

완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 가지는 3절점 혼합 곡선보요소

3-Node Relaxed-Equilibrium Hybrid-Mixed Curved Beam Elements

김진곤†

Kim, Jin-Gon

(논문접수일 : 2007년 12월 13일 ; 심사종료일 : 2008년 4월 22일)

요 지

본 연구에서는 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 가지는 새로운 3절점 혼합요소를 제안하였다. 전단변형률을 고려한 본 요소는 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕하여 유한요소정식화를 수행하였다. 응력함수는 강체변형모드를 제거하고, 장일치(field consistency) 개념을 이용하여 곡선보의 극한기동에서 가성구속조건들을 억제할 수 있도록 선정하였다. 또한, 3절점 곡선보의 혼합정식화에서 강체변형모드를 제거하면서 동시에 평형방정식을 완전하게 만족하는 응력함수와 응력매개변수를 선정하는 것은 매우 어렵기 때문에 완화된 평형조건을 만족할 수 있는 응력함수를 도입하였다. 해석결과를 통하여, 제안된 3절점 혼합 곡선보요소가 곡선보의 해석에서 세장비와 곡률에 상관없이 매우 빠른 수렴성과 안정적인 거동을 나타냄을 확인할 수 있었으며, 응력분포 계산에 있어서도 기존 혼합요소보다 뛰어난 성능을 보여주었다.

핵심용어 : 혼합정식화, Hellinger-Reissner 변분이론, 3절점 곡선보요소, 응력매개변수, 완화된 평형조건

Abstract

In this study, we propose a new three-node hybrid-mixed curved beam element with the relaxed-equilibrium stress functions for static analysis. The proposed element considering shear deformation is based on the Hellinger-Reissner variational principle. The stress functions are carefully chosen from three important considerations: (i) all the kinematic deformation modes must be suppressed, and (ii) the spurious constraints must be removed in the limiting behaviors via the field-consistency, and (iii) the relaxed equilibrium conditions could be incorporated because it might be impossible to select the stress functions and parameters to fully satisfy both the equilibrium conditions and the suppression of kinematic deformation modes in the three-node curved beam hybrid-mixed formulation. Numerical examples confirm the superior and stable behavior of the proposed element regardless of slenderness ratio and curvature. Besides, the proposed element shows the outstanding performance in predicting the stress resultant distributions.

Keywords : hybrid-mixed formulation, hellinger-reissner variational principle, 3-node curved beam element, stress parameters, relaxed equilibrium stress functions

1. 서 론

곡선보 요소는 공학의 여러 분야에서 널리 사용되는 기본적인 구조요소일뿐 아니라 쉘과 같은 복잡한 곡선 요소를 이해하고 개발하기 위한 전단계 요소로서 많은 연구자들이 꾸준한 관심을 가져왔다(이병구 등, 1996; 1998; 유하상 등, 1997; 서광진 등, 2000; 김진곤 등, 2003; 2006). 이중곡률에 의한 영향을

제외하면, 곡선 보는 축대칭 쉘 요소가 가지는 신장-굽힘간 상호 작용, 그리고 막-전단 강성과인현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다.

이러한 일차 변형 이론(first deformation theory)에 바탕한 곡선보요소의 개발을 위해 지금까지 다양한 변분 이론이 적용되었으며, 이 중 최소 포텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위 모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다. 하지만 3차 함수를 사용

† 책임저자, 정회원 · 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부 부교수
Tel: 053-850-2711 ; Fax: 053-850-2710
E-mail: kimjg1@cu.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

하는 C^1 곡선보 요소나 또는 전단 변형을 고려한 저차의 보간 함수를 사용하는 요소는 두께가 곡률의 반경에 비해 아주 작은 경우의 아치문제에서 가성구속이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다(Dawe, 1974; Stolarski 등, 1983). 강성과잉현상이 발생되면 변위는 실제보다 작게 계산되며 심각한 요동을 가지는 응력분포를 나타낸다. 이러한 강성과잉문제를 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법들로는 Noor 등(1981)과 Stolarski 등(1982)의 감차/선택적분 요소(reduced/selective integration element), Prathap 등(1986)이 제안한 장-일치 요소(field consistent element), 유하상 등(1997)이 제안한 변형률 요소 및 Leung 등(2004)의 Fourier p-요소들이 있다.

이러한 변위 모델에 대한 또 다른 대안으로서, 여러 연구자들이 효율적인 혼합요소를 제안하였다. 이 중에서, Saleeb 등(1987)은 응력함수를 선정하는데 있어 중요한 두가지 조건과 이를 충족시키는 강성과잉이 없는 2절점과 3절점 혼합 곡선보요소를 제안하였다. Zhang(1992)은 다른 관점에서 Saleeb 등(1987)의 혼합요소가 감차적분 요소와 일치하는 특성을 가짐을 증명하였으며, Kim 등(1998; 2006)은 무절점 자유도를 도입하여 저차의 변위 및 응력함수를 가지는 2절점 혼합 곡선보요소의 수치적 거동을 크게 향상시켰다.

본 연구에서는 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수와 매개변수를 가지는 3절점 혼합 곡선보요소를 새롭게 정식화하여 제안된 요소의 수치적 특성을 살펴보았다. 제안된 요소는 전단 변형을 고려하였으며, 유한요소정식화는 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕하였다. 강성과잉이 없고 효율적인 혼합요소 개발을 위해 다음과 같은 세 가지 사항을 고려한 적절한 응력 함수와 응력매개변수를 선정하였다. 먼저, Pian 등(1982)이 제시한 가이드라인에 따라 모든 강체변형모드를 억제할 수 있고, 두번째로는 Prathap(1986)의 장일치개념을 이용하여 강성과잉현상을 발생시키는 가성구속조건(spurious constraint)들을 제거할 수 있도록 응력함수와 응력매개변수를 결정하였다. 마지막으로 요소의 거동을 향상시키기 위해서 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 추가적으로 도입하였다. 이는 3절점 혼합 곡선보요소에서는 Pian 등(1982)의 가이드라인을 따르면서 동시에 평형조건을 완전하게 만족하는 응력함수를 선정하는 것은 매우 어렵거나 불가능하기 때문이다. 응력매개변수들은 정치조건(stationary condition)을 통하여 요소 정식화의 최종단계에서 제거하여 일반적인 변위 요소와 같은 크기를 가지는 강성행렬을 유도하였다. 수치예제들에 대한 해석 결과를 통하여 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 도입한 제안된 3절점 혼합 곡선보요소가 세장비와 곡률에 상관없이 매우 정확하고 안정적인 수치적인 거동을 나타냄을 확인할 수 있었다.

2. 지배 방정식

그림 1은 9개의 변위 자유도를 가지는 3절점 곡선보요소의 기하학적 형상을 보여주고 있다. 그림에서 u , v 그리고 θ 는 각각 중립축에서 접선과 횡방향 변위 그리고 회전각을 나타낸다. 접선방향과 횡방향 합력(stress resultants) 및 모멘트는 각각 N , V , M 으로 나타내며, 하첨자 1, 2, 3은 절점 번호를 의미한다. 곡선보의 단면 두께는 h , 단면의 폭은 b , 곡률반경은 R , 그리고 요소의 길이는 $l = R\phi_0$ 로 정의된다.

Naghdi 등(1987)의 근사화된 고차 쉘 이론으로부터, 중립축에서 y 만큼 떨어진 위치에서 수직변형률 ϵ 과 전단변형률 γ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon = \frac{1}{1-y/R}(\epsilon_0 - y\kappa) \tag{1a}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1-y/R} \tag{1b}$$

여기서, 중립축에서 변형률과 변위간 관계식은 다음과 같다.

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{d}{d\phi} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{d}{d\phi} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{d}{d\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \Delta \mathbf{u} \tag{2}$$

윗 식에서, ϕ 는 원주방향 각도를 나타낸다.

이차원 보에서 응력-변형률 관계식은 $\sigma = E\epsilon$ 와 $\tau = kG\gamma$ 이고, 여기서 E 와 G 는 각각 탄성계수와 전단계수를 나타낸다. 그리고, k 는 전단보정계수(shear correction factor)를

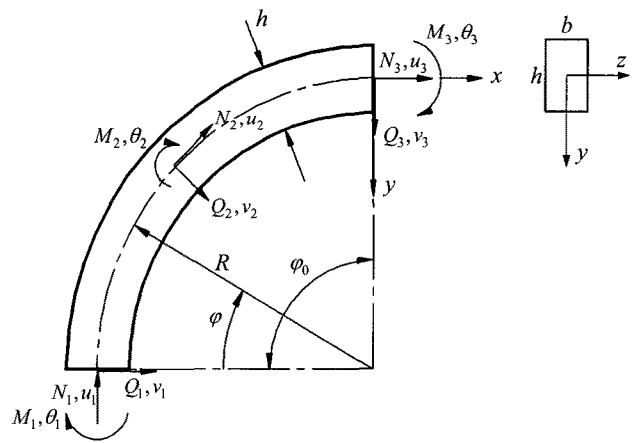


그림 1 3절점 곡선보요소의 기하학적 형상

나타내며, 적절한 전단보정계수값을 선정하기 위한 다양한 이론적/실험적 연구들이 이루어져 왔다(Kaneko, 1975; Pai 등, 1999). 보의 단면에 대해서 적분을 수행하고 곡률반경에 대한 두께비가 작다고 가정하면(즉, $(y/R)^2 \ll 1$), 응력의 합력들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{(\epsilon_0 - y\kappa)}{1 - y/R} b dy$$

$$= bE \left[R \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right) \cdot \epsilon_0 + R(h - R \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right)) \cdot \kappa \right] \quad (3a)$$

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} kG \frac{\gamma_0}{1 - y/R} b dy = kGbR \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right) \cdot \gamma_0 \quad (3b)$$

$$M = - \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{(\epsilon_0 - y\kappa)}{1 - y/R} y \cdot b dy$$

$$= bE \left[R(h - R \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right)) \cdot R^2 (h - R \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right)) \cdot \kappa \right] \quad (3c)$$

결국, 응력 합력들 $\sigma = [N, V, M]^T$ 와 변형률 $\epsilon = [\epsilon_0, \gamma_0, \kappa]^T$ 은 $\epsilon = \mathbf{S} \cdot \sigma$ 의 관계를 가지며, 재료의 컴플라이언스(compliance) 행렬 \mathbf{S} 는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \frac{1}{bhE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{hE}{kG R \Omega} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{\Omega}{R^2(\Omega - h/R)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, $\Omega = \log\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right) \approx \frac{h}{R} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^3 + \frac{1}{80}\left(\frac{h}{R}\right)^5 +$

$\dots + O\left(\frac{h}{R}\right)^{2k-1}$ 이다. 식 (4)에서 $(h/R) \ll 1$ 라고 가정하고

Ω 에 대하여 Taylor 전개를 적용하고 3차항 이상을 제거하면, 많은 논문들에서 일반적으로 많이 사용되는 다음과 같은 컴플라이언스 행렬 형태로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{E}{kG} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \left(\frac{A}{J} + \frac{1}{R^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서, $A = bh$ 와 $I = bh^3/12$ 는 각각 보의 단면의 면적과 2차 관성모멘트를 나타낸다. 식 (5)의 컴플라이언스 행렬에서 고차항과 막-굽힘 상호작용 항들이 나타남을 알 수 있으며, 이러한 항들이 혼합정식화에서 나타내는 영향은 참고 문헌(Kim 등, 2006)에서 고찰되었다.

그림 1에 나타난 곡선보에 대한 평형방정식들은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{R} \frac{dN}{d\phi} - \frac{V}{R} + p_x = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dV}{d\phi} + \frac{N}{R} + p_y = 0 \quad (6b)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dM}{d\phi} + V = 0 \quad (6c)$$

3. 혼합 정식화

곡선보에 대한 Hellinger-Reissner이론의 범함수(functional)는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{HR} = \int_c (\sigma^T \epsilon - \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{S} \sigma) dx - W \quad (7)$$

여기서,

$$W = \int_c (p_x u + p_y v) dx + \sum_{i=1}^3 (N_i u_i + V_i v_i + M_i \theta_i) \quad (8)$$

유한요소 근사화를 위해서, 변위 $\mathbf{u} = \{u, v, \theta\}^T$ 와 응력 합력들 $\sigma = \{N, Q, M\}^T$ 를 각각 절점의 변위성분 \mathbf{d} 과 응력매개변수 β 로 다음과 같이 보간한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (9a)$$

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \beta \quad (9b)$$

여기서, \mathbf{N} 과 \mathbf{P} 는 각각 변위에 대한 보간함수 행렬과 응력 합력들에 대한 응력함수 행렬들을 의미한다. 변위와 합력에 대한 적절한 보간함수의 선정과 관련된 내용들은 다음 장에서 상세하게 설명하고자 한다.

유한요소의 강성행렬을 유도하기 위해 식 (9)를 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\Pi_{HR} = \beta^T \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta - \mathbf{d}^T \Phi - \mathbf{Q}^T \mathbf{d} \quad (10)$$

그리고,

$$\mathbf{H} = \int_c \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dx \quad (11a)$$

$$\mathbf{G} = \int_c \mathbf{P}^T \Delta \mathbf{N} dx \quad (11b)$$

$$\Phi = \int_c \mathbf{N}^T [p_x, p_y, 0]^T dx \quad (11c)$$

여기서, \mathbf{Q} 는 등가의 절점력을 나타낸다.

식 (10)에 대하여 변위 \mathbf{d} 와 응력매개변수 β 에 대한 정지조건(stationary condition)을 각각 적용한 후, 요소 단위에서 응력매개변수 β 를 변위 \mathbf{d} 로 치환하면 최종적으로 다음과 같은 형태의 유한요소방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{Q} + \Phi \quad (12)$$

여기서, 요소의 강성행렬 \mathbf{K} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (13)$$

4. 근사 함수

다음으로 효율적인 3절점 혼합 곡선보요소를 정식화하기 위해서, 변위와 응력 합력들에 대해서 적절한 근사함수를 선정하여야 한다. 이를 위하여 식 (9a)의 변위에 대해서는 무차원 좌표 $\xi = \varphi/\varphi_0 = x/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$)를 이용하여 일반적인 Lagrangian 보간함수로 근사화한다.

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 = \sum_{k=1}^3 N_k u_k \quad (14a)$$

$$v = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 = \sum_{k=1}^3 N_k v_k \quad (14b)$$

$$\theta = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 = \sum_{k=1}^3 N_k \theta_k \quad (14c)$$

이 때,

$$N_1 = 1 - 3\xi + 2\xi^2; N_2 = 2\xi^2 - \xi; N_3 = 4\xi(1 - \xi) \quad (15)$$

그리고 $\mathbf{d} = \{u_k, v_k, \theta_k\}_{k=1,2,3}$ 는 절점에서의 변위의 자유도 성분들을 나타낸다.

식 (9b)의 응력함수를 근사화하는 것은 변위를 근사화하는 것보다 어려운 과정이다. 본 논문에서는 다음의 세가지 조건을 고려하여 적절한 응력함수 및 응력매개변수들을 선정하였다. 먼저, Pian 등(1982)의 가이드라인에 따라 모든 강제변형모드들을 억제하기 위해서는 응력매개변수의 수는 요소의 전체 자유도 수에서 강제 자유도 수를 뺀 것보다 커야 된다. 따라서, 3절점 요소에서는 응력매개변수의 수가 6개 이상이어야 한다. 다음으로 응력매개변수에 대응하는 적절한

응력함수를 선정하기 위하여, 곡선보의 극한 거동에서의 막 변형률(membrane strain)과 전단 변형률(shear strain)을 고려한다. 비신장 굽힘 극한거동(inextensional bending limiting behavior)과 두께가 매우 얇은 직선보의 Kirchhoff 극한 거동에서는 식 (2)와 (14)로부터 다음과 같이 유도된 막 변형률과 전단 변형률들이 각각 영이 되어야 한다.

$$\varepsilon_0 = (a_1/l - b_0/R) + (2a_2/l - b_1/R)\xi - (b_2/R)\xi^2 \rightarrow 0 \quad (16a)$$

$$\gamma_0 = (b_1/l - c_0) + (2b_2/l - c_1)\xi - c_2\xi^2 \rightarrow 0 \quad (16b)$$

윗 식들을 검토하면, 다음과 같은 6개의 구속조건을 얻을 수 있다.

$$a_1/l - b_0/R \rightarrow 0 \quad (17a)$$

$$2a_2/l - b_1/R \rightarrow 0 \quad (17b)$$

$$b_2/R \rightarrow 0 \quad (17c)$$

$$b_1/l - c_0 \rightarrow 0 \quad (17d)$$

$$2b_2/l - c_1 \rightarrow 0 \quad (17e)$$

$$c_2 \rightarrow 0 \quad (17f)$$

식 (17a), (17b), (17d), (17e)과 달리 식 (17c)와 (17f)는 $\varepsilon_{0,\xi\xi} \rightarrow 0$, $\gamma_{0,\xi\xi} \rightarrow 0$ 와 같이 강성과잉과 응력요동(stress oscillation)을 발생시키는 가성구속조건들이다. 따라서, Pian 등의 가이드라인을 만족하면서 동시에 곡선보의 극한거동에서 가성구속조건들을 가지지 않도록 변위장에 대해 장일치(field consistent)된 막 변형률과 전단 변형률을 얻기 위해서는 응력함수들을 다음과 같은 선형함수로 가정하여야 한다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (19)의 응력함수는 Saleeb 등의 HMC3요소에서 사용된 응력함수들과 동일하다.

4.1 장불일치(field inconsistent) 응력함수 모델 (요소명: IHMC3)

3절점 혼합 곡선보요소에서 장일치 응력함수 및 응력매개변수들의 효과를 살펴보기 위하여, 다음과 같이 가성구속조건들을 발생시키는 변위장과 동차의 장불일치(field-inconsistent) 응력함수를 사용한 IHMC3요소를 정식화하여 HMC3

요소와 비교하였다.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

4.2 완화된 평형 응력함수 모델 (요소명: EMC3)

식 (6a)~(6c)의 제차 평형방정식(homogeneous equilibrium equations)들을 만족하는 다음과 같은 응력함수를 구할 수 있다.

$$N = \cos \varphi \beta_1 + \sin \varphi \beta_2 \quad (20a)$$

$$V = -\sin \varphi \beta_1 + \cos \varphi \beta_2 \quad (20b)$$

$$M = -R(\cos \varphi - 1)\beta_1 - R \sin \varphi \beta_2 + \beta_3 \quad (20c)$$

곡선보의 곡률이 커져 직선보에 가까워 지게 되면 ($\varphi \rightarrow 0$), 식 (20)은 다음과 같이 나타난다.

$$N = \beta_1 ; V = \beta_2 ; M = \beta_3. \quad (21)$$

위 식의 응력함수와 응력매개변수들은 Saleeb 등이 제안한 2절점 혼합요소 HMC2에서 사용된 것과 동일하다. 3절점 혼합 곡선보요소의 비신장 굽힘 극한거동과 직선보의 Kirchhoff 극한 거동들에서 발생하는 가성구속조건들을 제거하고, Pian 등의 가이드라인을 만족시키도록 식 (20)의 평형조건을 만족시키는 응력함수들을 이용하여 다음과 같은 응력함수들을 새로이 제안할 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & \xi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ -R(\cos \varphi - 1) & -R \sin \varphi & 1 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (22)$$

위의 응력함수들은 곡률이 매우 커지면($\varphi \rightarrow 0$) Saleeb 등의 HMC3요소에서 사용된 식 (19)와 동일한 형태를 가지게 되어 Kirchhoff 극한거동에서 가성구속조건이 발생하지 않으며, 비신장 굽힘 극한거동에서도 다음과 같이 막 변형률이 표현되면서 가성구속조건이 제거됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{AE} [N + \frac{1}{R} M] = \frac{1}{AE} [(\beta_1 + \frac{1}{R} \beta_3) \\ &+ (\beta_4 + \frac{1}{R} \beta_6) \xi] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (23)$$

5. 수치 예제

본 절에서는 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 가지는 EMC3요소의 효율성을 검증하고자 한다. 이를 위하여 몇 가지 수치예제에 대해 요소의 강성과잉현상, 수렴성, 그리고 하중 분포 예측능력 등을 살펴보았다. 해석을 위한 재료물성값들은 전단보정계수 $k=5/6$, 탄성계수 $E=10.5 \times 10^6$, 프와송 비 $\nu=0.3125$, 그리고 전단계수 $G=0.5E/(1+\nu)$ 가 사용되었으며, 모든 계산은 MATLAB 프로그램에서 수행되었다. 본 연구에서 제안된 요소의 성능을 비교하기 위해 사용된 기존 문헌에 발표된 3절점 요소들은 Table 1과 같다

Table 1 Characteristics of other elements in consideration for comparison

요소명	연구자명	절점수	수식화방법
HMC3	Saleeb 등(1987)	3	혼합요소
CMCSQ	Prathap 등(1986)	3	장-일치 변위요소

5.1 외팔보 아치

전단 및 막 강성과잉 현상을 살펴보기 위해 그림 2와 같은 외팔보 아치 문제를 해석하였다. 아치의 자유단에 작용하는 반경방향 하중의 크기는 $P=1$ 이다. Castigliano 에너지 정리를 적용하여 구한 자유단에서의 반경방향 변위의 이론해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_{ip} &= \frac{PR^3 \theta}{2EI} \left[1 + \frac{I}{AR^2} \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{k} \right) \right] + \\ &\frac{PR^3 \sin 2\theta}{4EI} \left[\frac{I}{AR^2} \left(\frac{2(1+\nu)}{k} - 1 \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

그리고, 합력들의 이론해는 다음과 같다.

$$N = -P \sin \varphi ; V = -P \cos \varphi ; M = PR \sin \varphi. \quad (25)$$

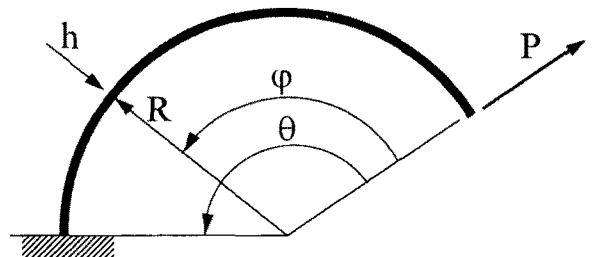


그림 2 외팔보 아치의 기하학적 형상

그림 3~5는 각각 $L=10$ 이고 $\theta \approx 0^\circ$ ($R=10^5$), $\theta=90^\circ$, $\theta=240^\circ$ 인 외팔보 아치들에서 보의 세장비를 $L/h=2$ 에서 10^5 까지 변화시킬 때 자유단에서 반경방향 변위값을 보여주고 있다. 모든 경우의 유한요소해석결과는 고려된 혼합요소들 1개만을 이용하여 구하였다. 해석결과를 살펴보면, 장불일치된 응력함수를 사용한 IHMC3요소의 경우 보의 세장비가 커지는 경우 직선보의 경우에는 25%정도의 오차만 나타내지만, 보의 곡률이 커지는 경우 심각한 전단강성과잉현상이 발생함을 알 수 있다. 장일치된 응력함수를 사용한 Saleeb 등의 HMC3 요소는 보의 세장비에 상관없이 강성과잉현상이 없는 일관된 결과를 보여주고 있지만, 보의 곡률이 커지면 오차도 커지는 결과를 보인다. 하지만 본 논문에서 제안된 EMC3 요소는 보의 세장비와 곡률에 상관없이 HMC3요소에 비해 상대적으로 매우 정확하고 안정적인 거동을 나타냄을 알 수 있다.

그림 6은 고려된 혼합요소들의 곡률변화에 따른 거동을 좀 더 상세하게 보여주고 있다. 해석결과는 유한요소 1개만을 사용하여 세장비 $R/h=1000$ 이고, $L=10$ 인 아치의 중심각을 10° 에서 330° 까지 변화시키면서 구하였다. HMC3 요소는 곡률이 커지면 오차가 커지는 불안정한 거동을 보여주고 있지만, 본 논문에서 제안된 EMC3 요소는 곡률과 무관하게 매우 안정적인 거동을 보여주고 있음을 다시 한 번 확인할 수 있다.

그림 7과 8은 IHMC3, HMC3와 EMC3 요소를 사용하여 계산한 외팔보 아치의 전단력과 굽힘모멘트 분포를 비교한 그림들이다. 그림에서 가성구속조건이 제거되지 않은 부적절한 응력함수를 사용한 IHMC3요소는 HMC3요소보다 비록 높은 차수의 응력함수를 사용하였지만, 심각한 응력요동현상을 나타내고 있음을 알 수 있다. 하지만, EMC3요소는 한 개의 요소만을 사용하였지만, 3개의 HMC3요소들을 사용하여 구한 결과보다 전단력과 굽힘모멘트 분포를 훨씬 정확하게 예측하는 우수한 성능을 보여주고 있다.

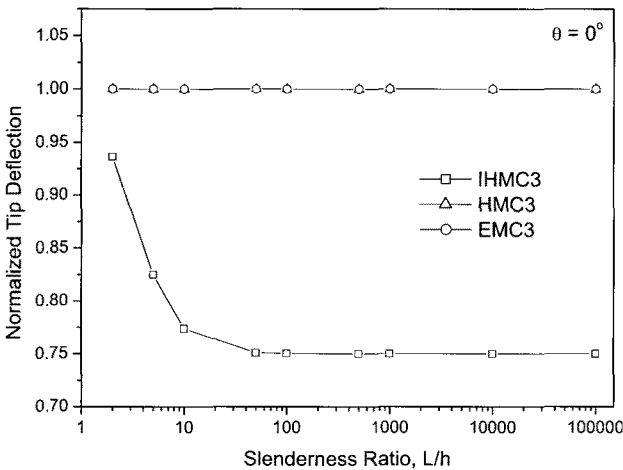


그림 3 $\theta \approx 0^\circ$ 인 외팔보 아치의 강성과잉 실험

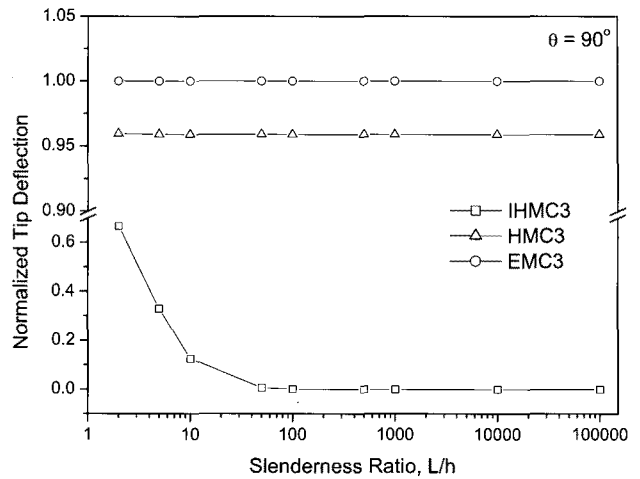


그림 4 $\theta = 90^\circ$ 인 외팔보 아치의 강성과잉 실험

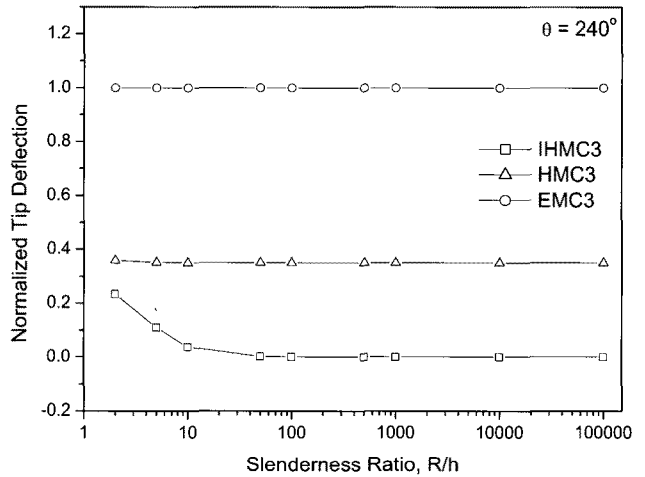


그림 5 $\theta = 240^\circ$ 인 외팔보 아치의 강성과잉 실험

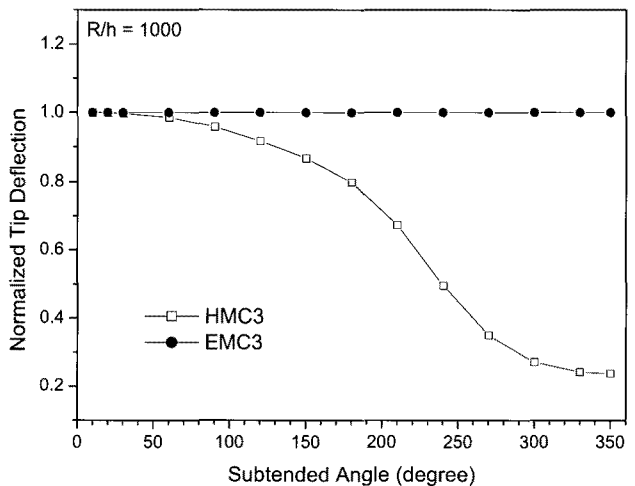
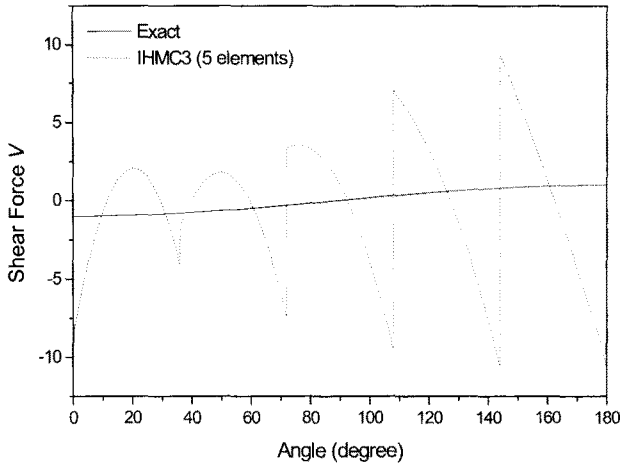
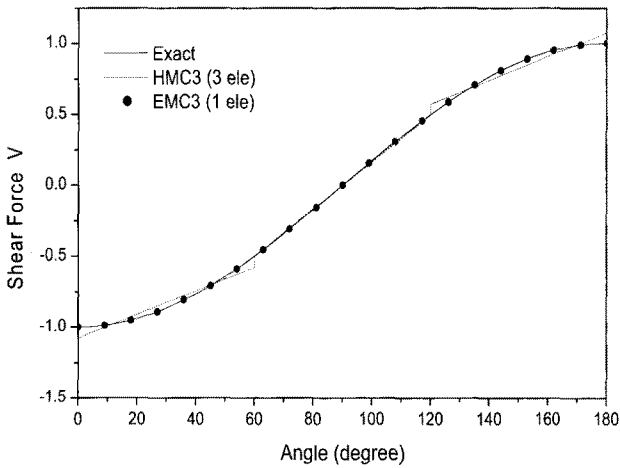


그림 6 $R/h=1000$ 인 경우 아치의 중심각 θ 에 따른 자유단에서 반경방향 변위값



(a)



(b)

그림 7 $R/h=50$ 이고 $\theta=180^\circ$ 인 외팔보 아치의 전단력 분포선도

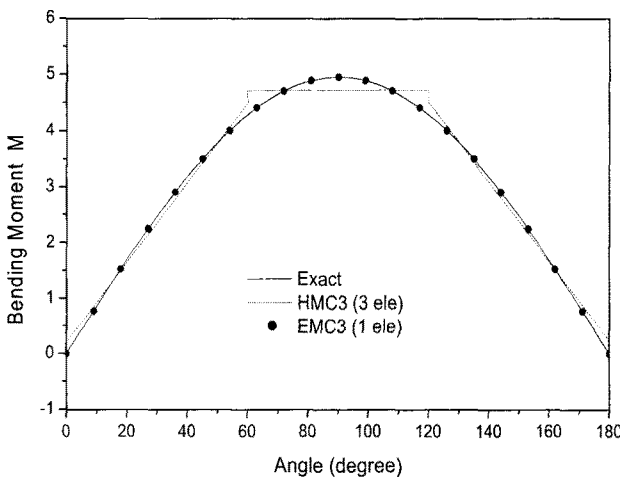


그림 8 $R/h=50$ 이고 $\theta=180^\circ$ 인 외팔보 아치의 굽힘모멘트 분포선도

5.2 집중하중을 받는 링

그림 9와 같이 링의 상하에 수직방향의 집중하중이 가해진 곡선보의 경우, 경계조건을 고려하면 A에서 B까지 사분원 링만으로 이를 모델링할 수 있다. 먼저, Castigliano의 에너지 정리를 이용하여 A지점에서 수직방향 변위의 이론해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$v_A = \frac{PR^3}{8\pi EI} (\pi^2 - 8) + \frac{PR}{8kGA} + \frac{PR}{8EA} \quad (26)$$

그림 10에서 본 논문에서 제안된 EMC3요소와 기존 문헌에 보고된 표 1의 3절점 요소들의 식 (25)의 이론해에 대한 수렴성을 비교하여 보았다. 해석을 위해 곡선보의 반경 $R=4.953$, 두께 $R=4.953$, 폭 $b=1$ 그리고 수직하중 $P=100$ 를 사용하였고, 이때 이론해 $v_A=1.244$ 가 된다. 그림으로부터 제안된 EMC3요소가 수치적 정확성이 뛰어난 것으로 알려진 CMCSQ나 HMC3와 같은 3절점 요소들보다 빠른 수렴성을 나타냄을 확인할 수 있다.

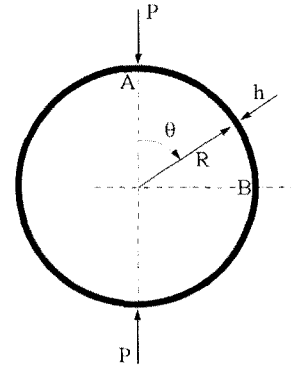


그림 9 집중하중을 받는 링

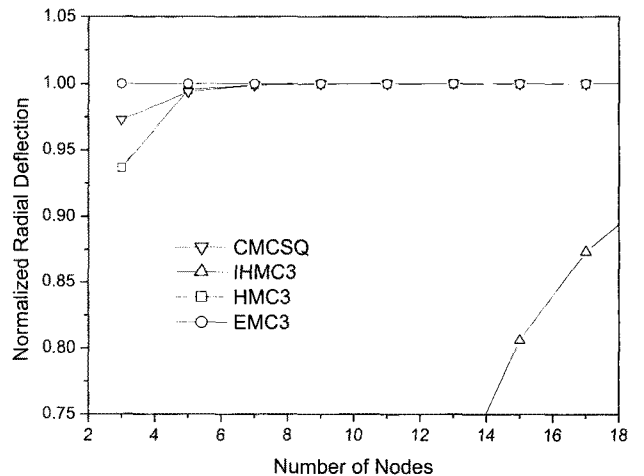


그림 10 집중하중을 받는 링의 하중작용점에서의 수직방향 변위값의 수렴성

5. 결 론

본 논문에서는 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수와 응력개변수를 가지는 3절점 혼합 곡선보요소를 새롭게 정식화하여 제안된 요소의 수치적 특성을 살펴보았다. 효율적인 혼합요소 개발을 위해 Pian 등이 제시한 가이드라인에 따라 모든 강체변형모드를 억제할 수 있도록 응력개변수를 선정하였다. 또한, Prathap 등의 장일치(field-consistency)개념과 완화된 평형조건을 만족하는 응력함수를 추가적으로 도입하여 강성과잉현상을 유발하는 가성구속조건들을 제거하고 요소의 수치적 성능을 크게 향상시킬 수 있도록 하였다. 수치예제들에 대한 해석 결과를 통하여 제안된 3절점 혼합 곡선보요소가 곡선보의 해석에서 새장비와 곡률에 상관없이 매우 정확하고 안정적인 거동을 나타냄을 확인할 수 있었다. 또한, 응력분포를 예측하는데 있어 기존 혼합요소보다 훨씬 뛰어난 성능을 보여주었다.

참 고 문 헌

- 이병구, 오상진** (1996) 원호형 곡선보의 면외 자유진동에 관한 수치해석적 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 8(1), pp.133~139.
- 유하상, 신효철** (1997) 곡선보 요소의 고유치 해석에서 질량행렬의 영향, 대한기계학회논문집, 21(2), pp.288~296.
- 이병구, 박광규, 모정만, 이재만** (1998) 변단면 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 11(3), pp.155~164.
- 서광진, 민병철, 김문영** (2000) 곡률이 변하는 박벽 곡선보의 3차원 자유진동 및 좌굴해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(3), pp.321~328.
- 김진곤, 노병국** (2003) 혼합 유한요소를 이용한 축대칭 쉘의 정동적해석, 한국전산구조공학회 논문집, 16(2), pp.165~172.
- 김진곤, 박용국** (2006) 곡선보의 자유진동해석을 위한 고차 혼합요소, 한국전산구조공학회 논문집, 19(2), pp.151~160.
- Dawe, D.J.** (1974) Numerical studies using circular arch finite elements, *Computers & Structures*, 4, pp.729~740.
- Stolarski, H., Belytschko, T.** (1983) Shear and membrane locking in curved C^0 elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41, pp.279~296.
- Noor, A. K., Peters, J. M.** (1981) Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 17, pp.615~631.
- Stolarski, H., Belytschko, T.** (1982) Membrane locking and reduced integration for curved elements, *Journal of Applied Mechanics*, 49, pp.172~176.
- Babu, C. R., Prathap, G.** (1986) A linear thick curved beam element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 23, pp.1313~1328.
- Prathap, G., Babu, C. R.** (1986) An isoparametric quadratic thick curved beam element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 23, pp.1583~1600.
- Leung, A. Y. T., Zhu, B.** (2004) Fourier p-elements for curved beam vibrations, *Thin-Walled Structures*, 42, pp.39~57.
- Saleeb, A. F., Chang, T. Y.** (1987) On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60, pp.95~121.
- Zhang, Z.** (1992) A Note on the Hybrid-Mixed C^0 Curved Beam Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95, pp.243~252.
- Kim, J. G., Kim, Y. Y.** (1998) A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 43, pp.925~940.
- Kim, J. G., Park, Y. K.** (2006) Hybrid-Mixed Curved Beam Elements with Increased Degrees of Freedom for Static and Vibration Analyses, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 68, pp.690~706.
- Pian, T. H. H., Chen, D. P.** (1982) Alternative Ways for Formulation of Hybrid-Stress Elements, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 18, pp.1679~1684.
- Kaneko, T.** (1975) On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 8, pp.1927~1936.
- Pai, P. F., Schulz, M. J.** (1999) Shear Correction Factors and An Energy-Consistent Beam Theory, *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp.1523~1540.