

# 베리오그램 모델 변화에 따른 정규 크리깅 보간법의 민감도분석

## Sensitivity Analysis of Ordinary Kriging Interpolation According to Different Variogram Models

우 광 성†      박 진 환\*      이 희 정\*\*

Woo, Kwang-Sung      Park, Jin-Hwan      Lee, Hui-Jeong  
(논문접수일 : 2008년 6월 13일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 18일)

### 요 지

본 연구는 두 가지 주요 목적을 갖고 있다. 첫째는, 실험적 베리오그램을 작성하는데 필수적인 분리거리 허용한계를 얼마로 하느냐에 따라 변화되는 베리오그램 모델링에 기초를 둔 정규크리깅 보간법을 유한요소법에 적용이 가능한 가를 시험하는 것이다. 둘째는, 다항식모델, 가우스모델 및 구형모델의 선택에 따른 정확성을 조사하는 것이다. 이 목적을 위해 가우스 적분점에서 취득된 응력값 데이터로부터 새로운 응력장을 예측하기 위해 가중-최소제곱법이 적용되었다. 여기서 가중치는 동일한 값을 사용하는 기존의 방식과 달리 응력값들의 보간을 위해 사용되는 실험적 및 이론적 베리오그램에 의해 결정된다. 제안된 접근방식의 타당성을 보이기 위해 2개의 수치예제를 테스트하였다. 이 논문에서 사용된 수치예제의 경우 25% 분리거리 허용한계를 사용한 가우스모델이 참고문헌의 이론 해들과 가장 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

**핵심용어** : 정규크리깅 보간법, 베리오그램 모델, 분리거리 허용한계, 가우스모델

### Abstract

This paper comprises two specific objectives. The first is to examine the applicability of Ordinary Kriging interpolation(OK) to finite element method that is based on variogram modeling in conjunction with different allowable limits of separation distance. The second is to investigate the accuracy according to theoretical variograms such as polynomial, Gauss, and spherical models. For this purpose, the weighted least-square method is applied to obtain the estimated new stress field from the stress data at the Gauss points. The weight factor is determined by experimental and theoretical variograms for interpolation of stress data apart from the conventional interpolation methods that use an equal weight factor. The validity of the proposed approach has been tested by analyzing two numerical examples. It is noted that the numerical results by Gauss model using 25% allowable limit of separation distance show an excellent agreement with theoretical solutions in literature.

**Keywords** : ordinary kriging interpolation, variogram model, allowable limit of separation distance, Gauss model

### 1. 서 론

유한요소법은 물리 현상을 기술하는 미분방정식의 해를 구할 수 있는 가장 대표적인 방법이다. 그러나 이러한 해석값들은 특정 지점에서만 계산된 결과값들이다. 그래서 특정 지점을 제외한 곳에서의 값들은 보간을 통하여 알아낼 수 밖에 없다. 이러한 보간을 할 때 최소제곱법, 라그랑지 보간법 등

의 기존 방법들은 동일한 가중치를 적용하여 보간을 수행하였다. 구조해석 후 얻어진 결과값들은 연속적으로 분포하고 있다. 그러므로, 주어진 공간상에서 수집된 자료값을 이용하여 미지의 값을 예측하기 위해서는 우선적으로 주어진 자료들의 공간적 상호관계와 자료값의 연속성 여부를 파악하여야 한다. 공간적 상관관계의 정확한 파악은 차후 크리깅 보간법(kriging interpolation)의 예측 신뢰도와도 직접적으로 연

† 책임저자, 정회원 · 영남대학교 건설환경공학부 교수

Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622

E-mail: kswoo@yu.ac.kr

\* 정회원 · 서울시청 도시기반시설본부 시설안전부

\*\* 경상북도 영양군청 건설재난관리과

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

관된다. 이러한 공간적 상관관계를 파악할 수 있는 여러 가지 통계학적 모형들이 존재한다. 따라서 본 연구에서는 기존의 동일한 가중치를 부여한 보간법이 아닌 서로 다른 가중치를 부여하는 크리깅 보간법은 공간자료의 처리기법으로 많이 사용되고 있기 때문에 구조해석분야에 적용함으로써 그 유용성을 검증하려고 한다.

잘 아는 바와 같이 크리깅 보간법은 지구통계학분에 널리 사용되고 있는 보간법으로 광물의 매장량, 광범위한 지역의 지하수위, 대수층, 오염물질의 확산정도 등을 예측하기 위해 많이 사용되고 있다. 크리깅 보간법은 1951년 남아프리카 공화국의 D.G. Krige라는 광산 기술자가 광맥의 공간적 정보를 이용하여 새로운 광맥을 찾기 위해 사용되면서 경험적 방법으로 개발되었다. 경험에 의존한 광물 매장량을 예측하는 방법을 Matheron이 수학적으로 정립하였는데, 1973년 Matheron이 제안한 정규크리깅 보간법(Ordinary Kriging interpolation)은 오차분산을 최소로 하는 가중선형조합에 의한 보간법이었다. 1963년에는 특정한 경향을 보이는 자료군에 대해서 공간적으로 변화하거나 특정한 경향을 갖는 평균값을 제거하지 않고 크리깅 가중치를 계산할 때 이를 고려하여 자료 분포의 공간적 불변성을 가정하지 않는 일반 크리깅 보간법(universal kriging interpolation)을 제안하였다. 1989년에는 Sacks 등에 의해 발표된 논문의 제목을 따라 명명한 DACE(Design and Analysis of Computer Experiments)모형과 공간적 상관관계의 거리모형 등을 포함한 포괄적 개념의 새로운 보간법으로서 다양한 분야로의 발전되었다. 크리깅 보간법이 가진 가장 큰 특징이라 할 수 있는 이웃하는 점들 간의 물성치들은 서로 비슷한 특성을 갖는다는 즉, 공간적 상호관계를 고려한다는 점에서 광물질 등급 분포, 광범위한 지역의 지하수위 등의 예측부터 지반공학에 있어서 공학적 물성치의 사상(mapping)까지 여러 분야에 널리 사용되어 왔다. 광물 등급(mine grade, Krige, 1966), 토양 성질(soil characteristic, Webster, 1985), 강우량(rainfall, Bacchi, 1995), 유전빈도(gene frequency, Piazza, Menozzi and Cavalli-Sforza, 1980), 또는 이미지 열 코딩(image sequence coding, Decenciere, 1998)과 같은 공간 자료의 처리를 통한 예측에 사용되고 있다. 구조해석분야 혹은 유한요소해석분야에 크리깅 보간법을 적용한 사례는 국내외적으로 극히 드물게 나타나고 있다. 최근에 들어 크리깅 보간법의 구조해석분야의 적용에 대한 연구가 발표되었다. Sakata(2002)는 구조물의 최적화 문제에 크리깅 보간법을 적용하였고, Gu(2002)는 Moving Kriging Interpolation에 의한 새로운 element-free Galerkin(EFG) method의 정식화 과정을 제안하였다. 또한 Dai와 Liu

(2003)등에 의해 이동 크리깅법(moving kriging interpolation)을 통한 EFG법의 적층평판의 진동문제 문제로의 적용에 대한 논문이 발표되었는데, 이 논문에서는 크리깅 보간법을 위해 결정되는 여러가지 상수값에 의해 해석의 결과가 나타내는 경향에 대해 조사·연구되었다. 최근에는 A.I.T. 대학의 Worsak(2005, 2007) 교수팀은 유한요소법과 무요소법(meshless method)에 이동 크리깅법을 적용하여 좋은 연구결과를 보여 주었다.

본 연구에서는  $p$ -version 유한요소 해석을 통한 결과값을 토대로 크리깅 보간을 통해 보간의 유용성을 고찰하고자 한다. 이때 크리깅 보간을 수행하기 위한 이론적 베리오그램(theoretical variogram)의 모델과 분리거리 허용한계(all-owable limit of separation distance)에 의한 보간의 정확성을 수치해석 예제를 통해 검증하고자 한다. 또한 실험적 베리오그램(experimental variogram)으로부터 구해지는 이론적 베리오그램을 작성할 때 필요한 상관거리(range)와 문턱값(sill)을 결정하려면 주관적 개입이 요구된다. 따라서, 본 논문저자들의 적응적 유한요소해석과 균열판 해석 등의 기존 연구(2006)에서는 주관의 개입을 배제하기 위해 최소 제곱법을 사용한 다항식모델(polynomial model)을 사용한 바가 있다. 그러나, 본 연구에서는 이론적 베리오그램으로 많이 채택되는 Gauss model과 Spherical model을 사용하여 그 정확도를 서로 비교해 보고자 한다. 수치 해석 예제로는 인장력을 받는 원공판의 응력집중계수를 이론값과 정규크리깅 보간값의 비교하고자 한다. 또한 인장을 받는 중앙부 균열 모델의 응력확대계수를 정규크리깅으로 보간한 후 기존 연구자들의 결과값과 비교 검토하고자 한다.

## 2. 베리오그램 모델링

### 2.1 실험적 베리오그램(Experimental Variogram)

대상 공간상에서 채집된 자료로부터 각 자료의 위치정보로부터 각 자료값들간의 거리와 베리오그램을 식 (1)로부터 계산하게 된다. 실험적 베리오그램(experimental variogram)은 계산된 베리오그램의 일반적인 명칭이다. 다음 절에서의 이론적 베리오그램(theoretical variogram)과 구별 짓기 위함이기도 하다. 실험적 베리오그램은 불변성의 가정으로부터 계산된 거리와 베리오그램의 관계를 나타낸다. 실험적 베리오그램의 작성을 위해 통상적으로 분리거리(separation distance)의 개념이 사용된다. 대상 공간에서 무작위로 채집된 자료들간의 거리는 0에서 공간 영역의 크기까지 다양한 분포를 보이게 된다.

주어진 공간상에서 수집된 자료값을 이용하여 미지의 값을

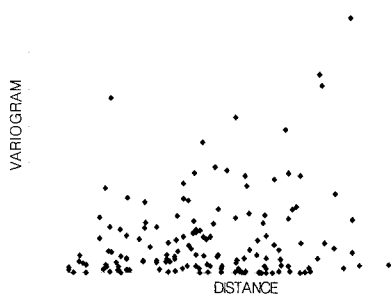


그림 1 실험적 베리오그램(분리거리 미사용)

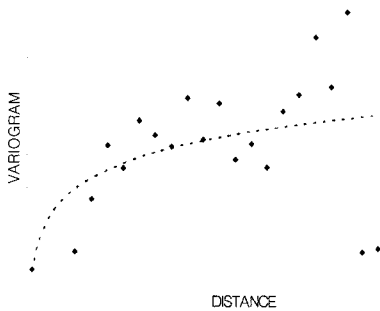


그림 2 실험적 베리오그램(분리거리 사용)

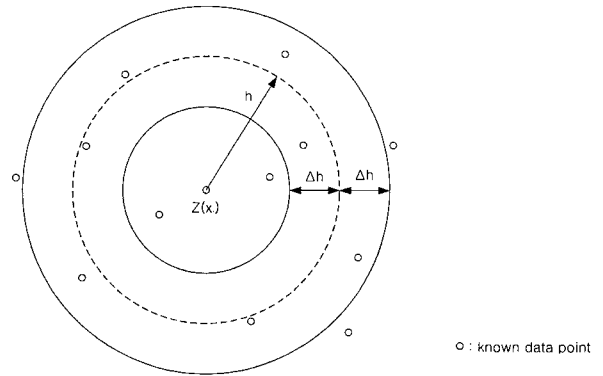


그림 3 분리거리 h만큼 떨어진 자료를 이용한 베리오그램 계산(최종근, 2002)

하나 이는 절대적인 기준이 아니라 보편적인 방법이다. 필요에 따라서는 분리거리의 40% 또는 30%를 사용할 수도 있으며 50% 이상을 사용하는 경우는 거의 없다. 그림 2는 분리거리의 개념을 사용하여 나타낸 실험적 베리오그램이다. 그림 1과는 달리 자료간의 공간적 상관관계에 대해 파악하기가 쉬워진다. 하지만 분리거리의 개념을 사용할 때 적당한 분리거리를 찾아 내지 못하면 오히려 상관성의 파악이 어려워지므로 주의해야 한다. 그림 3은 분리거리 h만큼 떨어진 자료를 이용한 베리오그램 계산과정을 나타낸 그림이다.

예측하기 위해서는 우선적으로 주어진 자료들의 공간적 상호관계와 자료값의 연속성 여부를 파악하여야 한다. 공간적 상관관계의 정확한 파악은 차후 크리깅 보간법의 예측 신뢰도와도 직접적으로 연관된다. 베리오그램은 자기상관이나 자기공분산 혹은 매도그램과 같이 일정한 거리에 있는 자료들의 공간적 유사성을 나타내는 척도로 식 (1)와 같이 정의된다.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (1)$$

대상 공간상에서 채집된 자료로부터 각 자료의 위치정보로부터 각 자료값들간의 거리와 베리오그램을 계산하게 된다. 그러나 대상 공간에서 무작위로 채집된 자료들간의 거리는 0에서 공간 영역의 크기까지 다양한 분포를 보이게 된다. 거리에 따른 베리오그램을 그래프상에 그리게 되면 오히려 자료들의 공간적 상관성을 찾아내기 어려워질 수 있다. 따라서 적당한 크기의 분리거리 h를 설정하고, 일정한 분리거리 허용한계(allowable limit of separation distance) Δh를 이용하여 완화된 분리거리를 사용한다. 이 때, 자료간의 거리가 h - Δh보다 크고 h + Δh보다 적은 자료간의 베리오그램은 같은 거리를 가짐을 가정하고 평균한다. 분리 거리에 대한 허용한계를 50%로 하면 전 구간내에서 누락되는 베리오그램이 없다는 것을 의미한다. 일반적으로 허용한계를 분리거리의 50%를 사용

## 2.2 이론적 베리오그램(Theoretical Variogram)

앞 절의 실험적 베리오그램을 계산하여 거리와 베리오그램의 공간적 상관관계를 그래프로 나타내었다면 실험적 베리오그램이 나타내는 자료의 공간적 상관관계를 이상적으로 표현하는 이론적 베리오그램(theoretical variogram)을 결정해야 한다. 이론적 베리오그램은 비교적 간단한 수식으로 표현되며 실험적 베리오그램의 경향을 잘 표현하는 적절한 모델의 선택이 매우 중요하다. 이론적 베리오그램의 선택이 중요한 이유는 최종적인 크리깅 보간법의 예측값의 정도(accuracy)에 영향을 주기 때문이다. 완화된 분리거리를 사용한 베리오그램 작성이 끝난 후 그림 4와 같이 자료간의 거리와 베리오그램의 관계로부터 결정되는 상수를 결정해야 한다. 이들 상수는 크리깅 보간법을 사용하는 사용자에게 의해 결정되는데 주관의 개입을 최소로 하는 상수를 결정하는 것이 매우 중요하다. 이들 상수를 상관거리(range) a와 문턱값(sill) C<sub>0</sub>이라 한다. 상관거리란 자료들간의 공간적 상관관계가 약화되거나 혹은 상실되어 거리-베리오그램 모델에서 베리오그램이 일정한 경향 없이 분포하거나 일정한 값을 유지하기 시작하는 거리를 의미한다. 베리오그램이 거리 h에 관한 함수라고 하면, 베리오그램은 다음 식 (2)과 같이 표현할 수 있다.

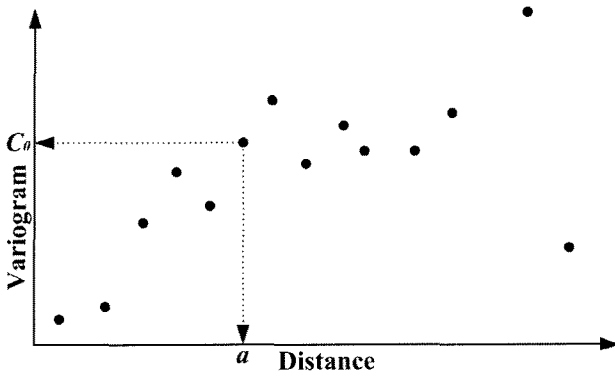


그림 4 Range와 Sill

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (2)$$

이론적 베리오그램 모델은 표 1과 같이 여러 가지 형태가 존재하고 사용자는 이 중 자료의 공간적 상관관계를 가장 잘 묘사하는 모델을 선택해야 한다. 표 1에서  $a$ 는 상관거리 (range),  $C_0$ 는 문턱값(sill) 그리고  $h$ 는 분리거리를 나타낸다. 다만 상관거리와 문턱값의 결정시 포함된 사용자의 주관과 모델의 선택시 포함된 주관의 개입으로 인해 최종적인 예측값의 결과의 신뢰성에 영향을 주지 않도록 신중하게 결정되어야 한다. 논문저자들의 기존 연구(2006)에서는 이러한 주관적 개입을 배제하고 베리오그램의 컴퓨터 프로그램화를 위해 최소제곱법 등의 방법을 사용하여 다항식 형태로 나타내는 다항식모델(polynomial model)을 사용한 적이 있다. 따라서, 본 논문에서는 대표적인 이론적 베리오그램인 구형모델, 가우스모델을 사용하여 다항식 모델에 비해 어떤 차이가 있는지 분석하고자 하였다.

① 구형모델 (Spherical model) - 일반적으로 가장 많이 사용되는 모델이다. 3차 다항식 형태로 표현되며 선형모델과 마찬가지로 상관거리에서 베리오그램 값이 문턱값과 일치한다.

② 가우스모델 (Gauss model) - 일반적으로 잘 사용은 하지 않음. 작은 분리거리에서 자료들의 강한 상관성을 나타내거나 또는 연속성이 강한 모델을 사용하고자 할 때 사용한다. 가우스 모델도 문턱값의 95%에 해당하는 값을 주는 분리거리를 실제적인 상관거리로 사용한다.

베리오그램은 각 모델식과 그 모델의 상관거리와 문턱값으로 특징 지워진다. 이런 인자들이 크리깅 보간에 미치는 영향은 다음과 같다. 첫째, 동일한 모델이면서 상관거리는 같고 오직 문턱값만 다른 경우, 다른 모든 조건이 동일하다면 크리깅 방정식의 양변에 일정한 상수를 곱한 것과 같기 때문에 동일한 가중치를 얻게 된다. 따라서 실제 크리깅의 예측치에는 변화가 없다. 단지 문턱값이 크면 그만큼 자료의 불확실성을 나타내는 분산값이 커지게 되므로 오차분산은 커지게

표 1 이론적 베리오그램의 수학적 모델

Model	베리오그램 $\gamma(h)$	분리거리 $h$
Linear	$C_0 \frac{h}{a}$	$0 \leq h \leq a$
	$C_0$	$h > a$
Spherical	$C_0 \left[ 1.5 \left( \frac{h}{a} \right) - 0.5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right]$	$0 \leq h \leq a$
	$C_0$	$h > a$
Exponential	$C_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h}{a} \right) \right]$	$h \geq 0$
Gauss	$C_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h}{a} \right)^2 \right]$	$h \geq 0$
Polynomial	$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$	

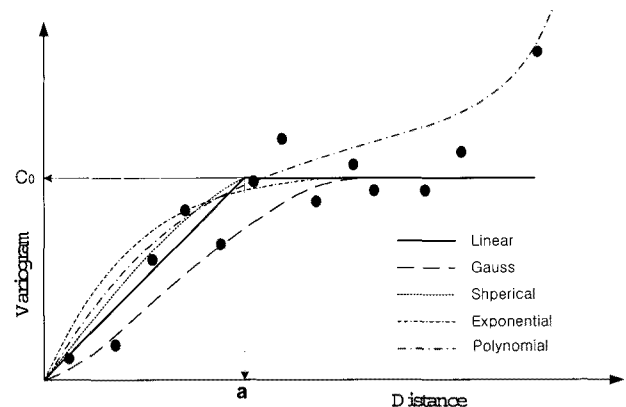


그림 5 이론적 베리오그램 모델

된다. 둘째, 동일한 문턱값과 상관거리를 가지는 두 모델의 경우, 동일한 분리거리에서 베리오그램이 작다는 것은 그만큼 값들이 비슷하다는 의미이다. 따라서 베리오그램이 작은 경우 가 가까운 값들에 더 큰 영향을 받게 된다.

### 3. 정규크리깅(Ordinary Kriging)

정규크리깅 보간법의 정식화 또한 단순크리깅(simple kriging) 보간법과 같은 방식을 따르고 있지만 제약조건이 첨가되어서 별도의 수학적인 과정을 거쳐야 한다. 첫째, 편향의 정의로부터 크리깅 보간법의 추정식이 편향되지 않을 조건을 만족하여야 한다. 편향은 모집단의 인자 평균과 추정식의 평균의 차이로 정의되며 이러한 차이가 없을 때 추정식이 편향되지 않았음을 의미한다. 이를 수식으로 표현하면 다음의 식 (3)과 같다.

$$b_z = E(z) - E(z^*) = E(z) - E \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right) = 0 \quad (3)$$

식 (3)에서  $b_z$ 는  $z^*$ 의 편향의 정도를 나타내며 가중치

의 함수인 예측값을 구하는 식으로부터 편향값이 0이 되기 위하여 모든 가중치의 합은 1이 되어야 함을 알 수 있다.

$$1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \tag{4}$$

식 (4)는 가중치의 합이 1이 되는 정규 크리깅 보간법의 제약조건을 나타낸다. 이 제약조건을 만족하는 최소의 오차 분산을 가지는 가중치를 계산하면 정규 크리깅 보간법을 통한 예측이 가능해진다.

Minimise,

$$\sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2, \quad \sigma_{ij}^2 = Cov(z_i, z_j)$$

Subject to,  $1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  (5)

식 (5)은 정규 크리깅 보간법의 오차분산과 그 오차분산식이 가지는 제약조건을 나타내고 있다. 이러한 제약조건을 가진 함수의 최대 혹은 최소를 구하는 문제는 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)을 통해 해결할 수 있다. 조건을 만족해야 하는 함수에 라그랑지 승수를 더하여 새로운 함수로 만들고 이 함수를 통해 최대, 최소값을 구하게 된다. 새로운 함수를 라그랑지 목적함수(Lagrange objective function)라고 하며 더해진 인자를 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)라 한다. 정규 크리깅 보간법의 오차분산식을 라그랑지 승수법을 통해 새로운 함수로 만들면 다음의 식 (6)과 같다.

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \omega) = \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2 + 2\omega \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \omega)$  : Lagrange Objective Function  
 $\omega$  : Lagrange multiplier (6)

식 (6)과 같이 주어진 제약조건을 포함하는 다른 형태의 함수의 최대, 최소를 구하는 문제도 단순 크리깅 보간법의 경우와 마찬가지로 편미분을 통해 그 값을 구할 수 있다. 다만 정규 크리깅 보간법의 오차분산식은 라그랑지 승수가 포함되어 있으므로 가중치  $\lambda$ 와 라그랑지 승수  $\omega$ 에 대해 각각 편미분하여야 한다.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_l} = -2\sigma_{0l}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{il}^2 - 2\omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = 2 \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = 0 \tag{7}$$

식 (7)를 간단히 정리하면 식 (8)과 같다. 여기서,  $\sigma_{0l}$ 은 알고 싶은 위치의 점 0와 기준 가우스적분점의 위치  $l$ 과의 상관관계를 나타낸다.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{il}^2 - \omega = \sigma_{0l}^2, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \tag{8}$$

식 (8)은 정규 크리깅 보간법의 추정식을 나타낸다. 또한 정규 크리깅 보간 추정식도 행렬식의 형태로 표현이 가능하며 단순 크리깅 보간법의 행렬식과 다른 점은 편향되지 않을 조건을 만족하는 최소의 오차분산을 구하기 위해 도입된 라그랑지 승수에 의해 행렬식의 형태가 다소 달라진다. 정규 크리깅 보간법의 경우  $n$ 개의 자료로부터 예측값을 예측하게 되면  $(n+1) \times (n+1)$ 의 크기를 가지는 행렬이 만들어진다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 & 1 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n}^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \dots & \sigma_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{02}^2 \\ \dots \\ \sigma_{0n}^2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

만약, 편향조건 이외에 또 다른 제약조건을 만족해야한다면 제약조건 수만큼 행렬의 크기가 커진다고 할 수 있다. 식 (9)는 행렬식의 형태로 표현된 정규 크리깅 보간법의 추정식을 나타내고 있다.

#### 4. 수치해석 예제

##### 4.1 인장력을 받는 원공판

수치해석 예제에 사용한 기하형상의 값들로  $W=11\text{mm}$ ,  $H=11\text{mm}$ ,  $a=1\text{mm}$ ,  $t=1\text{mm}$ 를 사용하였으며 재료상수는  $E=72000\text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ 를 사용하고  $\sigma_0=1\text{MPa}$ 을 적용하였다. 전 해석 영역에서 기하형상과 경계조건, 하중조건 등이 대칭성을 가지므로 유한요소 해석은 1/4 모델을 통해 수행하였고 요소수는 2개를 사용하였으며 이를 그림 6에 나타내었다. 또, 해석을 위한  $p$ -level은 5차, Gauss point의 개수는  $15 \times 15$ 개를 사용하였다. 해석의 결과값은 응력집중계수로 비교를 하였다. 잘 아는 바와 같이 인장력  $\sigma_0$ 가 작용할 경우 최대응력은 이론적으로  $3\sigma_0$ 이며, 이 때 최대응

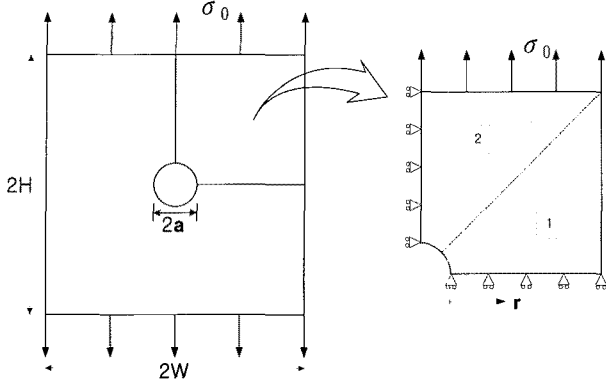


그림 6 인장력을 받는 원공판의 기하형상 및 1/4 유한요소모델링 형상

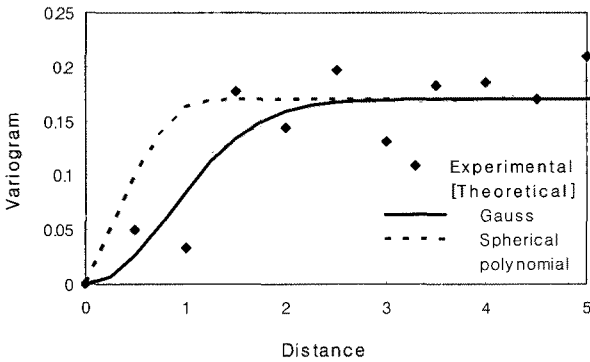


그림 7 분리거리 허용한계 25%일 때 베리오그램 비교

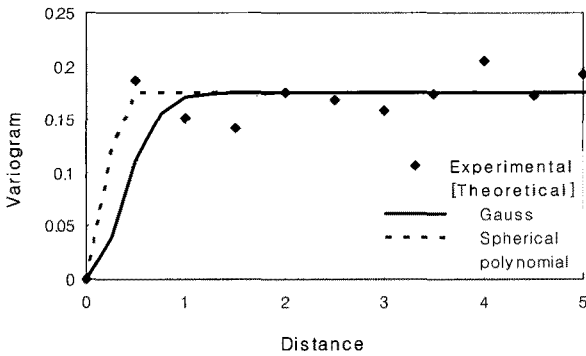


그림 8 분리거리 허용한계 50%일 때 베리오그램 비교

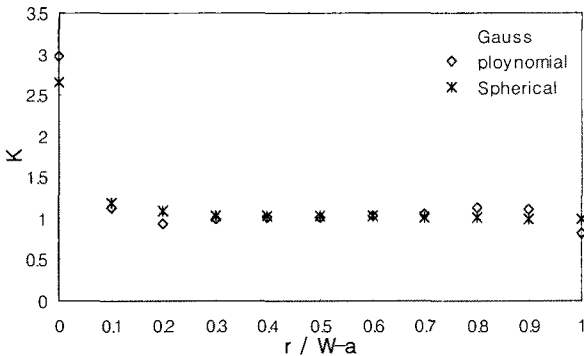


그림 9 분리거리 허용한계 25%일 때 정규크리깅 보간에 의한 응력집중계수 비교

력을 평균응력으로 나눈 것을 응력집중계수  $K$  로 나타내면 무한평판인 경우의  $K$  값은 3이 된다. 따라서, 원공크기와 평판의 크기의 비율은 가급적 크게하여 무한판에 원공이 있는 문제로 접근시켰다. 한편, 그림 7과 그림 8은 각각 분리거리 허용한계 25%와 50%로 하였을 때의 베리오그램을 나타내었다. 그림 7과 그림 8에서 보는 바와 같이  $\Delta h = 25\%$ 로 했을 때가  $\Delta h = 50\%$ 로 했을 때보다 자료들의 상관성을 파악하기가 더 쉬웠으며,  $\Delta h = 50\%$  때는 polynomial model은 실험적 베리오그램과 비교할 때 상관성이 떨어지는 것으로 평가되었다.

그림 9와 그림 10에는 분리거리 허용한계와 베리오그램 모델에 따른 정규크리깅 보간을 통해 얻은 응력집중계수를 그래프로 나타내었다. 그래프에서 보는 것과 같이 polynomial model은  $\Delta h = 25\%$ 나  $\Delta h = 50\%$ 로 했을 때 모두 원공 주변부 응력은 이론값에 가깝게 보간이 되었으나 원공에서 멀어질수록 정확성이 다소 떨어졌다. 또한 두 경우 모두 Spherical model보다는 Gauss model이 원공주변의 응력집중을 더 잘 표현하는 것으로 나타났으며  $\Delta h = 25\%$ 로 했을 때가  $\Delta h = 50\%$ 로 했을 때 보다 보간값의 정확도가 더 높았다. 따

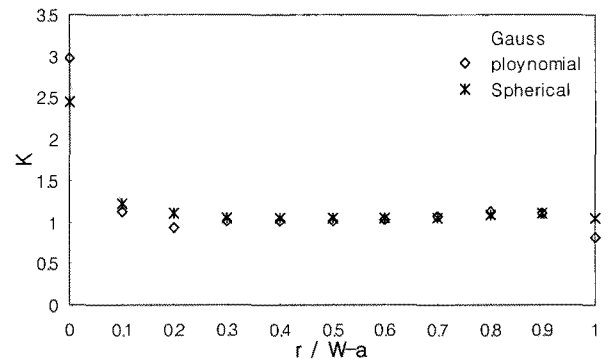


그림 10 분리거리 허용한계 50%일 때 정규크리깅 보간에 의한 응력집중계수 비교

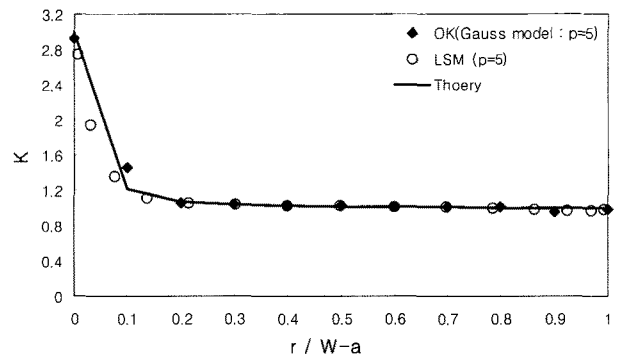


그림 11 정규크리깅 보간값(OK)와 최저제곱법(LSM)과의 응력집중계수 비교

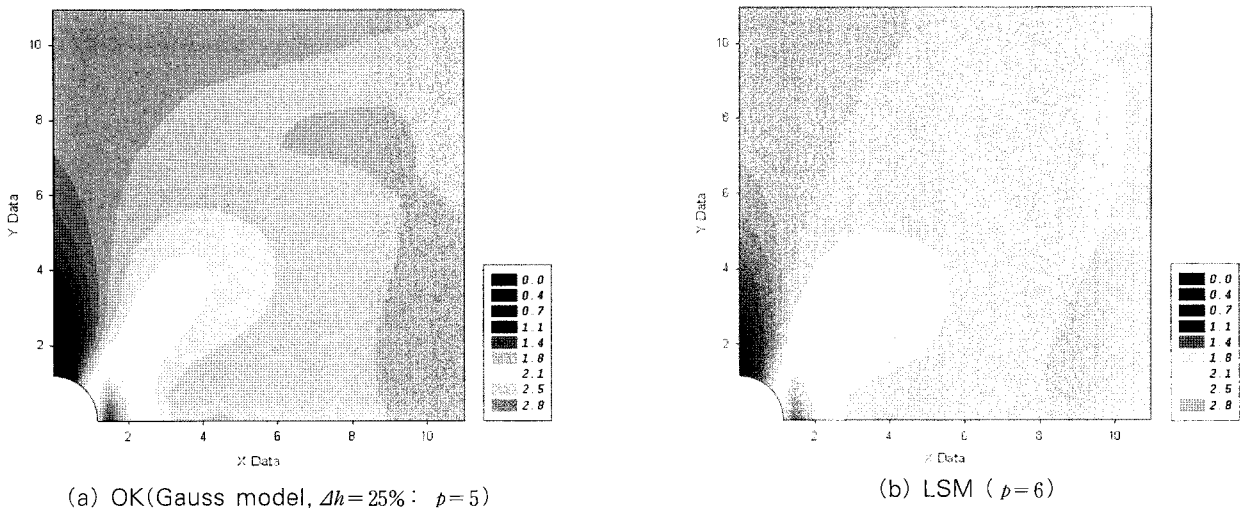


그림 12 정규크리깅(OK)과 최소제곱법(LSM)에 의한 von-Mises 응력등고선 비교

라서  $\Delta h = 25\%$ 로 Gauss model을 써서 보간한 값이 3가지 이론적 베리로그래프 모델중 가장 적합한 것으로 판단된다. 다음에는 기존 유한요소 소프트웨어에서 응력등고선(stress contour)을 나타내기 위해 사용되는 최소제곱법(LSM; Least Square Method)과 본 연구에서 제안되는 정규크리깅 보간법과의 차이를 비교하고자 한다. 동일한 해석조건, 즉  $p = 5$ , 그리고 2개의 요소로 모델링하여 해석한 응력데이터 값으로 단지 보간법만을 바꾸었을 때 그림 11과 같이 LSM은 2.74를 나타내는 반면, Gauss model( $\Delta h = 25\%$ )을 사용한 정규크리깅 보간법의 경우 응력집중계수는 2.93로 이론값인 3.0에 근접하는 것으로 나타났으며, 원공 주변에서 멀리 떨어진 부분의 응력도 이론값과 비슷하게 보간된 것을 알 수 있다. 마지막으로  $p = 5$ 차를 사용한 유한요소해석으로부터 정규크리깅법에 의해 보간된 데이터들과  $p = 6$ 차를 사용하여 유한요소해석으로부터 LSM에 의해 보간된 데이터의 응력등고선을 von-Mises 응력을 사용하여 그림 12에 도시하였다. 그림 12에서 보는 바와 같이 원공 주변의 응력분포가 비슷한 양상을 보이고 있다. 다시 말하면 정규크리깅 보간법을 사용하게 되면 형상함수의 차수가  $p = 5$ 차인데도  $p = 6$ 차의 해석데이터를 갖고 보간한 LSM 보간값과 유사한 응력분포를 보이고 있다.

#### 4.2 인장력을 받는 중앙균열판

본 예제를 수행하기 위한 기하형상의 값들로  $W = 100\text{mm}$ ,  $H = 200\text{mm}$ ,  $t = 1\text{mm}$ , 균열폭  $a = 10 \sim 90\text{mm}$ 에 따른 유한요소 해석을 실시하였다. 재료상수로는  $E = 20000\text{MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ 을 사용하였으며 인장력은  $\sigma_0 = 1\text{MPa}$ 를 가

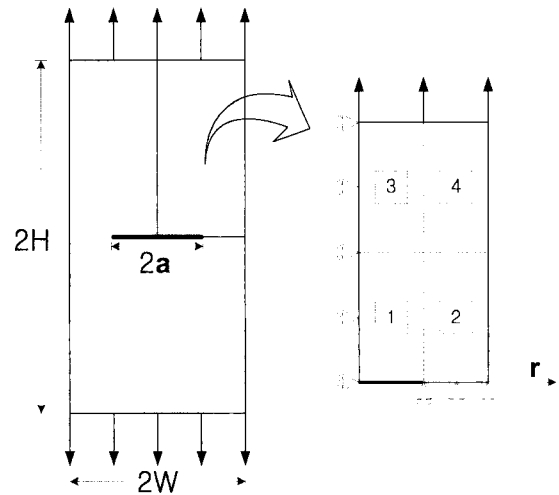


그림 13 인장력  $\sigma_0 = 1\text{MPa}$ 를 받는 중앙균열판의 기하형상과 해석모델

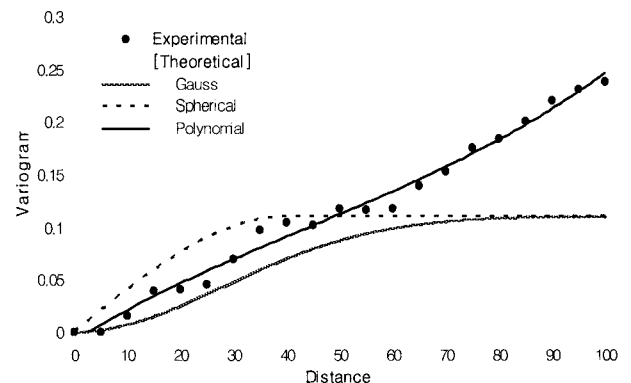


그림 14 분리거리 허용한계를 25%로 했을 때 베리로그래프

하여 해석하였다. 전 해석영역에서 기하형상과 경계조건, 하중 조건 등이 대칭성을 가지므로 유한요소 해석은 1/4 모델을 통해 수행하였고 요소수는 4개를 사용하였으며, 이를 그림 13에

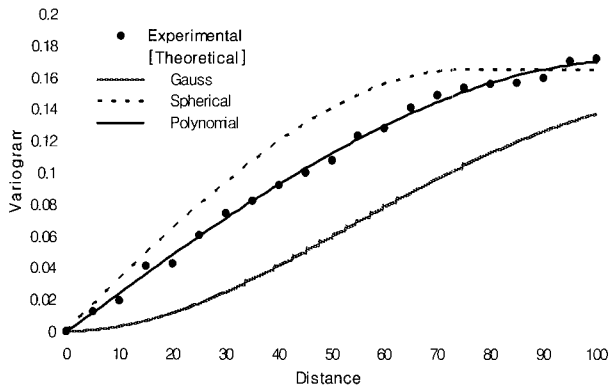


그림 15 분리거리 허용한계를 50%로 했을 때 베리오그램

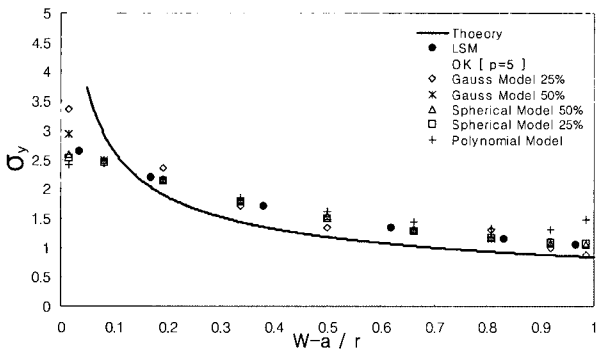


그림 16 균열선단에서의 연직방향 응력  $\sigma_y$  비교 ( $a/W=0.5$ )

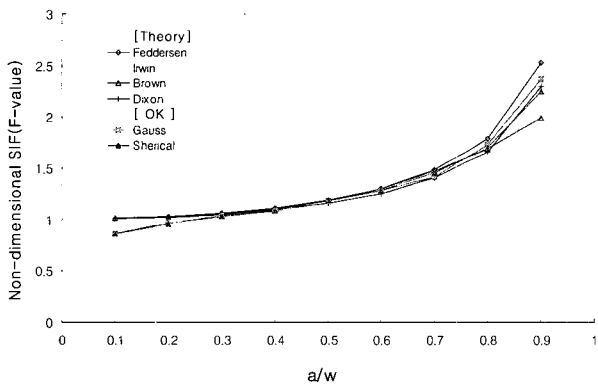
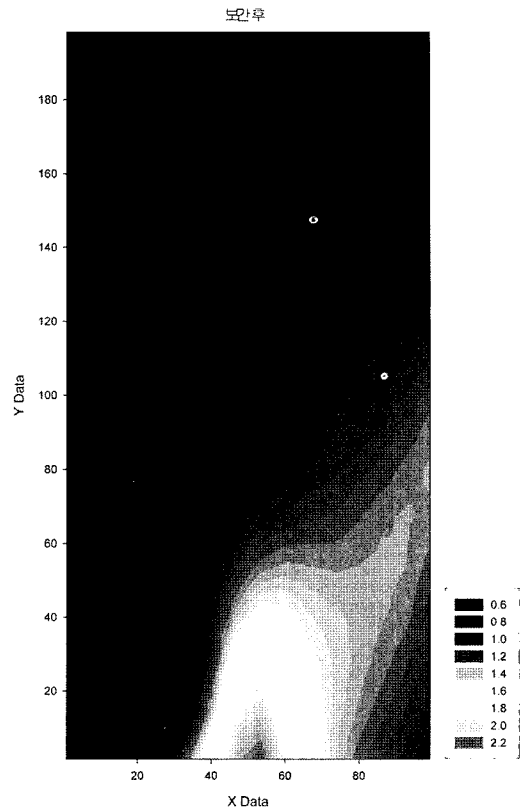
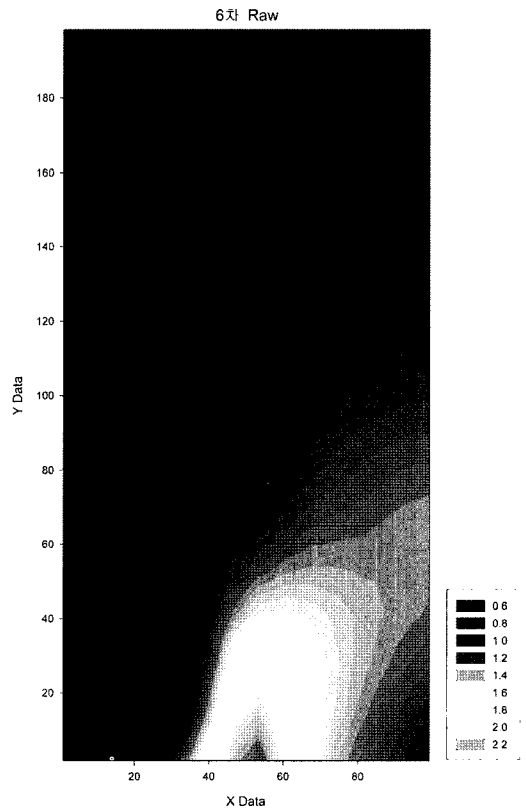


그림 17  $a/w$ 에 따른 무차원 응력확대계수의 비교

나타내었다. 해석 결과값 분석을 하여 응력확대계수를 구하는 방법에서 에너지 방출률법(ERR method)을 이용하였다. 이 때 미소균열진전길이  $\Delta a$ 에 대한 선택범위는 민감도조사를 하여 에너지 방출률  $G$ 값이 일정한 값을 취하는 구간에서  $\Delta a$  ( $1.0E-7$ )를 선택하여 응력확대계수를 구하였다. 그림 14와 그림 15에는 분리거리 허용한계에 따른 베리오그램을 나타내었다. 그림 15에서 보는 것과 같이 분리거리 허용한계를 50%로 했을 때는 분리거리 허용한계를 25%로 했을 때보다 자료들의 상관성을 파악하기가 힘들었다. 이를 이용하여 정규크리깅(OK; Ordinary Kriging)으로 보간 했을 때 균열선단부



(a) OK ( $p=5$  : Gauss model  $\Delta h=25\%$ )



(b) LSM ( $p=6$ )

그림 18 정규크리깅(OK)와 최소제곱법(LSM)에 의한 von-Mises 응력등고선 비교



(crack tip)의  $\sigma_y$  응력분포를  $a/W=0.5$ 일 때를 그림 16에 나타내었다. 그림 16에서 알 수 있듯이 균열선단에 가까울수록  $\sigma_y$ 의 응력이 급격하게 높아지는 현상을 잘 표현하고 있다. 특히 최소제곱법(LSM:  $p=5$ )으로 보간을 했을 때 보다는 정규크리깅 보간에 의한 해석이 균열선단에서의 응력특이를 보다 잘 나타내는 것으로 파악된다. 전반적으로 Spherical model보다 Gauss model이 이론값과의 오차가 적었으며 분리거리 허용한계  $\Delta h = 25\%$ 가  $\Delta h = 50\%$ 보다 오차가 적은 것으로 분석되었다. 또한 Polynomial model은 Spherical model과 Gauss model 보다 상대적으로 보간 정확도가 낮은 것으로 분석되었다. 균열진전에 따른 무차원 응력확대계수(non-dimensional stress intensity factor)의 비교를 여러 연구자들이 제안한 경험식과 그림 17에 비교하였다. 즉,  $a/W = 0.1 \sim 0.9$ 까지 변화시켰을 때 Feddersen, Irwin 등과 비교하여 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 18에는 정규크리깅법(OK)과 기존의 최소제곱법(LSM)과의 비교를 수행하였다. 정규크리깅의 경우는  $\Delta h = 25\%$ 의 분리거리 허용한계를 갖고, Gauss model에 기초를 두었으며 형상함수의 차수는  $p=5$ 로 하였다. 반면에, 최소제곱법의 경우는  $p=6$ 로 유한요소해석한 von-Mises 응력값을 기초로 보간을 수행하였다. 그림 18에서 보는 바와 같이 von-Mises 응력분포는 거의 유사한 것을 알 수 있다. 즉, 기존의 유한요소 소프트웨어에서 응력등고선을 그리기 위해 사용되는 최소제곱법에 비해 정규크리깅법을 사용하게 되면 저차로 거의 동일한 해석결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 기존의 수치해석적 방법에서 발생할 수 있는 여러 가지 문제점을 다른 분야의 예측법을 적용하여 기존의 수치해석적 방법과 비교해 본 연구라 할 수 있다. 특히 지구통계학 분야의 크리깅 보간법이 유한요소해석 분야에 적용됨을 좀 더 신뢰성있게 확인할 수 있었고, 기존의 연구결과와 비교하여 수학적, 공학적으로 인정할 만한 결과를 도출하였다고 생각한다. 본 연구에서 사용한 정규크리깅 보간법을 기초로 응력특이가 발행하는 문제에 대해 해석해 본 결과, 본 연구결과에 한하겠지만 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다. 첫째, 응력특이가 발행하는 문제에 대한 이론적 베리오그램의 선택에 대해서는 Gauss model이 Spherical model과 polynomial model에 비해 보간의 정확도가 높은 것으로 나타났다. 이는 기존의 토질·수리분야에서는 보편적으로 쓰이지 않던 Gauss model이 응력특이 문제에는 적용성이 높은

것으로 보인다. 그 이유는 응력특이가 일어나는 부분에서는 응력이 급격하게 높아지기 때문에 가까운 값들의 강한 상관성을 Gauss Model이 이런 특성을 잘 반영하기 때문이다. 둘째, 분리거리의 영향이다.  $\Delta h = 25\%$ 가  $\Delta h = 50\%$ 보다 보간 후 이론값과의 비교에서 더 적은 오차를 보였다. 이것은  $h \pm \Delta h$ 에 대한 대표값을 평균할 때 응력특이 부분에 해당하는 부분을 분리거리 허용한계가 커짐에 따라 평균값이 적어져 베리오그램의 상관성을 잃어버리기 때문으로 분석된다. 셋째, 기존의 최소제곱법에 비해 정규크리깅 보간법을 사용하게 되면 저차의 형상함수 차수로도 거의 동일한 유한요소 해석결과를 보일 수 있는 장점이 있었다.

## 감사의 글

이 논문은 2006년 교육인적자원부의 재원으로 학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구과제(KRF-2006-214-D00158)이므로 귀 재단에 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- 우광성, 조준형, 박미영 (2006) 2차원 균열판의  $p$ -적응적 유한요소해석을 위한 정규크리깅 보간법의 적용, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.429~440.
- 우광성, 조준형, 이동진, (2006) 적응적  $p$ -Version 유한요소법에서 정규크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677~687.
- 최종근 (2002) 공간정보 모델링-크리깅과 최적화 기법, 구미서관
- Bacchi, B., Kottegoda, N.T. (1995) Identification and calibration of spatial correlation patterns of rainfall, *Journal of Hydrology*, 165 pp.311~348.
- Dai, K.Y., Liu, G.R., Lim, K.M., Chen X.L. (2004) A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, 269(3-5), 22, pp.633~652.
- Decencière, E., de Fouquet, C., Meyer, F. (1998) Applications of kriging to image sequence coding, *Signal Processing: Image Communication*, 13(3), pp.227~249.
- Krige, D.G. (1951) A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand, *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 52, pp.119~139.
- Krige, D.G. (1966) A study of gold and uranium distribution patterns in the Klerksdorp gold field,

*Geoexploration*, 4(1), pp.43~53.

**Lei Gu** (2002) Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method, *Int. J. Number. Engng.*, 56, pp.1~11.

**Matheron, G.** (1973) The intrinsic random functions and their applications, *J. Appl. Probab.*, 5, pp.439~468.

**Piazza, A., Menozzi, P., Cavalli-Sforza, L.L.** (1980) The HLA-A,B gene frequencies in the world: Migration or selection?, *Human Immunology*, 1(4), pp.297~304.

**Plengkhom, K., Worsak, K.N.** (2005) An enhancement of finite element method with moving kriging

shape functions, *Int. J. Comput. Meth.*, 2(4), pp.451~475,

**Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell T.J., Wynn, H.P.** (1989) Design and analysis of computer experiments, *Stat. Sci.* 44, pp.409~435.

**Sayakoummane, V., Worsak, K.N.** (2007) A meshless analysis of shells based on moving kriging interpolation, *Int. J. Comput. Meth.*, 4(4), pp.543~565.

**Webster, C.P., Dowdell, R.J., Cannell, R.Q.** (1985) Uptake of labelled nitrate by roots of winter barley on a direct-drilled or ploughed silt loam soil, *Soil and Tillage Research*, 5, pp.381~389.