韓國水資源學會論文集
第42卷 第12號・2009年 12月
pp. 1079～1089

DOI: 10.3741/JKWRA.2009.42.12.1079

Unsplit 기법을 적용한 흐름율과 생성항의 처리기법

Handling Method for Flux and Source Terms using Unsplit Scheme

김 병 현* / 한 건 연** / 김 지 성***
Kim, Byung Hyun / Han, Kun Yeon / Kim, Ji Sung

Abstract

The objective of this study is to develop the accurate, robust and high resolution two-dimensional numerical model that solves the computationally difficult hydraulic problems, including the wave front propagation over dry bed and abrupt change in bathymetry. The developed model in this study solves the conservative form of the two-dimensional shallow water equations using an unsplit finite volume scheme and HLLC approximate Riemann solvers to compute the interface fluxes. Bed-slope term is discretized by the divergence theorem in the framework of FVM for application of unsplit scheme. Accurate and stable SGM, in conjunction with the MUSCL which is second-order-accurate both in space and time, is adopted to balance with fluxes and source terms. The exact C-property is shown to be satisfied for balancing the fluxes and the source terms. Since the spurious oscillations in second-order schemes are inherent, an efficient slope limiting technique is used to supply TVD property. The accuracy, conservation property and application of developed model are verified by comparing numerical solution with analytical solution and experimental data through the simulations of one-dimensional dam break flow without bed slope, steady transcritical flow over a hump and two-dimensional dam break flow with a constriction.

Keywords : unsplit scheme, source terms, MUSCL scheme, SGM, conservation property

요 지

본 연구에서는 마른하도 및 복잡한 지형에서의 파의 전파와 같은 수공학 분야에서 해결하기 어려운 문제를 해석하기 위한 고정확도 2차원 수치모형을 개발하기 위해, unsplit 유한체적기법과 HLLC Riemann 해법을 이용한 흐름율 계산으로 쌍곡선형 적분 보존형의 2차원 천수방정식을 해석하였다. Unsplit 기법의 적용을 위해 하상경사항은 발산정리를 이용하여 이산화한 형태를 적용하였으며, 흐름율과 생성항의 균형을 이루기 위해 수면경사법을 시간과 공간에 대해 2차정확도를 가지는 MUSCL 기법과 연계하였다. 그리고 적용한 생성항 처리기법과 흐름율과의 보존특성이 만족함을 보였다. 2차정확도의 사용으로 불연속 지점에서 발생할 수 있는 수치진동을 제거하기 위해서 경사제한자를 사용한 TVD 기법을 적용하였다. 개발모형을 정확해가 존재하는 생성항이 없는 1차원 댐 붕괴 흐름에 적용하여 흐름율 계산의 정확성을 검증하였고, 하상융기를 가진 하도의 정상류 및 천이류 모의를 통해 개발모형의 보존특

* 경북대학교 공과대학 건축・토목공학부 BK21사업단 박사후연구원
Post-Doc., School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea
** 경북대학교 공과대학 건축・토목공학부 교수
Professor, School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea
*** 교신저자, 한국건설기술연구원 하천해안연구실 박사후연구원
Corresponding Author, Post-Doc., River and Coastal Research Division, Korea Institute of Construction Technology Goyang-Si, Gyeonggi-Do, 411-712, Korea
(e-mail: jisung@kict.re.kr)

성을 검증하였으며, 하상경사 및 단면의 확대/축소구간이 존재하는 2차원 댐 붕괴 흐름에 적용하여 개발모형의 적용성을 검증하였다.

핵심용어 : unsplit 기법, 생성항, MUSCL 기법, 수면경사법, 보존특성

1. 서 론

1990년대에 들어서면서 국외의 많은 연구자들에 의해 불연속적인 흐름해석을 위한 유한체적기법을 확장한 새로운 기법들이 개발되었다. 그러나 이 시기의 대부분의 연구는 하상경사항을 고려하지 않은 천수방정식을 해석하였으므로, 불규칙한 하상의 변화를 가진 정상류 모의의 경우에 흐름율과 생성항의 불균형 문제는 남아 있었다. 따라서 정상상태의 조건에서도 흐름율과 생성항의 균형을 위한 효과적인 생성항 처리기법을 확립하기 위한 여러 가지 수치기법들이 제안되었다. Bermudez and Vazquez (1994)는 Van Leer의 Q-scheme을 확장하여, 흐름이 정지된 상태에서 보존법칙이 성립함을 보여주는 보존특성(C-property)을 소개하였다. Vazquez-Cendon (1999)은 불규칙한 지형의 하천에서 하상 및 하폭의 변화로 인한 생성항의 수치처리가 중요함을 보이고, 이를 위하여 적용된 수치기법은 반드시 C-property를 만족해야 됨을 강조하였다. Zhou *et al.* (2001)은 보존변수의 재구성을 위해 수심경사를 사용하는 대신 수면경사를 이용하는 기법 (SGM)을 제안하였고, 이 후 불연속적인 계단 형태의 하상경사에 적용이 가능하도록 확장한 SGMS 기법을 제안하고 다양한 하상경사의 실험 자료와 비교하여 검증하였다(Zhou *et al.* 2002, 2004). Valiani and Begnudelli (2006)는 하상경사로 인해 발생하는 정수압을 매트릭스의 divergence 형태로 하상경사항을 나타내고, SGM (Surface Gradient Method)을 적용하여 흐름율과 생성항의 균형을 이루고자 하였다.

국내에서의 유한체적법에 대한 연구로 이길성과 이성태(1998)는 Roe 해법을 이용하여 비정형격자를 사용하기 위한 수정 MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 기법을 적용하였고, 윤태훈 등(2002)은 Roe 해법을 이용하여 가상하도에서 본류 수위 급상승에 의한 지류의 역류를 해석하였다. 시간과 공간에서 2차 정확도를 가지는 MUSCL 기법, Lax-Wendroff 기법, WAF (Weighted Average Flux) 기법 등에 대해서는 김우구 등(2003), Kim *et al.* (2004), 김대홍과 조용식(2005) 그리고 김지성과 한건연(2008)에 의해서 연구된 바 있다.

하지만, 지금까지 국내에서 개발된 고정확도 2차원 유한체적모형은 split 기법인 fractional step 기법을 적용하였다. Fractional step 기법은 x 및 y방향으로 차원을 분리하여 각 방향에 대한 sweep으로 2차원 문제를 해석하고, 생성항을 분리하여 생성항과 흐름율간의 균형을 이루도록 한 기법이다. 하지만, Leveque (1998)는 준정상상태 혹은 정상상태에서 하상경사의 변동을 다루기 위해 차원을 분리하는 것은 부정확한 해를 도출할 수 있다고 하였다. 또한 fractional step 기법은 비구조적 격자의 사용에는 어려움이 있어 자연하천과 같은 복잡한 지형의 처리에는 제약이 있다. 따라서 본 연구에서는 비구조적 격자의 적용이 자유로우며, 삼각형 및 사각형 혼합격자의 적용이 가능하여 단면의 변화가 심한 지형 및 자연하천으로의 확장이 용이한 차원 및 생성항 비분리 기법인 unsplit 기법을 적용하여 2차원 천수방정식을 해석하였다. 그리고 하상경사항은 unsplit 기법의 적용을 위해 발산정리를 이용한 이산화로 정확하고 효율적으로 흐름율과 생성항과의 불균형 문제를 해결하였다.

2. 지배방정식

보존변수로 이루어진 2차원 천수방정식을 벡터형태로 나타내면 Eq. (1)과 같다.

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \tag{1}$$

여기서 U는 보존변수 벡터, $F(U)$ 및 $G(U)$는 각각 x 및 y방향의 흐름율 그리고 $S(U)$는 생성항으로 Eq. (2)와 같다.

$$U=\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix},\ F(U)=\begin{bmatrix} hu \\ hu^2+\frac{1}{2}(gh^2) \\ huv \end{bmatrix},$$
$$G(U)=\begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2+\frac{1}{2}(gh^2) \end{bmatrix}, S(U)=\begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x}-S_{fx}) \\ gh(S_{0y}-S_{fy}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 u와 v는 각각 x와 y방향의 유속, g는 중력가속도 그리고 h는 수심이다. S_0는 하상경사로 각각

$S_{0x} = -\partial z_b / \partial x$, $S_{0y} = -\partial z_b / \partial y$로 계산되고, S_f는 마찰경사를 나타낸다.

3. 2차원 유한체적모형의 개발

유한체적기법을 이용한 이산화는 보존방정식의 적분형태를 기본으로 하며, 지배체적 V에서의 적분형 방정식은 Eq. (3)과 같다.

$$\iint_V \frac{\partial U}{\partial t} dA + \iint_V \nabla \cdot E \, dA = \iint_V S \, dA \tag{3}$$

여기서 dA는 격자의 미소면적, $E = [F, G]^T$로 흐름율 벡터이다. 발산정리를 이용하면 Eq. (4)와 같은 본 연구에서 적용하고자 하는 유한체적법에 대한 기본방정식을 구할 수 있다.

$$\iint_V \frac{\partial U}{\partial t} dA + \int_{dV} E \cdot n \, dl = \iint_V S \, dA \tag{4}$$

여기서 dV는 유한체적 V의 경계, n은 dV의 외향단위벡터, dl은 경계면의 길이, $E \cdot n$은 경계면에서의 법선방향 흐름율이다. 보존변수 U는 한 격자 내에서는 일정한 값을 가지는 것으로 가정하면, Eq. (4)의 기본적인 유한체적법의 벡터 방정식은 Eq. (5)와 같이 이산화 할 수 있다.

$$A \frac{dU}{dt} + \sum_{m=1}^{M} E_n^m L^m = AS \tag{5}$$

여기서 m은 격자 경계면을 표현하는 지수, M은 격자 경계면의 수, E_n^m은 두개의 인접한 격자를 분할하는 경계면 m을 가로지르는 흐름율 벡터이다.

3.1 Unsplit 기법

유한체적법에 의한 해석시 split 기법과 unsplit 기법의 차이는 차원 및 생성항의 분리 유무에 있다. Unsplit 기법은 공간적으로는 차원을 분리하지 않고, Godunov형 지배방정식에서 생성항을 분리하지 않는 차원 및 생성항 비분리 기법이다. Split 기법의 대표적인 fractional step 기법은 x 및 y방향에 대한 sweep이 적용되는 준2차원 기법이라 할 수 있으므로, Fig. 1과 같은 비구조적 격자의 적용에는 제약이 따르나, unsplit 기법은 차원을 분리하지 않는 완전한 2차원 기법으로 구조적 및 비구조적 격자 모두에 적용될 수 있어, 복잡한 지형에 대해서도 2차원 격자의 구성에 제약 없이 효과적으로 처리할 수 있다.

Unsplit 기법을 Godunov형 지배방정식에 적용하기 위해서는, n시간에서 $n+1$시간까지의 보존변수 U의 갱신이 필요하며, 이를 위해서는 계산격자의 모든 경계면에서 흐름율을 계산하여야 한다. unsplit 기법을 적용하여 흐름율을 계산하기 위한 알고리듬은 다음과 같다.

(1) 계산격자 l의 경계면 k에 대해, 다음과 같이 흐름율 $F_{l,k}$ 및 $G_{l,k}$를 계산한다.

① 계산격자 l에서의 보존변수 U_l의 성분과 경계면 k와 인접한 격자인 l_k에서의 보존변수 $U_{l,k}$의 성분을 외향 단위벡터와 접선벡터로 표시할 수 있는 국지좌표계 (η_1, η_2)로 변환한다. Fig. 2와 같이 x축과 η_1축 사이의 각도를 θ_k로 정의하면, 2차원 천수방정식의 보존변수 $U = [h, hu, hv] = [h, q, r]$의 회전변환된 보존변수인 U_p는 Eq. (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_p = \begin{bmatrix} h_p \\ q_p \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ q\cos\theta_k + r\sin\theta_k \\ -q\sin\theta_k + r\sin\theta_k \end{bmatrix} \tag{6}$$

Fig. 1. Structured and Unstructured Mesh

Fig. 2. Computation Method of Unsplit Scheme

② 경계면 k에 대한 수직방향 벡터는 1차원적 Riemann 문제의 형태인 $([U_P]_l^n,\ [U_P]_{l_k}^n)$로 나타낼 수 있으며, 이 보존변수들이 계산되어지면 n시간과 다음 계산시간 $n+1$에서의 경계면에서의 수직방향 흐름율 F_p와 법선방향 흐름율 G_p는 계산한다.

③ 흐름율 F_p 및 G_P를 전체좌표계(x, y)로 다시 변환하면 Eq. (7)과 같다.

$$F_{l,k}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} q_p \\ \dfrac{q_p^2}{h_p} + \dfrac{gh_p^2}{2} \\ \dfrac{q_p r_p}{h_p} \end{bmatrix} cos\theta_k - \begin{bmatrix} r_p \\ \dfrac{q_p r_p}{h_p} \\ \dfrac{r_p^2}{h_p} + \dfrac{gh_p^2}{2} \end{bmatrix} sin\theta_k,$$

$$G_{l,k}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} q_p \\ \dfrac{q_p^2}{h_p} + \dfrac{gh_p^2}{2} \\ \dfrac{q_p r_p}{h_p} \end{bmatrix} sin\theta_k + \begin{bmatrix} r_p \\ \dfrac{q_p r_p}{h_p} \\ \dfrac{r_p^2}{h_p} + \dfrac{gh_p^2}{2} \end{bmatrix} cos\theta_k \qquad (7)$$

(2) Eq. (7)을 이용하여 계산격자와 인접한 격자를 모두 고려하여 동시에 계산된 흐름율 및 계산격자에서 계산된 생성항을 Eq. (8)에 대입하고, 다음 시간단계에서의 보존변수를 계산한다.

$$U_l^{n+1} = U_l^n - \frac{\Delta t}{A_l} \sum_{k=1}^{N_l} [(F_{l,k}^{n+1/2} \cos\theta_k + G_{l,k}^{n+1/2} \sin\theta_k) w_{l,k} - S_l^{n+1/2}] \qquad (8)$$

여기서 A_l, N_l, $w_{l,k}$은 각각 격자 l의 면적, 경계면의 수, k번째 경계면의 길이를 나타낸다.

3.2 HLLC Riemann 근사해법

HLLC (Harten, Lax and van Leer on Contact) 기법은 2개의 쌍곡선형 방정식으로 이루어진 지배방정식에만 유효한 HLL 기법의 단점을 보완하기 위해 개발되었으며, HLLC Riemann 해의 구조는 파속 S_L 및 S_R 그리고 S_*에 따라 보존변수 U가 네 개의 구간으로 나누어지며, 각 구간에서의 보존변수가 결정되면 HLLC 수치 흐름율은 Eq. (9)를 이용하여 계산할 수 있다.

$$F_{i+1/2}^{HLLC} = \qquad (9)$$

$$\begin{cases} F_L & \text{if} \quad 0 \le S_L \\ F_{*L} = F_L + S_L(U_{*L} - U_L) & \text{if} \quad S_L \le 0 \le S_* \\ F_{*R} = F_R + S_R(U_{*R} - U_R) & \text{if} \quad S_* \le 0 \le S_R \\ F_R & \text{if} \quad 0 \ge S_R \end{cases}$$

파속 S_L , S_R 그리고 S_*의 정확한 계산을 위해 본 연구에서는 팽창파가 존재할 경우의 파속은 두 개의 팽창파 상태로 가정하여 계산하였으며, 충격파가 존재할 경우에는 Toro (2001)가 제안한 새로운 파속은 특성선 속도와 같다고 가정한 방법을 사용하였다. 이에 대한 수식은 Toro (2001) 및 Zia and Banihashemi (2008)를 참고할 수 있다.

3.3 MUSCL 기법

MUSCL 기법은 2차 공간정확도를 위하여, 계산 이전에 인접격자 자료를 사용하여 계산격자 경계면에서의 보존변수를 재구성하고, 시간정확도를 위해 $0.5\triangle t$ 시점에서 흐름율을 예측하는 기법이다. 일반적으로 Eq. (10)과 같이 선형 함수를 이용하여 재구성되는 값의 경사를 계산하고 나서, Eq. (11)을 이용하여 경계면의 보존변수를 외삽하여 재구성한다.

$$\triangle_i = \frac{1}{2}(U_i^n - U_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(U_{i+1}^n - U_i^n) \qquad (10)$$

$$U_{i-1/2}^R = U_i^n + \Delta_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$U_{i+1/2}^L = U_i^n + \Delta_i(x_{i+1} - x_i) \qquad (11)$$

재구성된 자료는 시간에 대하여 2차 정확도를 가지기 위하여 $0.5\triangle t$ 시점의 값을 예측되는 과정이 필요하며, 이 과정은 Eq. (12)와 같다. 자료의 재구성과 $0.5\triangle t$ 시점의 예측을 마치면, 경계면에서는$U_{i-1/2}^{R*}$과 $U_{i+1/2}^{L*}$의 새로운 Riemann 문제가 성립되며, HLLC Riemann의 근사해법을 사용하여 경계면에서의 흐름율을 Eq. (13)으로 계산한다.

$$U_{i-1/2}^{R*} = U_{i-1/2}^R + \frac{\triangle t}{2\triangle x}\left[F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L)\right] \qquad (12a)$$

$$U_{i+1/2}^{L*} = U_{i+1/2}^L + \frac{\triangle t}{2\triangle x}\left[F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L)\right] \qquad (12b)$$

$$F_{i+1/2}^{MUSCL} = F(U_{i-1/2}^{R*},\ U_{i+1/2}^{L*}) \qquad (13)$$

3.4 수면경사법

Zhou *et al.* (2001)은 하상경사가 있는 경우, 격자 중심의 수심에 의한 경사가 실제 수심의 경사를 반영하지 못하기 때문에 경계면에서의 수심을 정확히 재구성할 수 없는 수심경사법 문제점을 해결하기 위하여, 수심

대신 수위로 보존변수를 재구성하는 수면경사법(SGM)을 제안하였다. 본 연구에서는 하상경사의 효율적인 처리를 위해 수면경사법을 MUSCL 기법과 연계하여 개발모형의 정확성 및 적용성을 향상시켰다. 격자내부 수위의 재구성은 각 구간에서 선형방정식이 사용되므로 Eq. (14)와 같이 계산되고, $\delta\eta_i$는 수면경사로 Eq. (15)에 의해서 계산된다.

$$\eta = \eta_i + (x - x_i)\,\delta\eta_i \tag{14}$$

$$\delta\eta_i = G\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{x_{i+1}-x_i}, \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) \tag{15}$$

여기서 η는 수위, G는 수치진동의 발생을 피하기 위한 경사 제한자로, 재구성된 자료가 기존 자료의 값을 넘지 않도록 제한하기 위해 사용된다. 본 연구에서는 경사제한자로 Eq. (16)과 같은 Superbee 제한자를 사용하였다. 인접 두 격자의 경계면 $(i-1/2)$의 왼편(L)과 오른편(R)의 재구성된 수위는 Eq. (17)과 같고, 재구성된 수심은 Eq. (18)과 같다.

$$G(a,b) = s\ \max[0, \min(2|b|, sa), \min(|b|, 2sa)] \quad s = sgn(b) \tag{16}$$

$$\eta^L_{i-1/2} = \eta_{i-1} + 0.5\triangle x_{i-1}\delta\eta_{i-1}, \quad \eta^R_{i-1/2} = \eta_i - 0.5\triangle x_i \delta\eta_i \tag{17}$$

$$h^L_{i-1/2} = \eta^L_{i-1/2} - z_{i-1/2},\ h^R_{i-1/2} = \eta^R_{i-1/2} - z_{i-1/2} \tag{18}$$

여기서 $z_{i-1/2}$는 격자 경계면에서의 하상고이다. 재구성된 경계면 좌・우의 수심 조건으로부터 Riemann 해법을 사용하여 경계면에서의 흐름율을 계산한다.

3.5 생성항의 처리

3.5.1 하상경사

불규칙한 하상 변화를 가진 지형에서 천수방정식을 해석하기 위한 수치모형을 개발하는데 있어서 적절한 생성항의 수치 처리는 정확한 계산을 위해서 매우 중요하다. 본 연구에서는 생성항에 대한 2차정확도 및 unsplit 기법의 적용을 위해 생성항의 x, y성분인 S_x, S_y에 대해서 각각 Eq. (19)를 적용하였다.

$$S_x = \iint_V S_x\,dA = \iint_V gh(S_{ox} - S_{fx})\,dA = \iint_V -gh\left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + S_{fx}\right)dA \tag{19a}$$

$$S_y = \iint_V S_y\,dA = \iint_V gh(S_{oy} - S_{fy})\,dA = \iint_V -gh\left(\frac{\partial z_b}{\partial y} + S_{fy}\right)dA \tag{19b}$$

본 연구에서는 Eq. (19)의 하상경사의 처리를 위해 Hu *et al.* (1998), Guo *et al.* (2007)이 적용한 발산정리를 이용하여 계산격자에서의 x 및 y방향에 대한 하상경사를 Eq. (20)으로 계산하였다.

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{(z_{b4}-z_{b2})(y_1-y_3)-(z_{b1}-z_{b3})(y_4-y_2)}{(x_4-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_4-y_2)} \tag{20a}$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial y} = \frac{(z_{b4}-z_{b2})(x_1-x_3)-(z_{b1}-z_{b3})(x_4-x_2)}{(y_4-y_2)(x_1-x_3)-(y_1-y_3)(x_4-x_2)} \tag{20b}$$

여기서 아래첨자 1, 2, 3, 4는 계산격자를 구성하고 있는 절점의 순서를 나타내며, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$는 계산격자와 인접한 격자의 순서를 나타낸다(Fig. 3).

Fig. 3. Computational Order of Bed Slope

수치모형은 흐름이 정지상태인 $h \equiv H$, $u \equiv 0$ 그리고 $v \equiv 0$와 같은 조건에서 정확해에 가까운 계산을 할 수 있어야 보존특성을 만족한다고 할 수 있다(Zhou *et al.*, 2001). 본 연구에서 적용한 흐름율 계산기법과 하상경사항의 수치처리가 C-property 조건을 만족하는지 검토해보면, Fig. 3에서 정형격자를 unsplit 기법에 적용했을 경우, $z_{b1} = z_{b4} = z_{bi+1/2,j}$, $z_{b2} = z_{b3} = z_{bi-1/2,j}$, $x_4 = x_1 = x_{i+1/2,j}$, $x_2 = x_3 = x_{i-1/2,j}$, $y_1 = y_2 = y_{i,j+1/2}$, $y_3 = y_4 = y_{i,j-1/2}$가 성립되어, Zhou *et al.* (2001)이 하상경사항를 중앙차분법으로 이산화하고, 수면경사법을 적

용한 기법과 같은 형태가 되므로, 예측단계 및 수정단계에서 흐름율과 생성항 사이의 균형이 이루어짐을 알 수 있다. C-property에 대한 증명은 Zhou *et al.* (2001)을 참고할 수 있다.

3.5.2 마찰경사

유한체적 내의 마찰경사로 인한 생성항을 정확히 해석하는 것은 매우 어렵다. 그러나 모든 조건의 정상상태에 대해서 생성항과 흐름율의 정확한 균형을 맞추기 위해서는 마찰경사항에 대한 고려를 반드시 해야 한다. 따라서, 본 연구에서는 하도폭이 수심보다 매우 큰 광폭하도라는 가정을 Manning 식을 적용하여 유도된 Eq. (21)을 이용하여 마찰경사항을 처리하였다.

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}}, \; S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} \tag{21}$$

4. 모형의 검증

정확해가 존재하고 하상경사가 없는 1차원 하도에 대한 댐 붕괴 흐름에 적용하여 개발모형에 적용된 흐름율 계산기법의 정확성을 검증 하였으며, 해석해가 존재하는 다양한 수치실험에 적용하여 흐름율과 생성항의 균형을 검증하였다. 그리고 단면 확대/축소 구간 및 하상경사가 존재하는 2차원 실험하도에 적용하여 개발모형의 적용성을 검증하였다.

4.1 흐름율 계산 기법의 정확성 검증

본 연구에서 적용한 흐름율 계산기법의 정확성을 검증하기 위하여 Table 1과 같이 개발모형을 두 가지의 경우에 대해 적용하였다. 두 경우 모두 길이 50 m의 직선 수평하도를 격자간격 0.1 m의 직사각형 격자로 구성하였다. 초기조건은 댐 붕괴 조건과 같이 불연속수위/

Table 1. Initial Condition for Two Cases

case	$h_L(m)$	$u_L(m/s)$	$h_R(m)$	$u_R(m/s)$	$x_0(m)$	$t_{out}(s)$
1	1.0	-5.0	1.0	5.0	25.0	2.5
2	1.0	0.0	0.0	0.0	20.0	4.0

(a) HLLC (b) MUSCL-HLLC

Fig. 4. Comparison of Water Level between HLLC and MUSCL (Case 1)

(b) HLLC (b) MUSCL-HLLC

Fig. 5. Comparison of Water Level between HLLC and MUSCL (Case 2)

유속 조건으로 구성하였고, 정확해가 존재하는 경우이다. h는 수위, u는 유속, x_0는 초기 불연속 수위 지점이고, t_{out}은 계산된 결과의 출력 시점이다. Test 1은 반대 방향으로 전파되는 두개의 팽창파가 존재하는 경우로 개발된 모형이 매우 얕은 수심을 잘 계산할 수 있는지를 평가할 수 있으며, Test 2는 개발된 수치모형이 마른 하도로의 전파를 해석할 수 있는가를 평가할 수 있다.

MUSCL 기법은 흐름변수인 수심과 유속의 경사를 이용하는 방법으로 마른하도에 적용하기 위해서는 비물리적인 음의 수심이 발생하지 않도록 하기 위한 수치처리가 필요하므로, 본 연구에서는 초기상태가 마른 하도 조건일 경우 및 계산과정 중 수치오차로 발생된 마른 하도 조건의 경우 그리고 음의 수심이 발생하는 경우에 대해 임의적으로 0의 수심과 유속을 지정하여 계산하였다. 2차정확도 계산에서 나타날 수 있는 수치진동을 제어하기 위하여 Superbee 제한자를 사용하였으며, 흐름율 계산 기법을 적용한 수치모의 결과를 Fig. 4 and 5에 나타내었다. 1차정확도인 HLLC 기법은 정확해와 약간의 오차를 보이나, 2차정확도인 MUSCL 기법은 정확해와 잘 일치하는 결과를 나타내므로, 본 연구에 적용한 흐름율 계산기법의 정확성을 입증할 수 있었다.

4.2 흐름상태에 따른 정상상태 수렴 검증

정수중인 초기조건에서 경계조건의 변화로 흐름 상태는 변하게 된다. 그러나 경계조건이 일정하게 유지된다면 흐름은 정상상태가 되며, 이러한 정상상태 수렴을 모의하는 것은 수치모형의 정확도를 검증하는 일반적인 방법이다.

본 연구에서는 정상상태의 수렴검증을 위하여 해석해가 존재하는 타원형의 하상융기가 있는 하도에 모형을 적용하였다. 적용하도는 길이 25 m, 폭 1 m이고, 마찰이 없으며 하상경사가 Eq. (22)와 같은 직사각형 하도이다. Goutal and Maurel (1997)은 흐름이 상류상태, 도수가 없는 천이류 상태 그리고 도수가 발생하는 천이류 상태의 세가지 흐름상태에 따른 실험조건을 제시하고, 모든 경우의 초기조건은 부여된 하류부 경계조건의 수위와 동일하게 지정하고, 유량은 0으로 지정하였다. 해석해는 Bernoulli 방정식을 이용하여 계산할 수 있고, 도수 발생 지점은 Rankine-Hugoniot 관계를 이용하여 찾을 수 있다.

$$z_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leqq 8m \\ 0.2 - 0.05(x-10)^2 & \text{if} \quad 8 < x < 12m \\ 0 & \text{if} \quad x \geqq 12m \end{cases} \tag{22}$$

4.2.1 상류 흐름이 발생하는 조건

경계조건으로 2 m의 수위를 하류단에 지정하고, 상류단에는 4.42 m^3/s의 일정 유량을 지정함으로서 흐름영역은 상류로만 구성된다. Δx=0.25 m로 하여 100개의 격자를 구성하였으며, 모형의 안정성을 고려하여 Courant 수는 0.9, 모의시간은 360초로 하였다. 계산시간 360초 후에 수렴된 수위, Froude 수 그리고 단위폭당 유량을 Fig. 6에 나타내었다.

(a) Water Level

(b) Froude Number

(c) Unit Discharge

Fig. 6. Steady Subcritical Flow over a Hump

(a) Water Level

(b) Froude Number

(c) Unit Discharge

Fig. 7. Steady Transcritical Flow over a Hump without a Hydraulic Jump

(a) Water Level

(b) Froude Number

(c) Unit Discharge

Fig. 8. Steady Transcritical Flow over a Hump with a Hydraulic Jump

4.2.2 도수없이 천이흐름이 발생하는 조건

경계조건으로 0.406 m의 수위를 하류단에 지정하고, 상류단에는 1.53 m^3/s 유량을 지정하였다. 이 경우, 융기된 하상을 넘어서면서 사류가 발생한다. 360초 후에 수렴된 수위, Froude 수 그리고 단위폭당 유량을 Fig. 7에 나타내었다.

4.2.3 도수가 발생하는 천이흐름 조건

경계조건으로 0.33 m의 수위를 하류단에 지정하고, 상류단에는 0.18 m^3/s의 유량을 지정하였다. 이 경우, 융기된 하상의 역경사부에서 도수가 발생한다. 도수가 발생할 경우 계산격자의 개수에 따른 정확도를 알아보기 위해, 격자의 개수가 100개 및 200개인 경우에 대

해 모의를 수행하고 결과를 비교하였다. 360초 후에 수렴된 수위, Froude 수 그리고 단위폭당 유량은 Fig. 8과 같다.

세 경우 모두 수위, Froude 수, 그리고 유량의 해석해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 개발모형에 적용된 unsplit 기법 및 생성항 처리기법이 Riemann 근사해법으로 계산된 흐름율과 수치적 균형이 잘 이루고 있음을 알 수 있다. 다만 도수가 발생하는 천이조건에서 격자의 수를 100개로 하여 계산하였을 경우 도수지점의 유량이 정상상태를 만족하지 못하고 있으나, 격자의 수를 200개로 계산하였을 경우에는 해석해와 매우 일치하는 정상상태를 만족하는 결과를 얻을 수 있었다. Valiani and Begnudelli (2006)는 격자의 수를 2000개까지 세분화 한다면 수치해는 해석해와의 거의 일치하는 결과를 얻을수 있다고 하였으며, 이는 도수와 같이 급격한 흐름변화를 정확히 모의하기 위해서는 매우 세밀한 정보가 필요함을 의미한다.

4.3 2차원 댐 붕괴 해석

단면의 확대 및 축소 구간이 있고, 하상경사가 존재하는 하도에 대한 2차원 댐 붕괴파 흐름을 모의하였다. 댐 붕괴 실험 및 단면에 대한 세부적인 정보는 Aureli *et al.* (2000), Macchione and Moreli (2003) 그리고 Guo *et al.* (2007)을 참고하였다. Figs. 9 and 10은 각각 실험하도에 대한 평면도와 정면도를 나타내고 있으며, Fig. 10에서 볼 수 있듯이, 초기조건으로 저수지의 수위는 0.3 m, 하도부분의 수위는 0.18 m를 적용하였으며, 경계조건으로는 상류단은 닫힌 경계조건, 하류단은 자유유출 경계조건을 적용하여 모의를 수행하였다. 초기에 하도부분의 수위 0.18 m를 유지하기 위해 하류단에 약 1 %의 경사로 보가 설치되어 있으며, 실험과 동일한 조건으로 모의하기 위해 하류단에 보의 영향을 고려하였다. 단면은 Δx=0.2 m, Δy =0.03 m로 하여 1150개의 비정형 사각형 격자로 구성하였고, Manning 조도계수는 0.014, 전체 계산시간은 댐 붕괴후 30초, CFL은 0.9를 사용하여 모의를 수행하였다.

Table 2. Locations of Observed and Computed Stations

Location	Observed		Computed	
	$x(m)$	$y(m)$	$x(m)$	$y(m)$
O1	1.00	0.15	1.10	0.135
O2	6.00	0.15	6.10	0.135

실측지점 O1 및 O2에서의 실측수심과 개발모형의 계산수심 그리고 TVD-MacCormack 기법을 적용한 Aureli *et al.* (2000)의 계산수심과 비교하여 Fig. 11에 나타내었다. 유한체적모형의 모의결과는 해당 절점에서 결과를 보여주는 것이 아니라 격자의 중심에 나타나므로, O1 및 O2의 정확한 실측지점에서의 모의결과는 표현할 수 없어, O1 및 O2 지점과 가장 인근에 위치한 격자에서의 계산수심과 실측수심을 비교하였다. Table 2에 실측지점 O1, O2의 좌표 및 개발모형의 결과를 출력한 지점에 대한 좌표를 나타내었다. 실측지점과 동일한 위치가 아닌 가장 인접한 지점에 대한 계산결과와의 비교라는 점을 고려한다면, 계산된 수심은 실측치와 비교적 잘 일치하는 결과를 보여준다고 할 수 있다. 그리고 모의결과의 수렴성과 계산결과의 정확도에 대한 정량적인 확인을 위해 Eq. (23)과 같은 L_1, L_2, L_∞ 오차를 계산하여 Table 3에 나타내었다.

$$L_1 \text{ 오차} : \|e\|_{L_1} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\psi_{\max}}\sum_{i=1}^{m}|e_{i,j}|\right) \tag{23a}$$

$$L_2 \text{ 오차} : \|e\|_{L_2} = \left[\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\psi_{\max}^2}\sum_{i=1}^{m}|e_{i,j}|^2\right)\right]^{1/2} \tag{23b}$$

$$L_\infty \text{ 오차} : \|e\|_{L_\infty} = \frac{1}{\psi_{\max}} max|e_{i,j}| \tag{23c}$$

여기서 e는 근사치 ψ와 정확치 $\hat{\psi}$의 차이 $(e_{i,j} = \psi_{i,j} - \widehat{\psi_{i,j}})$, m은 자료수, $\psi_{\max}$는 ψ_i의 최대값을 나타낸다.

Fig. 9. Plane-viewed Geometry

Fig. 10. Layout along the Central Line

Table 3. Comparison of L_1, L_2 and L_3 Error

Observed stations	L_1 error		L_2 error		L_∞ error	
	This study	Aureli *et al.*	This study	Aureli *et al.*	This study	Aureli *et al.*
O1	3.94×10^{-2}	4.92×10^{-2}	1.99×10^{-3}	3.96×10^{-3}	1.24×10^{-1}	1.66×10^{-1}
O2	5.76×10^{-2}	3.75×10^{-1}	9.63×10^{-3}	6.51×10^{-2}	4.76×10^{-1}	5.61×10^{-1}

(a) O1 (b) O2

Fig. 11. Comparison of the Measured and Simulated Results

5. 결 론

본 연구에서는 천이류, 불연속류 및 마른하도 흐름 해석을 위한 Riemann 해법을 이용한 고정확도 2차원 유한체적모형을 개발하였다. 개발모형을 해석해가 존재하는 1차원 가상하도 및 실험자료가 존재하는 2차원 실험하도에 적용하여 모형의 보존특성 및 정확성과 안정성을 검증하였다. 본 연구를 통하여 얻은 주요 결론은 다음과 같다.

(1) 본 연구에서는 비구조적 격자의 적용이 용이한 unsplit 기법을 적용하여 계산격자의 흐름율 및 생성항을 계산하였으며, MUSCL 기법과 연계한 HLLC 흐름율 계산기법을 충격파가 발생하거나 마른하도에서의 해석이 요구되는 불연속적인 초기조건의 문제에 적용하여 흐름율 계산의 정확성을 검증하였다.

(2) 하상경사항은 unsplit 기법의 적용을 위해 발산정리를 이용하여 이산화한 형태를 적용하고, 생성항과 흐름율과의 수치적 균형을 위해 수면경사법을 MUSCL 기법과 연계하여 적용한 생성항 처리기법과 흐름율과의 균형을 수학적으로 증명하여 보존특성을 만족함을 보였다.

(3) 개발모형을 해석해가 존재하는 흐름상태에 따른 정상상태 수렴성 여부를 검증하기 위해 적용한 모의에서, 비물리적인 수치진동의 발생 없이 해석해와 거의 일치하는 합리적인 결과를 얻을 수 있었으며, 단면 및 하상이 변화하는 2차원 실험하도에 대한 댐 붕괴파 해석에서도 실험치와 비교적 잘 일치하는 결과를 보여주어 모형의 적용성을 검증하였다.

(4) 본 연구에서 적용한 unsplit 기법 및 생성항 처리기법은 비구조적 격자의 적용에 제약이 없어, 향후 단면의 변화가 심한 복잡한 지형 및 혼합격자의 적용을 위한 연구에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행한 건설기술혁신사업(08기술혁신F01)에 의한 차세대홍수방어기술개발연구단의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

김대홍, 조용식 (2005). "불규칙 지형에 적용가능한 쌍곡선형 천수방정식을 위한 개선표면경사법." **대한토목학회 논문집**, 제25권, 제3B호, pp. 223-229.

김우구, 정관수, 김재한 (2003). "WAF 기법을 이용한 천수방정식 해석." **한국수자원학회 논문집**, 제36권, 제5호, pp. 777-785.

김지성, 한건연 (2008). "Riemann 해법을 이용한 1차원

개수로 수리해석 I : 모형개발." **한국수자원학회 논문집**, 제41권, 제8호, pp. 761-772.
윤태훈, 강석구, 이지송 (2002). "본류 수위 급상승에 의한 지류 역류 해석." **대한토목학회 논문집**, 제22권, 제 1-B호, pp. 33-41.
이길성, 이성태 (1998). "충격파 모의를 위한 2차원 유한체적 비정상 흐름모형." **한국수자원학회 논문집**, 제31권 제3호, pp. 279-290.
Aureli, F., Mignosa, P., Tomirotti, M. (2000). "Numerical simulation and experimental verification of Dam-Break flows with shocks." *Journal of hydraulic research*, IAHR, Vol. 38, No. 3, pp. 197-206.
Bae, Y.H., and Cho, Y.S. (2005). "Numerical Analysis of Discontinuous Flows with Finite Volume Method." *KSCE Journal of Civil Engineering*, KSCE, Vol. 9, No. 5, pp. 439-445.
Bermudez, A., and Vazquez, M.E. (1994). "Upwind method for hyperbolic conservation laws with source terms." *Computers & Fluids*, Vol. 23, No. 8, pp. 10491-1071.
Fraccarollo, L., and Toro, E.F. (1995). "Experimental and Numerical Assessment of the Shallow Water Model for Two-dimensional Dam-Break Type Problems." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Vol. 33, No. 6, pp. 843-864.
Goutal, N. and Maurel, F. (1997). Proceedings of the 2nd workshop on dam break wave simulation, HE43/97/016/ Harten, A. (1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No.3, pp. 357-393.
Guo, W.D., Lai, J.S., and Lin, G.F. (2007) "Hybrid flux-splitting Finite-volume schemes for shallow-water flow simulations with source terms." *Journal of Mechanics*, Vol. 23, No. 4, pp. 399-414.
Hu, K., Mingham, C.G., and Causon, D.M. (1998). "A Bore-Capturing Finite Volume Method for Open-Channel Flows." *International Journal for Numerical Method in Fluids*, Vol. 28, No. 8, pp. 1241-1261.
Kim, D.H., Cho, Y.S., and Kim, W.G. (2004). "Weighted Averaged Flux-Type Scheme for Shallow-Water Equations with Fractional Step Method." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 130, No. 2, pp. 152-160.
Leveque, R.J. (1998). "Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods : The Quasi-Steady Wave-Propogation Algorithm." *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, No 1, pp. 346-365.
Leveque, R.J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
Macchione, F., and Morelli, M.A. (2003). "Practical Aspects in Comparing Shock-Capturing Schemes for Dam Break Problems." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 129, No. 3, pp. 187-195.
Toro, E.F. (1999). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany.
Toro, E.F. (2001). *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
Valiani, A., and Begnudelli, L. (2002). "Divergence form for bed slope source term in shallow water equations." *Journal of Hydraulic Engineering,* ASCE, Vol. 132, No. 7, pp. 652-665.
Vazquez-Cendon, M.E. (1999). "Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry." *Journal of Computational Physics,* Vol. 148, No. 2, pp. 497-526.
Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G., and Ingram, D.M. (2001). "The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations." *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, No. 1, pp. 1-25.
Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G., and Ingram, D.M. (2004). "Numerical Prediction of Dam-Break Flows in General Geometries with Complex Bed Topography." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 130, No. 4, pp. 332-340.
Zia, A., and Banihashemi, M.A. (2008) "Simple efficient algorithm (SEA) for shallow flows with shock wave on dry and irregular beds." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 56, No. 11, pp. 2021-2043.

논문번호: 09-045	접수: 2009.04.14
수정일자: 2009.08.17/10.12	심사완료: 2009.10.12