른다.

$$Y(X_1, X_2) = 1 / (X_1^2 X_2^2 - 5X_2^4) \quad (11)$$

여기서 두 변수는 독립적인 관계이고, X_1 은 20개의 샘플로부터 샘플평균이 1이고, 샘플의 표준편차가 0.3이다. X_2 는 평균이 0.5이고 표준편차가 0.3인 정규분포를 따른다.

4.4. I-beam 예제

그림 2와 같이 단순 지지된 I-beam의 해석을 고려한다.

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_1 - \frac{X_2 X_4 (X_3 - X_4)}{0.0822 X_3 X_5^3} \quad (12)$$

여기서 각 변수는 독립적인 관계이고 X_1 은 빔이 견뎌낼 수 있는 한계응력으로, 10개의 샘플로부터 샘플평균이 1172.12 MPa, 샘플의 편차가 32.82MPa이다. 각각의 변수에 대해, 하중 P 는 $X_2 \sim N(27, 0.89)kN$, 빔의 길이 l 은 $X_3 \sim N(3.05, 0.025)m$, A 에서 하중 작용 지점 사이의 거리 a 는 $X_4 \sim N(1.83, 0.025)m$, 빔의 높이 h 는 $X_5 \sim N(5.90, 0.085)cm$ 이다. 표 4에서 결과를 나타내며, 변수가 확정적인 경우 예제의 빔은 안전하지만, 불확실성을 고려한 경우 평균파괴확률이 49%나 되는 것이 확인되며 설계의 수정이 요구된다.

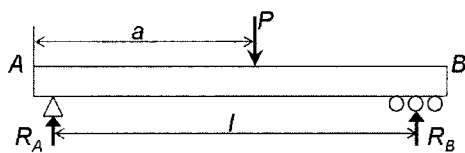


그림 2 Simply supported beam

표 4 Statistical moments of P_y

Method	Statistical moments			
	mean	stdev	skew	kurt
MCS	0.490	0.061	0.025	3.258
KDRM	0.495	0.063	0.022	3.585
ratio	101.06	103.31	88.45	110.03

4.5 Fortini 클러치 예제

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \arccos \left(\frac{X_1 + 1/2(X_2 + X_3)}{X_4 - 1/2(X_2 + X_3)} \right) \quad (13)$$

표 5 Component variables of clutch Y

		$X_1 \sim N$		$X_2 \sim N$	$X_3 \sim N$	$X_4 \sim Ray$
n=15	\bar{x}	55.29	μ	22.86	22.86	101.6
	s	0.0793	σ	0.0043	0.0043	0.0793

표 6 Statistical moments of P_y

	Statistical moments			
	mean	stdev	skew	kurt
MCS	0.991	0.010	-3.881	27.157
KDRM	0.992	0.011	-3.365	17.702
ratio	100.08	101.92	86.70	65.18

접촉각도(contact angle)는 서로 독립적이며 설계사양으로 Y 는 $5^\circ \sim 9^\circ$ 에 놓여야 한다. 각 입력변수의 평균과 편차는 표 5와 같으며 표 6에서 신뢰도 P_y 의 통계적 모멘트를 비교한 결과를 보여주고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 KDRM을 이용하여 몇 가지 예제에 대해서 베이지안 신뢰성 해석을 하였다. 입력 변수의 분포의 파라미터를 모를 때, 보통 20개의 샘플에서 적게는 3개의 샘플만을 사용하여 입력 변수의 분포를 추정하였고, 이를 이용하여 구한 신뢰도 또는 파괴확률의 평균과 표준편차, 베타분포의 두 파라미터, 확률 밀도함수의 5%, 95% 신뢰구간에서의 결과를 MCS에서의 결과와 비교하였다. 이 결과에서 본 연구 방법의 정확성과 효율성을 입증하였고, 평균점을 중심으로 비선형성이 상대적으로 심한 함수를 제외한 경우라면, 일반적인 비선형 함수와 공학문제로의 적용이 가능함을 확인하였다. 이는 앞으로 베이지안 신뢰성 구조 최적설계 문제에 적용되어 최소 생산비용으로 안전성을 보장하는 설계에 높은 효율성을 제공하는데 이용 될 수 있다.

감사의 글

이 논문은 과학재단(과제번호 R01-2007-000-20942-0)의 지원에 의해 수행되었고 이에 감사합니다.

참 고 문 헌

- 최현석, 이상훈, 광병만 (2004) 다수준 실험계획법을 이용한 비정규 분포의 신뢰도 계산 방법, 대한기계학회, 11, pp.840~845.
 Choi, C.H., Won, J.H., Choi, J.H. (2007) *Improving*

the Dimension Reduction Method (DRM) in the uncertainty analysis and application to the reliability based design optimization, 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization.

Kapur, K.C., Lamberson L.R. (1977) *Reliability in Engineering Design*, John Wiley & Sons, Inc., Canada.

Rahman, S., Xu, H. (2004) A univariate dimension reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics, *Probabilistic engineering mechanics*, 19(4), pp.393~408.

Youn B.D., Wang P. (2007) *Bayesian Reliability-based Design Optimization Using Eigenvector Dimension Reduction (EDR) Method*, SP, 2119, pp.155~168.