韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22집 제 3호, 2008. 9. 289-310

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 3, Sep. 2008. 289-310

고등학교 일반각의 삼각 함수값 구하기에 대한 교수법적 분석과 논의

조 정 수 (영남대학교)

본 연구는 고등학교 <10-나>의 삼각함수의 성질을 단위원이 아니라 삼각함수 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 그래프 성질을 이용하여 구할 수 있는 방법을 제시하여 삼각함수의 값을 구하는 학습활동과 삼각함수의 그래프에 대한 학습활동과의 연계성을 높이고, 이를 통하여 삼각함수의 성질에 대한 학생들의 이해를 향상시킬 수 있는지를 논의하고자 한다. 본 연구의 결론은 삼각함수 그래프 이용에 의한 삼각 함수값 구하기의 효율성 증대, 일반각에 대한 삼각 함수값 구하기의 정확한 용어 사용, 삼각 함수값 구하기와 삼각함수의 그래프 지도내용 사이의 연계성, 삼각함수의 그래프의 선행 지도 등이며 이에 대한 논의가 제시되어 있다.

Ⅰ. 서 론

第7차 고등학교 수학과 교육과정에 의한 고등학교 1학년 <10-나>의 삼각함수 단원을 보면 호도법과 삼각함수의 정의를 다루고 난 후, 삼각함수 사이의 관계와 성질을 다루고 그 다음 삼각함수의 값을 구하도록 하고 있다. 여기서 말하는 삼각함수의 성질이란 대부분의 교과서에서 제시하고 있는 소단원명으로 $2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수의 값을 구하는 것을 말한다. 모든 <10-나>의 교과서를 보면 이들 삼각함수의 성질을 단위원을 사용하여 증명하고 이 결과로부터 일반각의 삼각 함수값을 구하도록 하고 있다. 삼각 함수값을 구하는데 있어서 단위원의 사용은 삼각함수의 그래프에 대한 이해를 오히려 방해할 수 있다고 본다. 삼각함수에 대한 연구결과를 보더라도 미적분학을 끝낸 고등학생들이 기계적인 계산위주의 삼각함수 문제는 잘 수행했지만 그래프와 관련된 개념적 이해를 묻는 문제에 대해서는 상당한 어려움을 겪었다고 한다 (Wilson, 1993). 그리고 함수는 학교수학 내용 중 가장 숙달하기 어려운 개념이며 그 이유는 관련된 하위 개념이 너무 많고 함수 개념의 계층 구조가 복잡하기 때문이다. 이를 해소하기 위해서는 함수의 대상화가 필요한데 그래프의 시각화가 한 가지 방법이다(데이비드 톨, 2003).

---

* 2008년 8월 투고, 2008년 8월 심사 완료
* ZDM 분류 : D4
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 삼각함수 값, 삼각함수, 일반각
* 이 연구는 2007년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

삼각함수를 중학교의 특수각에 의한 삼각비로 다루지 않고 일반각으로 확장하여 다루는 것은 결국 삼각함수를 그래프와 연계하여 지도하고자 하는 것이며, 이를 배운 학생들은 궁극적으로 삼각함수를 그래프로 이해하고 해석할 수 있어야 한다. 예를 들어, 중학교 3학년의 이차함수를 지도할 때 $f(x)=-2x^2+8x-5$라는 함수에 대하여 함수값 $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$, $f(5)$, $f(25)$ 등을 구하는 것은 이 이차함수의 변화하는 행동패턴을 알아보는 데 유용하다. 하지만 이 값을 순서쌍으로 하여 그래프를 그리지 않고서는 그 행동변화를 이해하는 데는 한계가 있다.

그런데 <10-나>의 교과서에 제시되어 있는 삼각함수의 성질에 대한 학습내용은 단위원을 이용하여 일반각의 함수값만 구하고 이를 삼각함수의 그래프와 연계시키지 못하고 있다. 그 원인은 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 값을 구하는 내용이 서로 다른 소단원으로 나누어져 취급되어 있기 때문이며, 또한 삼각함수의 성질을 다룰 때는 단위원으로 했다가 삼각함수의 그래프를 다룰 때는 그래프를 사용하고 있기 때문으로 짐작된다. 따라서 일반각의 삼각 함수값을 단위원이 아니라 삼각함수의 그래프를 이용하여 구할 수 있다면 보다 나은 연계성을 가질 수 있을 뿐만 아니라 그래프 상에서 함수값을 구하는 방식과 관련성이 있기 때문에 학생들의 이해를 효과적으로 증진시킬 수 있을 것으로 보인다.

위에서 제시한 사실에 따라, 본 연구의 목적은 고등학교 <10-나>의 삼각함수의 성질을 단위원이 아니라 삼각함수 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 그래프 성질을 이용하여 구할 수 있는 방법을 제시하여 삼각함수의 값을 구하는 학습활동과 삼각함수의 그래프에 대한 학습활동과의 연계성을 높이고, 이를 통하여 삼각함수의 성질에 대한 학생들의 이해를 향상시킬 수 있는지를 논의하고자 한다.

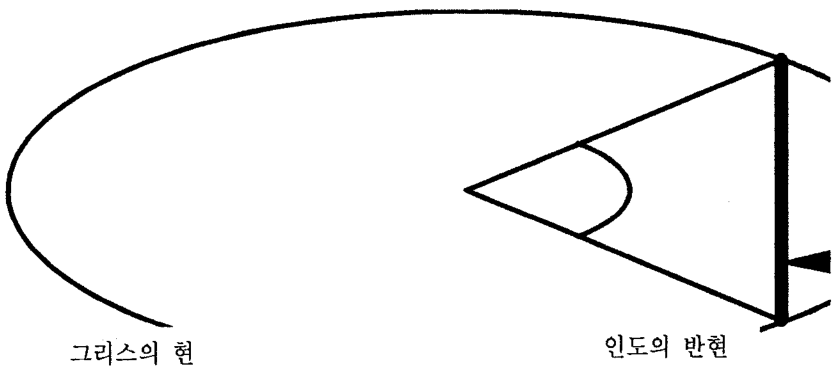
Ⅱ. 삼각함수의 간단한 역사

최초의 삼각함수는 길이와 각을 직접 잴 수 없는 천문을 연구했던 천문학자들의 계산을 돕기 위한 도구로 개발된 수학적 개념으로, 그 시작은 순수한 실용적 목적에서 였다. 기원전 160년 경에 태어난 그리스의 천문학자이며 수학자였던 히파르쿠스(Hipparchus)는 "삼각함수의 아버지"로 불린다. 고대 천문학자들은 행성의 운행궤도가 원모양을 한다고 믿었기 때문에 히파르쿠스도 많은 시간을 원의 연구에 투자했으며 그 결과 오늘날 사인함수의 값을 나타내는 표와 거의 일치하는 <현의 표>를 만들 수 있었다. 오늘날의 경위의(經緯儀, theodolite)[1]에 해당하는 원시적 측정장비와 삼각함수의 새로운 발견을 결합하여 히파르쿠스는 최초로 별자리의 목록을 만들었고 일 년을 6.5분 간격으로 계산했으며, 경도와 위도를 이용하여 지구상의 장소의 위치를 확인하는 체계를 개발하였다(Meulemeester, 1993).

1) 경도(經度)와 위도(緯度)를 구할 수 있다는 뜻에서 붙여진 이름으로 천체망원경에 설치하여 항성이 자오선을 통과하는 시각과 천체의 위치를 재기도 하며 간단한 것으로는 측량에 사용하기도 한다.

약 300년 후 톨레미(Ptolemy)는 히파르쿠스의 연구결과를 수집하고 확장하여 그의 유명한 천문학 집대성인 <알마게스트, Almagest 數學大全> 13권을 편찬하였다. 이 책은 태양과 달의 움직임에서부터 행성들의 운동, 하늘에 고정된 별들의 성질에 이르기까지 천문학에 관련된 정보를 총망라하고 있다. 또한 하늘에 있는 물체의 정확한 측정을 위해서 필요한 정교한 수학적 기초를 위하여 톨레미는 <알마게스트>의 앞쪽에 <현에 관한 표>를 개발하여 제시해 두고 있다(윌리엄 던햄, 2004). 또한 덧셈정리, 반각정리, 사인정리 등과 동치인 것들의 증명이 제시되어 있고, 30' 마다의 현의 표를 소수 5자리까지 구하고 그 계산법을 설명하고 있다(박세희, 2007). 히파르쿠스의 원본 저술이 현존하는 것이 없기 때문에 톨레미의 이 13권은 아주 소중한 자료들이다. 후대의 천문학자들에게 삼각함수를 물려 준 것 외에 사실 <알마게스트>에는 많은 틀린 부분을 담고 있는데 그 중에서도 톨레미의 황당한 지구중심의 우주관은 1543년 코페르니쿠스(Copernicus)의 태양중심설이 출현하기 전까지 1000년 이상이나 사람들에게 참된 진리로 인식되었다.

고대 인도에서도 천문학적 필요성에 따라 삼각법이 발달하였다. 그리스인들과는 달리 두 배인 호의 길이에 대응하는 반현의 길이를 계산해 두고 이를 표를 사용하여 구했다(박세희, 2007). 5세기 경 삼각법을 연구했던 인도의 수학자 아랴바타(Aryabhata)는 사인 길이를 반현을 뜻하는 "ardha-jya"로 명명했는데 오늘날 cosine을 cos으로 축약하여 사용하는 방식과 같은 것이었다(박세희, 2007, Meulemeester, 1993). 아랴바타는 코사인 정리를 비롯하여 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$, $1-\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha$ 등의 사실을 응용하여 사용하였고 이런 결과는 유럽에 영향을 주었다. 유럽의 여러 나라들이 중세의 암흑기를 거치는 동안 그리스 수학을 계승, 발전시켰던 아랍 수학자들은 아랴바타의 업적을 알게 되었다. 인도의 "Jya"는 처음에는 소리만 따서 "jiba"로 번역되었는데 아랍에서는 이것이 전혀 의미 없는 용어였으므로 이후의 수학자들은 해안의 '만'(cove, bay, gulf)을 의미하는 "jaib"로 적기 시작했다.



아랍과 페르시아도 인도의 영향으로 반현을 사용했으며 9세기의 아랍 알바타니(Arab al-Battani)는 톨레미의 업적을 소개하였고 $\tan, \cot$에 대한 $1°$ 마다의 표를 만들었으며, 10세기의 아불 웨파

(Abul-Wefa)는 tan, cot, sec, cosec의 개념을 확립하여 여섯 가지 삼각함수를 모두 사용하였고, 반각공식과 역 sin함수를 사용하였다.

1085년 스페인의 톨레도(Toledo)는 아랍인들이 그리스, 중동 그리고 아시아로부터 모아 온 온갖 고전들을 기독교 지배하의 유럽으로 끌어들인 지성의 수입항이었다(Meulemeester, 1993). 1150년 마침내 번역가들 가운데에서도 가장 유명하고 재능이 뛰어난 인물이었던 이탈리아 크레모나 출신의 제라르드(Gerard)가 이 톨레도에서 연구를 수행하면서 이들 책을 우연히 발견하게 되었다. 아르키메데스, 히포크라테스, 유클리드 등 그리스 고전을 라틴어로 번역하였다(김은국, 1998). 제라르드는 아랍 바타의 책을 라틴어로 번역하면서 "jaib"를 "sinus"로 바꾸어 적었다. "굽어진" 또는 "휘어진"을 뜻하는 "sinus"는 해안가의 굴곡을 뜻한다고 하여 '만'을 나타낼 때 라틴어에서 흔히 사용되던 단어였다. 오늘날 사인함수의 그래프를 볼 때 중세의 수학자들이 "굽어진"의 의미로 왜 sine curve라는 말을 사용했는지 알 수 있다.

"cosine"이란 용어는 "어떤 각의 사인은 그 여각의 코사인과 같다"(the sine of an angle is equal to the cosine of its complement)는 것으로부터 쉽게 알 수 있다. 수학자들은 이를 '사인의 여각'(complementary sine)으로 사용하기 시작했고, 1620년 건터(Edmund Gunter)는 이를 줄여서 "co.sinus"로 소개했으며 그 뒤 영어화 되어 오늘날 사용하고 있는 "cosine"으로 되었다.

III. 고등학교 <10-나>에 제시된 "일반각의 삼각 함수값 구하기"에 대한 교과서 분석 결과

제7차 수학과 교육과정에 따라 개발된 <10-나> 10종의 교과서에 제시되어 있는 삼각함수 단원의 지도계열과 내용을 분석하였으며 <부록>에 정리되어 있다. 이 분석에 따르면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 분석한 10종 교과서 모두 일반각 $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\pi\pm\theta$에 대한 삼각 함수값 구하는 것을 단위원에서 대칭을 이용하여 설명하고 있다. 단위원과 대칭을 이용하는 것은 특수각에 대한 삼각 함수값의 정의와는 일관성 있지만 삼각 함수의 근원적 성질인 주기성과 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ 함수의 그래프 성질과는 무관하다. 삼각 함수의 지도목적이 다양한 실제적인 변화의 현상을 기술하고 종속관계를 인식하도록 하기 위해 그래프로 해석하도록 하는 것이므로(우정호, 2000) 삼각 함수값을 그래프 상에서 해석할 수 있도록 지도하는 것은 중학교 때부터의 그래프 학습방식과 일관성 있어 학생들의 이해를 높일 수 있을 것으로 보인다.

둘째, 분석한 10종 교과서 모두 일반각 $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\pi\pm\theta$에 대한 삼각 함수값 구하는 것과 삼각 함수의 그래프를 별개의 지도내용으로 다루고 있다. 그리고 삼각 함수의 그래프 또한

특수각과 일반각에 대한 함수값을 이용하여 그리는 것을 도입하지 않은 채 바로 단위원을 사용하여 지도함으로써 학생들이 삼각 함수값을 구한 것과 삼각 함수의 그래프 그리는 것을 서로 연관시켜 이해하지 못하고 있다고 판단된다.

셋째, 대한교과서a와 교학사a 교과서를 제외한 나머지 교과서 모두 일반각 $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\pi\pm\theta$에 대한 삼각 함수값 구하는 것을 "$2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수"로 제시하고 있어 지도내용에 대한 소단원 제목이 분명하지 않음을 알 수 있다. 이 지도내용은 일반각에 대한 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ 함수의 값을 특수각인 θ를 이용하여 구하는 것이므로 "일반각에 대한 삼각 함수값 구하기"란 용어를 사용하는 것이 좋을 듯하다.

넷째, 10종 교과서 모두 문제의 지문에서, 예를 들어 <그림 Ⅲ-1>과 같이 "다음 삼각함수의 값을 구하여라." 식으로 표현하고 있다. 하지만 이 표현을 좀 더 살펴보면 마치 $\sin\frac{2}{3}\pi$를 하나의 삼각함수로 취급하고 있는 것으로 보이며, 이것은 학생들에게 주어진 함수에 대한 함수값을 구하는 활동임을 구체적으로 인식시키는 데 부족하다고 판단된다. 따라서 외국 교과서(Sullivan, 2005)의 예처럼 하나의 일반각을 주고 이 각에 대한 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$에 대한 삼각 함수값을 구하도록 하는 것이 바람직하다고 본다.

3-7 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin\frac{2}{3}\pi$ (2) $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$ (3) $\tan\frac{8}{3}\pi$

<그림 Ⅲ-1> 대한교과서b (p. 153)에 제시된 문제지문

다섯째, 분석한 여러 교과서에서 일반각 $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\pi\pm\theta$에 대한 삼각 함수값 구하는 것을 삼각함수의 성질로 다루고 있는데 특수각을 확장시켜 일반각으로 나타낼 때 이를 삼각함수의 성질로 표현할 수도 있겠지만 지도내용을 구체적으로 표현한다는 측면에서 "일반각에 대한 삼각 함수값 구하기"란 용어를 사용하는 것이 좋을 듯하다.

여섯째, 분석한 10종 교과서 중 대한교과서b와 교학사b만 유일하게 삼각 함수의 그래프를 지도한 후 일반각에 대한 삼각 함수값을 구하도록 하고 있다.[2] 하지만 이 두 교과서에서도 $2n\pi+\theta$의 삼각

2) 7차 수학과 교육과정과 2007년 개정 수학과 교육과정에서도 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한 다음 삼각함수의 성질을 지도하도록 하고 있지만 분석한 교과서에서는 그런 의도가 드러나지 않고 있다. 개정 수학교과서는 아직 공개가 되지 않은 관계로 이러한 분석을 하기가 현실적으로 불가능하였다.

함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수로 제시하고 있어 구체적으로 이 내용이 함수값을 구한다는 의미를 제시하고 있지는 못하다.

따라서, 본 연구는 일반각 $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$, $\pi\pm\theta$에 대한 삼각 함수값 구하는 것과 삼각함수의 그래프 사이의 연계성을 높이기 위하여 단위원을 이용한 삼각 함수값 구하는 방식이 아니라 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ 삼각 함수의 그래프 성질을 이용하여 일반각에 대한 삼각 함수값을 구하는 교수법을 제안하고 논의하고자 하는 것이다.

Ⅳ. 삼각함수의 그래프 성질을 이용한 "일반각의 삼각 함수값 구하기"에 대한 교수법적 제안

먼저 삼각 함수 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 그래프에 대한 성질을 분석한 다음 이들 그래프의 짝수함수와 홀수함수의 성질과 더불어 이들 삼각함수 그래프의 성질을 이용하여 일반각의 삼각 함수값 구하는 방법에 대한 교수법적 제안을 하고자 한다.

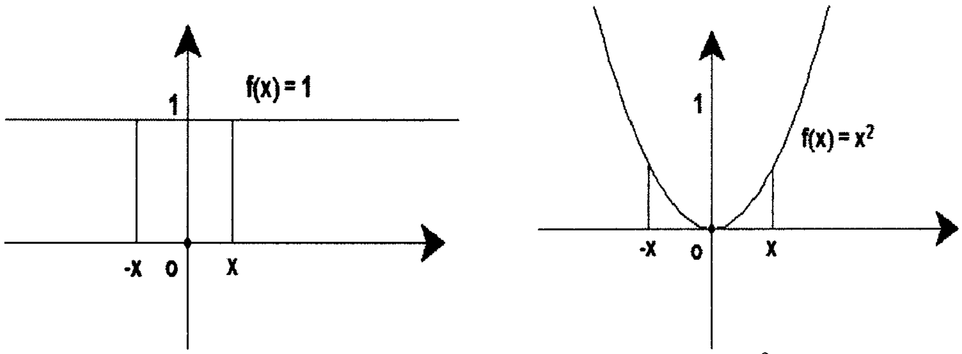
1. cos(x) 함수 그래프의 짝수함수 성질

<그림 Ⅳ-1, 2, 3>을 보면 $y=\cos(x)$의 그래프는 y축에 대칭인데 이 성질은 $y=1$과 같은 짝수함수가 가지는 성질이다. 즉 $f(x)=1\cdot x^0$에서 차수 0이 짝수이므로 $y=1$은 짝수함수이고 $y=\cos(x)$도 y축 대칭으로 짝수함수의 성질을 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 짝수함수의 대표적인 함수인 $y=x^2$이 $f(-x)=f(x)=x^2$이 되어 x와 $-x$에 대해 같은 그래프인 것처럼 $\cos(-x)=\cos(x)$이므로 $y=\cos(x)$ 그래프는 $y=\cos(-x)$와 같다. 따라서 $\cos(x)=\cos(-x)$이므로 <10-나>에 제시되어 있는 $-\theta$에 대한 $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$임을 쉽게 알 수 있다.

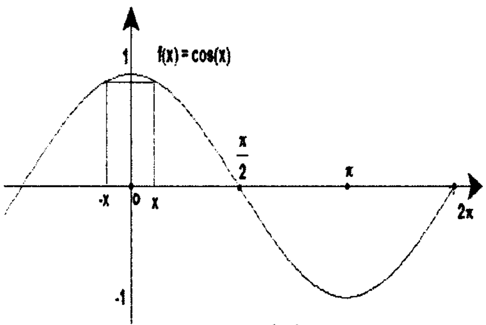
2. sin(x)과 tan(x) 함수 그래프의 홀수함수 성질

<그림 Ⅳ-4, 5, 6, 7>을 보면 $y=\sin(x)$와 $y=\tan(x)$의 그래프는 원점을 지나는데(원점대칭) 이 성질은 원점을 지나면서 기울기의 부호에 따라 제 1, 3사분면과 제 2, 4사분면을 지나는 $y=x$와 같은 홀수함수의 대표적 성질이다. 즉 $f(x)=0\cdot x^0+1\cdot x^1$에서 차수 1이 홀수이므로 $y=x$는 홀수함수이고 $f(x)=-f(-x)$의 성질을 가진다. $y=\sin(x)$와 $y=\tan(x)$도 홀수함수의 성질을 가지므로 θ와 $-\theta$에 대한 함수값은 같고 부호는 반대이므로 $\sin(\theta)=-\sin(-\theta)$이고 이를 다시

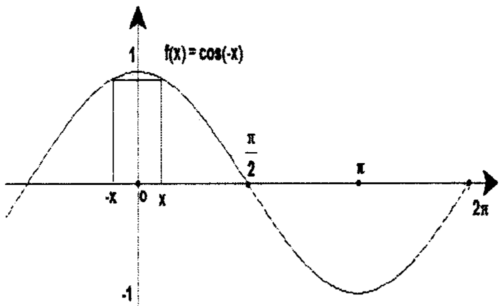
적어보면 $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$가 됨을 그래프로 확인할 수 있다.



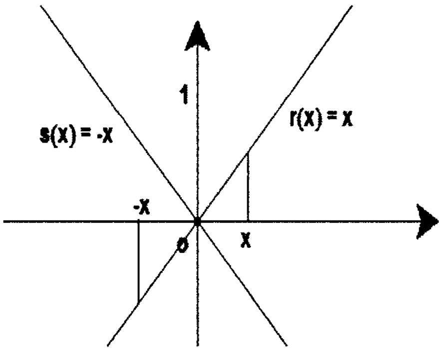
<그림 Ⅳ-1> y축 대칭인 함수의 대표적인 예인 $y=1$과 $y=x^2$ 함수의 그래프



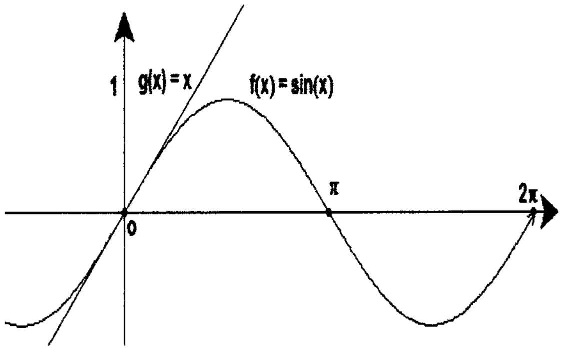
<그림 Ⅳ-2> $y=\cos(x)$의 그래프



<그림 Ⅳ-3> $y=\cos(-x)$의 그래프

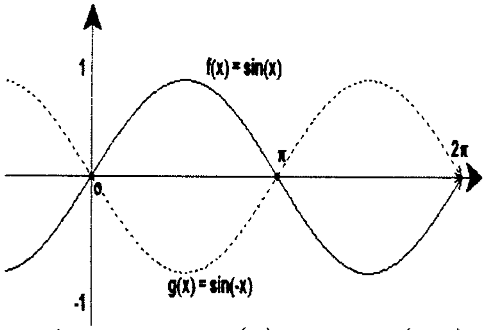


<그림 Ⅳ-4> $y=x$와 $y=-x$의 그래프

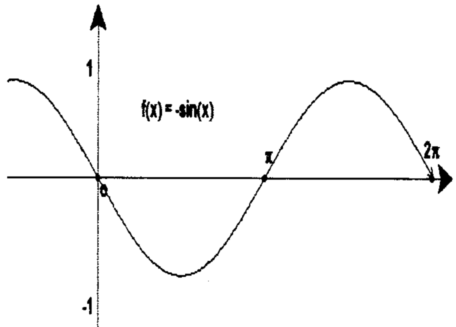


<그림 Ⅳ-5> $y=\sin(x)$와 $y=x$의 그래프

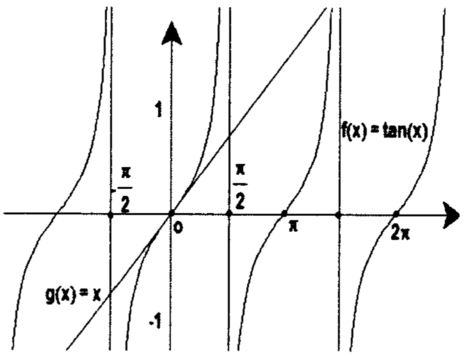
$y=\tan(x)$도 홀수함수의 성질을 가지므로 θ와 $-\theta$에 대한 함수값은 같고 부호는 반대이므로 $\tan(\theta)=-\tan(-\theta)$이고 이를 다시 적어보면 이고 $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$가 됨을 그래프로 확인할 수 있다(<그림 Ⅳ-8, 9, 10> 참조).



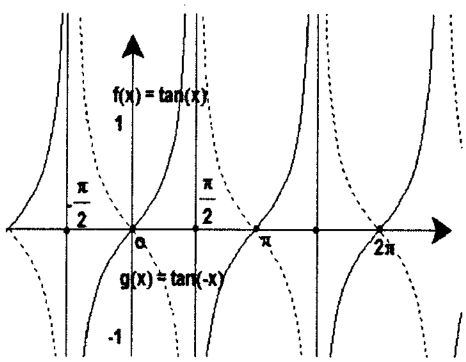
<그림 Ⅳ-6> $y=\sin(x)$와 $y=\sin(-x)$의 그래프



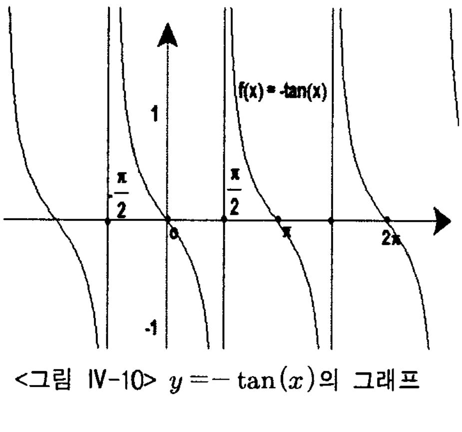
<그림 Ⅳ-7> $y=-\sin(x)$의 그래프



<그림 Ⅳ-8> $y=\tan(x)$와 $y=x$의 그래프



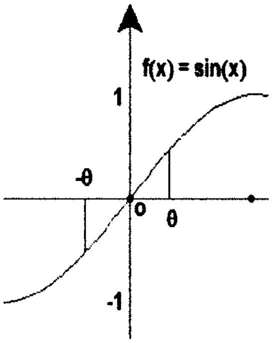
<그림 Ⅳ-9> $y=\tan(x)$와 $y=\tan(-x)$의 그래프



<그림 Ⅳ-10> $y=-\tan(x)$의 그래프

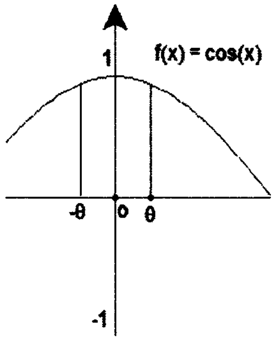
이것을 위에서 논의한 바와 같이 그래프에서 해석하면 $\sin(x)$와 $\tan(x)$에 대해서는 홀수함수의 성질을 적용하고, $\cos(x)$에 대해서는 짝수함수의 성질을 적용하면 된다. 아래 그림을 보면 $\sin(x)$와 $\tan(x)$는 원점 O을 중심으로 $-\theta$와 θ는 함수값은 같고 부호가 다르므로

$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$, $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$이다. 하지만 $\cos(x)$는 원점 O을 중심으로 $-\theta$와 θ는 함수값이 같고 부호도 같으므로 $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$가 된다.



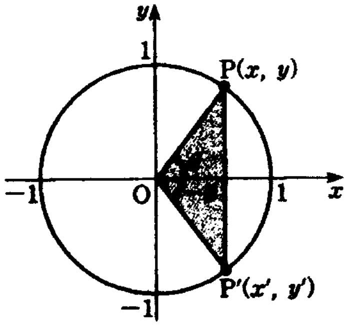
$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$

$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$



$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$

아래 그림은 <10-나>에 제시되어 있는 단위원을 이용하여 $-\theta$의 삼각 함수값을 구하는 방법과 그 결과이다. 단위원을 사용했을 때와 그래프를 사용했을 때의 결과가 같음을 알 수 있다.



■ $-\theta$의 삼각함수

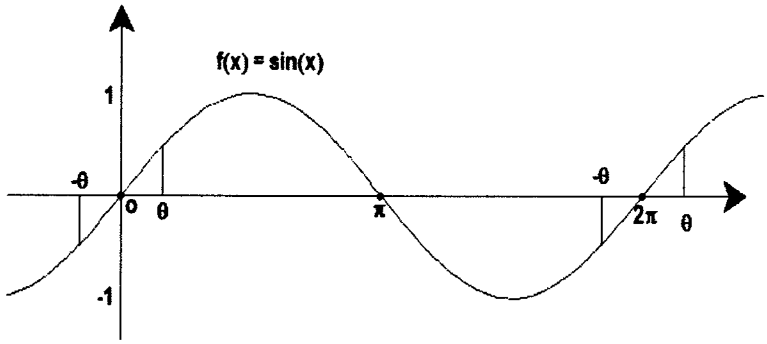
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

3. θ와 $-\theta$의 $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cos(x)$ 그래프에서의 위치관계

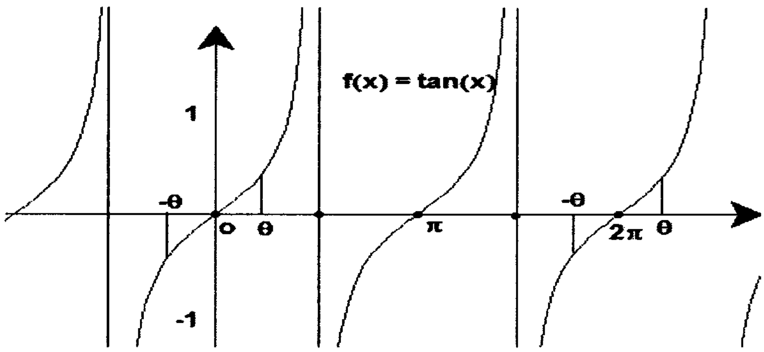
그래프 상에서 θ와 $-\theta$는 O, π, 2π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$의 좌우에 위치하는 예각(특수각을 포함해서)을 말한다. 특수각의 경우는 중학교 3학년에서 배운 삼각비를 이용하여 쉽게 구할 수 있고, 예각의 경우는 삼각비의 표를 사용하여 구할 수 있다. 예를 들어, $\frac{\pi}{2}+\theta$는 $\frac{\pi}{2}$에서 예각 θ만큼의 오른쪽에 위치하는 것이고, $\frac{\pi}{2}-\theta$는 $\frac{\pi}{2}$에서 예각 θ만큼의 왼쪽에 위치하는 것이다.

① $\sin(x)$과 $\tan(x)$ 그래프에서 원점 O와 2π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

$\sin(x)$와 $\tan(x)$ 그래프의 홀수함수 성질을 적용해보면 아래 <그림 Ⅳ-11, 12>와 같이 원점 O와 2π에서는 x축과의 교점에서 θ와 $-\theta$가 좌우로 동일하게 위치해 있음을 알 수 있다. 이것은 $\sin(2n\pi \pm \theta) = \sin(\theta)$이고 $\tan(2n\pi \pm \theta) = \tan(\theta)$임을 의미하는 것이다.



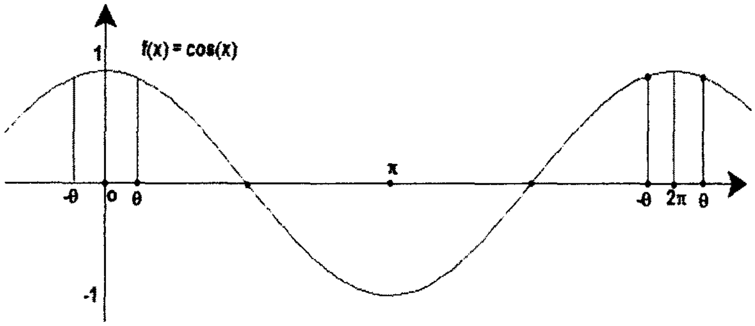
<그림 Ⅳ-11> $\sin(x)$ 그래프에서 원점 O와 2π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계



<그림 Ⅳ-12> $\tan(x)$ 그래프에서 원점 O와 2π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

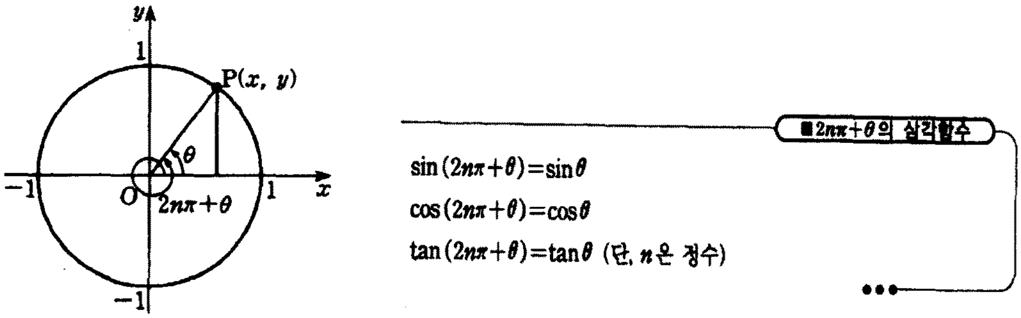
② $\cos(x)$ 그래프에서 원점 O와 2π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

$\cos(x)$ 그래프의 짝수함수 성질을 적용해보면 아래 <그림 Ⅳ-13>과 같이 원점 O와 2π에서는 함수의 최대값인 1과 최소값인 -1에서 θ와 $-\theta$가 좌우로 동일하게 위치해 있음을 알 수 있다. 이것은 $\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos(\theta)$임을 의미하는 것이다.



<그림 Ⅳ-13> $\cos(x)$ 그래프에서 원점 O와 2π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

아래 그림은 <10-나>에 제시되어 있는 단위원을 이용하여 $-\theta$의 삼각 함수값을 구하는 방법과 그 결과이다. 단위원을 사용했을 때와 그래프를 사용했을 때의 결과가 같음을 알 수 있다.

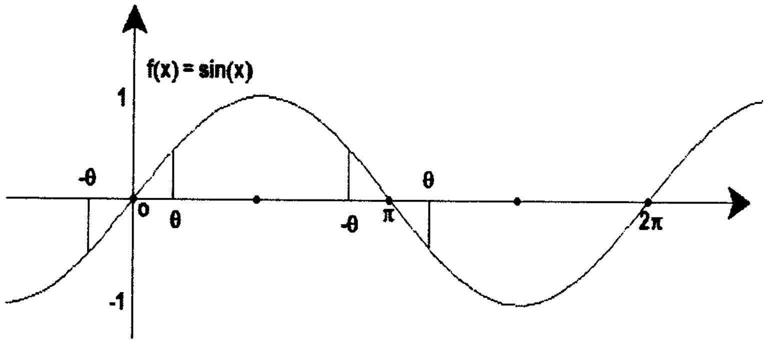


③ $\sin(x)$과 $\tan(x)$ 그래프에서 π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

<그림 Ⅳ-14>의 π에서의 $\sin(x)$ 그래프 움직임을 보면 원점 O에서와는 반대로 $y=-x$ 방향으로 움직이고 있는 것을 볼 수 있는데, 이것은 π에서 x축과의 교점을 중심으로 θ와 $-\theta$가 원점 O에서와 비교해 볼 때 함수값은 같고 부호가 반대임을 알 수 있다. 따라서 $\sin(\pi+\theta)$는 π에서 오른쪽으로 θ만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 θ와 같고 함수값의 부호가 반대이므로 $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$이고, $\sin(\pi-\theta)$는 π에서 왼쪽으로 $-\theta$만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 $-\theta$와 같고 함수값의 부호가 반대이므로 $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)$이고 여기에 $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$을 적용하면 $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin(\theta)$가 된다.

마찬가지로 <그림 Ⅳ-15>에서와 같이 $\tan(\pi+\theta)$는 π에서 오른쪽으로 θ만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 θ와 같고 함수값의 부호도 같으므로 $\tan(\pi+\theta)=\tan(\theta)$이고, $\tan(\pi-\theta)$는 π에서 왼쪽으로 $-\theta$만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 $-\theta$와 같고 함수값의 부호도 같으므로 $\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)$이고 여기에 $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$을 적용하면 $\tan(\pi-\theta)=$

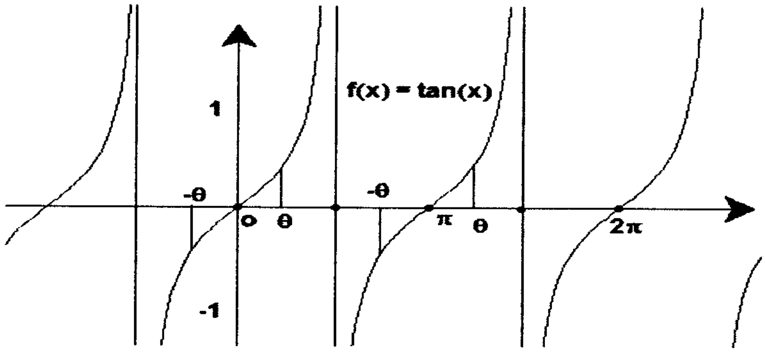
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$가 된다.



<그림 Ⅳ-14> $\sin(x)$ 그래프에서 π와 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

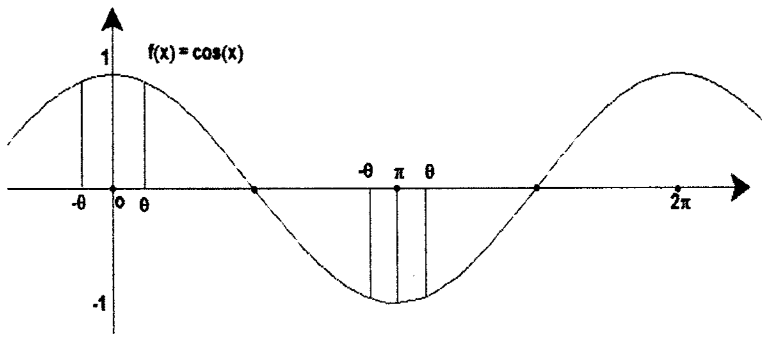
④ $\cos(x)$ 그래프에서 π에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

<그림 Ⅳ-16>의 $\cos(x)$ 그래프 움직임을 보면 원점 O에서는 최대값 1을 중심으로 θ와 $-\theta$가 좌우로 위치해 있지만 π에서는 반대로 최소값 -1을 중심으로 θ와 $-\theta$가 좌우로 위치해 있으므로 원점 O에서와 비교해 볼 때 함수값은 같고 부호가 반대임을 알 수 있다. 따라서 $\cos(\pi+\theta)$는 π에서 오른쪽으로 θ만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 θ와 같고 함수값의 부호가 반대이므로



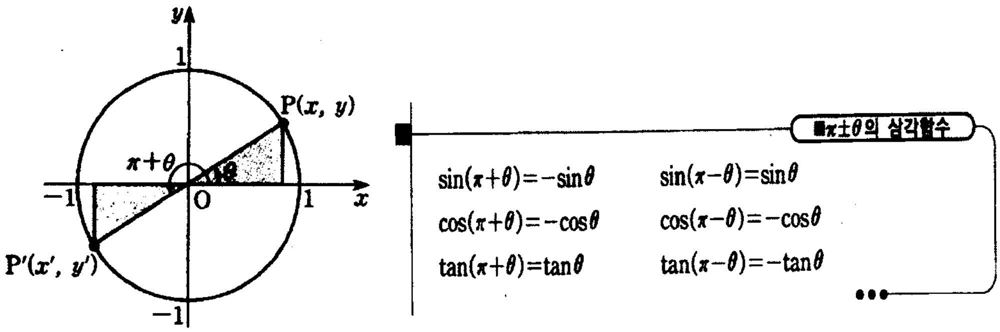
<그림 Ⅳ-15> $\tan(x)$ 그래프에서 π와 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

$\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$이고, $\cos(\pi-\theta)$는 π에서 왼쪽으로 $-\theta$만큼의 위치로 함수값이 원점 O에서의 $-\theta$와 같고 함수값의 부호가 반대이므로 $\cos(\pi-\theta) = -\cos(-\theta)$이고 여기에 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$을 적용하면 $\cos(\pi-\theta) = -\cos(-\theta) = -\cos(\theta)$가 된다.



<그림 Ⅳ-16> $\tan(x)$ 그래프에서 π와 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

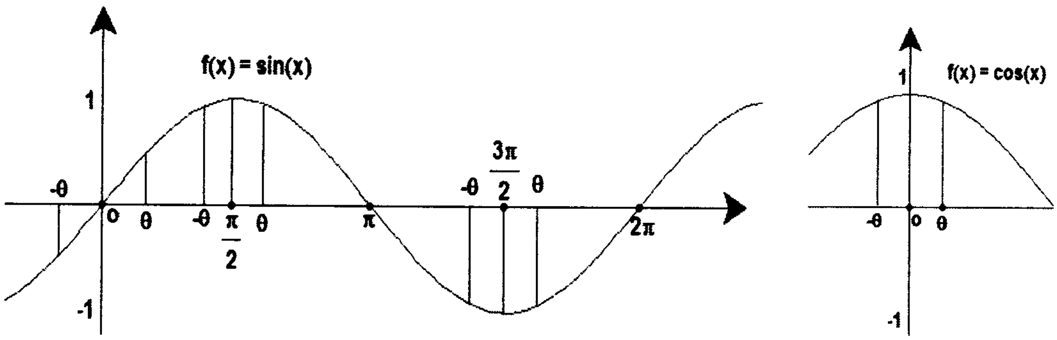
아래 그림은 <10-나>에 제시되어 있는 단위원을 이용하여 $-\theta$의 삼각 함수값을 구하는 방법과 그 결과이다. 단위원을 사용했을 때와 그래프를 사용했을 때의 결과가 같음을 알 수 있다.



⑤ $\sin(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

<그림 Ⅳ-17>의 $\sin(x)$ 그래프 움직임을 보면 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서는 θ와 $-\theta$가 좌우대칭으로 위치해 있는데, 이것은 y축 대칭인 $\cos(x)$ 그래프의 성질이다. 이 성질을 적용하면 $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$와 $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$는 $\frac{\pi}{2}$에서 좌우대칭으로 θ와 $-\theta$가 위치한 것으로 $\cos(x)$ 그래프의 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 움직임과 동일하다. 따라서 $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos(\theta)$이고 $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(-\theta)=\cos(\theta)$이다. 그렇지만 $\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)$와 $\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)$는 $\frac{3\pi}{2}$에서 좌우대칭으로 θ와 $-\theta$가 위치한 것으로 $\cos(x)$ 그래프의 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 움직임과 동일하지만 함수값이 서로 반대이

다. 따라서 $\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos(\theta)$이고 $\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos(\theta)$이다.

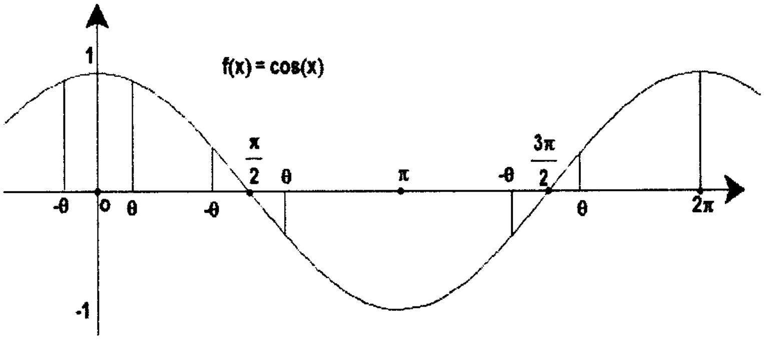


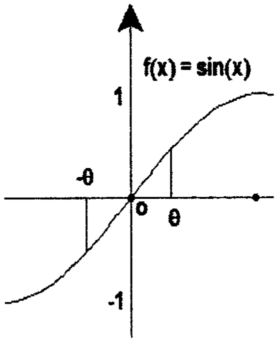
<그림 Ⅳ-17> $\sin(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

⑥ $\cos(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

<그림 Ⅳ-18>의 $\cos(x)$ 그래프 움직임을 보면 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서는 θ와 $-\theta$가 원점대칭으로 위치해 있는데, 이것은 원점대칭인 $\sin(x)$ 그래프의 성질이다. 이 성질을 적용하면 $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$와 $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$는 $\frac{\pi}{2}$에서 원점대칭으로 θ와 $-\theta$가 위치한 것으로 $\sin(x)$ 그래프의 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 함수값은 같고 그 부호가 반대이다. 따라서 $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin(\theta)$이고 $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin(\theta)$이다. 그렇지만 $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$와 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$는 $\frac{3\pi}{2}$에서 원점대칭으로 θ와 $-\theta$가 위치하고 있고 $\sin(x)$ 그래프의 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 함수값과 그 부호가 같다. 따라서 $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin(\theta)$이고 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$이다. 물론 여기서 $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$와 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$를 같은 $\cos(x)$ 그래프에서 함수값을 구할 수 있는데, $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$와 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$의 위치는 $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$와 $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$와 비교해 볼 때 함수값은 같고 그 부호가 반대임을 알 수 있다. 따라서 $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-(-\sin(\theta))=$

$\sin(\theta)$이고 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=-(-\sin(-\theta))=-\sin(\theta)$가 됨을 알 수 있다.



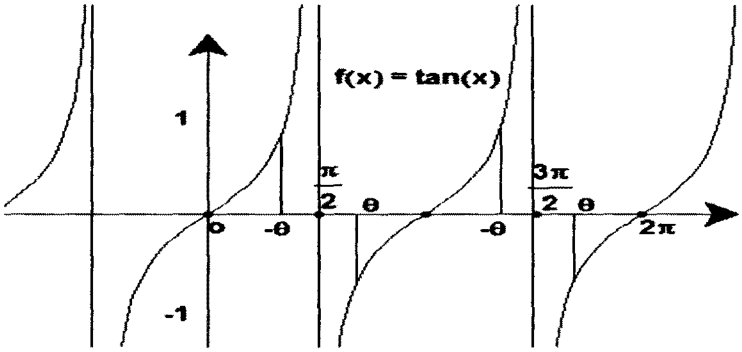


<그림 Ⅳ-18> $\cos(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

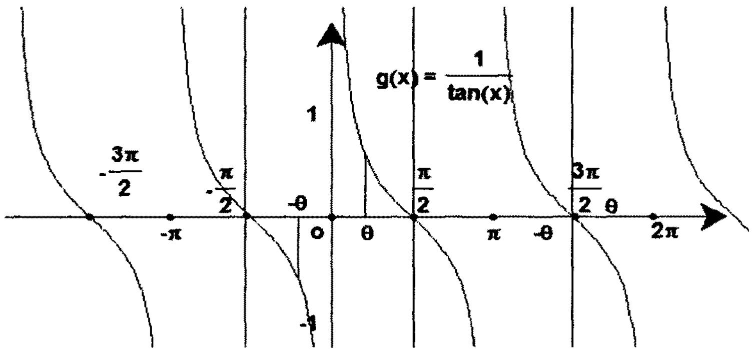
⑦ $\tan(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

<그림 Ⅳ-19>의 $\tan(x)$ 그래프 움직임을 보면 주기는 π이고 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 점근선으로 하여 θ와 $-\theta$가 원점대칭으로 함수값은 같고 그 부호는 반대로 위치해 있는데, 이러한 성질을 가지는 함수는 <그림 Ⅳ-20>의 원점대칭인 $\cot(x)$ 그래프이다. $\cot(x)=\frac{1}{\tan(x)}$이고 $\tan(x)$의 원점대칭 성질을 적용하면 $\cot(-\theta)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{-\tan(\theta)}=-\cot(\theta)$이므로 $\cot(x)$ 그래프도 홀수함수의 성질을 가지고 있음을 알 수 있다.

$\tan(\frac{\pi}{2}\pm\theta)$와 $\tan(\frac{3\pi}{2}\pm\theta)$는 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 점근선으로 하고 θ와 $-\theta$가 원점대칭으로 위치하고 있으므로 이런 특징은 $\cot(x)$ 그래프의 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 움직임과 동일하다. 따라서 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$와 $\frac{3\pi}{2}\pm\theta$에서 $\tan(x)$와 $\cot(x)$는 함수값은 같고 그 부호가 반대이므로 $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot(\theta)$이고 $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\cot(-\theta)=\cot(\theta)$이다. 그리고 $\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot(\theta)$이고 $\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cot(-\theta)=\cot(\theta)$이다.

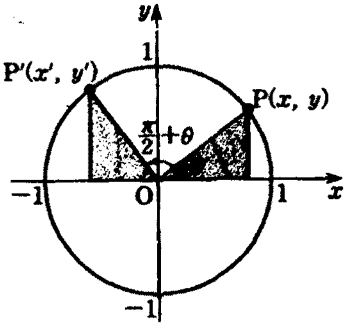


<그림 Ⅳ-19> $\tan(x)$ 그래프에서 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 θ와 $-\theta$의 위치관계



<그림 Ⅳ-20> $\frac{1}{\tan(x)} = \cot(x)$ 그래프에서 원점 O에서 θ와 $-\theta$의 위치관계

아래 그림은 <10-나>에 제시되어 있는 단위원을 이용하여 $-\theta$의 삼각 함수값을 구하는 방법과 그 결과이다. 단위원을 사용했을 때와 그래프를 사용했을 때의 결과가 같음을 알 수 있다.



■ $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

•••

V. 결 론

본 연구의 목적은 고등학교 <10-나>의 $2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수의 값을 단위원이 아니라 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 삼각함수 그래프 성질을 이용하여 구할 수 있는 방법을 제안하여 삼각함수의 값을 구하는 학습활동과 삼각함수의 그래프에 대한 학습활동과의 연계성을 높이고, 이를 통하여 삼각함수의 성질에 대한 학생들의 이해를 향상시킬 수 있는지를 논의하는 것이다. 이러한 목적으로 수행된 본 연구는 그 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 삼각함수의 그래프 성질을 이용하여 일반각에 대한 삼각 함수값을 구한 것은 단위원에 의한 방법과 동일한 결과를 얻을 수 있으며, 이 방법은 오히려 삼각함수 그래프의 성질을 근본적으로 파악하여 삼각 함수값 구하기에 활용하고 있으므로 삼각함수의 그래프에 대한 학생들의 이해를 촉진시킬 수 있으며 또한 삼각함수 그래프의 지도내용이나 활동과도 일관성이 높다고 본다. 이것은 스키마가 활성화되는 지식이며 생장성이 높은 지식으로 삼각함수의 다른 영역의 이해에 긍정적 효과를 줄 것으로 기대한다.

둘째, 본론에서도 언급했듯이 분석한 10종 교과서 중에서 오직 한 교과서만 학습내용과 학습활동이 일치하는 "일반각에 대한 삼각함수의 값 구하기"라고 했을 뿐 나머지 교과서들은 모두 "삼각함수의 성질"이나 "$2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수"라는 모호한 단원명을 사용하고 있다. 이에 대한 보다 심도 있는 논의가 교과서 개발자들에게서 있어야 할 것으로 본다.

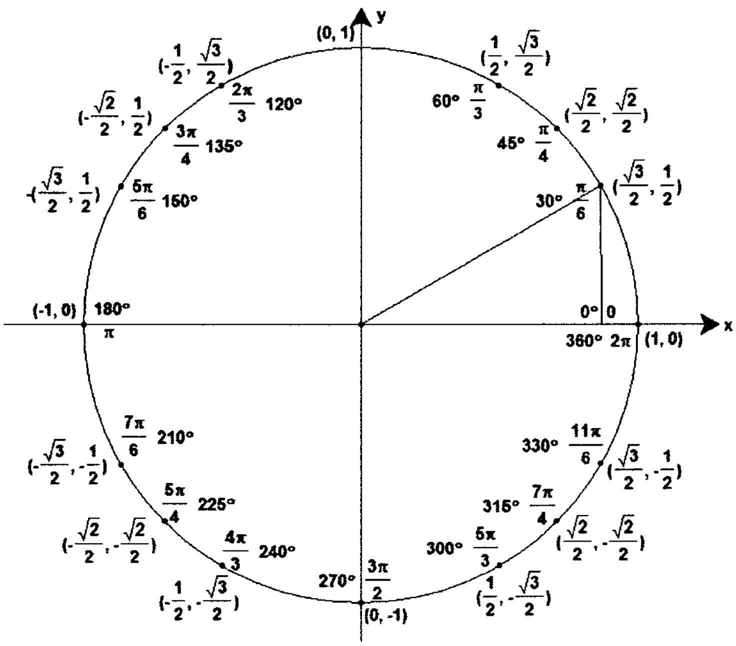
셋째, 삼각 함수값 구하기와 삼각함수의 그래프 지도 내용사이의 일관성 부족을 들 수 있다. <10-나> 교과서의 내용을 보면 일반각에 대한 함수값을 구하기는 하지만 일반각과 함수값을 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 그래프를 그리는데 필요한 순서쌍으로 전혀 활용하지 않고 있다. 이것은 지금까지의 함수의 그래프를 학습해 왔던 방식과 아주 다르기 때문에 학생들이 삼각함수의 그래프를 이해하는데 어려워하고 있는지도 모른다. 따라서 일반각을 삼각함수의 성질을 이용하여 함수값으로 바꾸고 이를 순서쌍으로 만든 다음 x축과 y축에 점으로 나타내어 정의하는 방식으로 삼각함수의 그래프를 지도하는 것이 적절할 것으로 보인다.

넷째, <그림 Ⅲ-1>에 있듯이 "다음 삼각함수의 값을 구하여라."라는 문제지문은 마치 $\sin\frac{2}{3}\pi$를 하나의 삼각함수로 취급하고 있는 것으로 보일 수 있으므로 하나의 주어진 일반각 $\frac{2}{3}\pi$에 대한 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$의 삼각 함수값을 구하도록 하는 것이 옳다고 본다. 또한 함수값의 표현은

$f(x)$로 표현하는 것이 명확하므로 $\sin(\frac{2}{3}\pi)$라는 식으로 반드시 괄호 안에 각을 표현하도록 해야 할 것이다.

다섯째, 삼각함수 그래프에 대한 내면화와 대상화를 촉진시키기 위해서는 "$2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수"의 지도내용보다 먼저 삼각함수 그래프를 지도하는 것이 더 나을 것으로 보인다. 현행 <10-나> 교과서처럼 삼각 함수값 구하기와 삼각함수 그래프가 별개의 지도내용으로 다루어지고 있는 것은 결국 학생들의 삼각함수 그래프에 대한 이해를 방해할 수 있다고 본다.

여섯째, 삼각 함수값을 구하는 과정에서 <10-나>의 교과서에 제시되어 있듯이 단위원에서의 대칭 관계를 이용하기 보다는 아래 <그림 V-1>과 같이 단위원 상에서 구체적인 특수각을 사용하여 도(°)와 라디안으로 단위원을 나누는 방법을 충분히 학습하도록 한다. 그리고 그에 대한 좌표값을 나타내는 활동으로부터 좌표값 사이의 x축 대칭, y축 대칭, 원점대칭의 관계를 학습하도록 하는 것은 삼각함수의 성질뿐만 아니라 삼각함수의 그래프 학습에 있어서도 도움이 될 것으로 생각한다.



<그림 V-1> 단위원에서의 도(°)와 라디안, 좌표값 사이의 관계

일곱째, 본 연구에서 제안하고 있는 삼각함수의 그래프 성질을 이용한 일반각의 삼각 함수값 구하

는 방법이 실제 교실현장에서도 지도가능한지, 학생들의 이해 방법과 정도에는 어떤 영향을 미치며 기억정도와 파지력은 어느 정도인지, 그리고 삼각함수의 그래프를 먼저 지도하는 것이 지도계열에 어떤 영향을 미치는지 등의 다양한 측면에서 후속연구가 이루어져야 할 것으로 본다.

참 고 문 헌

김은국 (1998). 인간등정의 발자취. 서울: 범양사 출판부.

데이비드 톨 (2003). 고등수학적 사고 (류희찬・조완영・김인수, 번역). 서울: 경문사. (원본출판, 1991).

박두일・신동선・김기현・박복현・안훈・소순영 외 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 교학사.

박배훈・김원경・조민식・김원석・이대현 (2002). 고등학교 수학 10-나. 서울: 법문사.

박세희 (2007). 수학의 세계. 서울: 서울대학교출판부.

박윤범・박혜숙・권혁천・김홍섭・육인선・송상헌 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 대한교과서.

박홍규・임성근・양지청・김수영 (2003). 고등학교 수학 10-나. 서울: 교학사.

신현성・최용준 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 천재교육.

양승갑・배종숙・이성길・박원선・박영수・홍우철 외 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 금성출판사.

우정호・류희찬・문광호・박경미 (2003). 고등학교 수학 10-나. 대한교과서.

우정호 (2000). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

윌리엄 던햄 (2004). 수학의 천재들. (조정수, 번역). 서울: 경문사. (원본출판, 1990).

이방수・기호삼 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 천재교육.

장건수・안재문・김의석・정연석・박은주 (2002). 고등학교 수학 10-나. 서울: 지구문화사.

최상기・이만근・이재실・백한미 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: 고려출판.

Meulemeester, K. De. (1993). *The TrigTrainer: A hands-on approach to teaching trigonometry.* Sunnyvale, CA: Stokes Publishing Company.

Sullivan, M. (2005). *Precalculus.* (7th ed.). NJ: Pearson Prentice Hall.

Ferrini-Mundy, J. & Lauten, D.(1993). Teaching and learning calculus. In P. S. Wilson(ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*(pp.155-176). NY: Macmillan Publishing Company.

Pedagogical Analysis and Discussion about Finding Trigonometric Function Values of General Angles in High School Mathematics

Cho, Cheong-Soo
Department of Mathematics Education, Yeungnam University
Kyungsan, Korea 712-749
E-mail : chocs@ynu.ac.kr

The purpose of study is to propose the possibilities of finding trigonometric function values using trigonometric function graphs instead of the unit circle method. And it is to discuss how to enhance relating trigonometric function value finding to graphs construction, and students conceptual understanding of the properties of trigonometric functions. The conclusions of this study are the effectiveness of function value finding using trigonometric function graphs, the use of a precise term of function value finding given general angles, consideration of a link between function value finding and graphs, and the possibility of teaching trigonometric function graphs in advance of function value finding.

* ZDM classification : D4
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : trigonometric function values, trigonometric functions, general angles

<부록> <10-나>에 제시되어 있는 삼각함수 성질에 대한 교과서 분석 결과

교과서명	삼각함수 단원의 지도계열 분석	교과서명	삼각함수 단원의 지도계열 분석
천재교육a	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수의 정의 3. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) $2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수 4. 삼각함수의 그래프 5. 삼각방정식과 부등식	교학사a	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수 (1) 일반각에 대한 삼각함수의 정의 3. 삼각함수의 그래프 4. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) 일반각에 대한 삼각함수의 값 구하기 ($2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수) 5. 삼각방정식과 부등식
천재교육b	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수 (1) 삼각함수의 뜻 (2) 삼각함수 사이의 관계 (3) 삼각함수의 성질 ($2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수) 3. 삼각함수의 그래프 4. 삼각방정식과 삼각부등식	교학사b	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수의 뜻 3. 사인, 코사인, 탄젠트의 그래프와 성질 4. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수의 상호관계 (2) $2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수 5. 삼각방정식과 부등식
대한교과서a	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수와 그 성질 (1) 삼각함수의 뜻 (2) 삼각함수 사이의 관계 (3) 여러 가지 각의 삼각함수 ($2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\pi+\theta$, $\pi-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}+\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta$의 삼각함수) 3. 삼각함수의 그래프 4. 삼각방정식과 삼각부등식	금성출판사	1. 삼각함수의 정의 (1) 일반각 (2) 호도법 (3) 삼각함수의 뜻 2. 삼각함수의 그래프 (1) 사인함수의 그래프, (2) 코사인함수의 그래프, (3) 탄젠트함수의 그래프 3. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\pi\pm\theta$의 삼각함수 (3) $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수 4. 삼각방정식과 삼각부등식
대한교과서b	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수 (1) 일반각의 삼각함수 (2) $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프 (3) $y=\tan\theta$의 그래프 3. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계	고려출판	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수(일반각에 대한 삼각함수의 정의) 3. 삼각함수의 정의 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) 삼각함수의 성질 ($2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수,

	(2) $2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수 4. 삼각방정식과 삼각부등식		$\pi\pm\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수) 4. 사인, 코사인, 탄젠트의 그래프와 성질 5. 삼각방정식과 삼각부등식
지구문화사	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수 (1) 삼각함수의 뜻 3. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\pi\pm\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수 4. 삼각함수의 그래프 (1) 사인, 코사인, 탄젠트 함수의 그래프 (2) 삼각방정식과 삼각부등식	법문사	1. 일반각과 호도법 2. 삼각함수의 정의 3. 삼각함수의 성질 (1) 삼각함수 사이의 관계 (2) <u>삼각함수의 성질</u> ($2n\pi+\theta$의 삼각함수, $-\theta$의 삼각함수, $\pi\pm\theta$의 삼각함수, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수) 4. 삼각함수의 그래프 5. 삼각방정식과 삼각부등식