

밀폐된 용기 안에서 동시에 회전하는 디스크의 진동과 안정성에 관한 연구

Vibrations and Stability of Flexible Corotating Disks in an Enclosure

강 남 철*

Namcheol Kang

(2008년 10월 23일 접수 ; 2008년 12월 11일 심사완료)

Key Words : Rotating Disk(회전 원판), Corotating Disks(동방향 회전 원판), Flutter(플러터), Acoustic-structure Interaction(음향-구조 상호작용), Mode Coalescence(모드 합체)

ABSTRACT

The vibration and stability of thin, flexible corotating disks in an enclosed compressible fluid is investigated analytically and compared with the results of a single rotating disk. The discretized dynamical system of the corotating disks is derived in the compact form of a classical gyroscopic system similar with a single disk. For the undamped system, coupled structure-acoustic traveling waves destabilize through mode coalescence leading to flutter instability. However, it is found that the flutter regions of the corotating disks are wider than those of a single disk. A detailed investigation of the effects of dissipation arising from acoustic or disk damping is also performed. Finally, in the presence of both acoustic and disk dampings, the instability regions are found and compared with those of a single disk. Although this study does not allow a radial clearance between the disk and the enclosure, the computational frame work of the problem can be expanded to the system having the radial clearance in an enclosure.

1. 서 론

컴퓨터 하드디스크(hard disk drive), DVD/CD-ROM, 유체기계(turbomachinery) 등과 같이 고속으로 회전하는 원판에 있어서 기계 주위 유체의 떨림 등 유동장과 연성된 원판의 진동은 계의 안정성 문제를 해석하는데 중요한 역할을 하게 된다. 특히, 최근의 저장장치는 데이터 입출력 시간을 줄이기 위하여 더욱 빠른 회전속도를 요구하는 반면, 저장 용량의 증대를 위하여 더욱 작은 면적에 기록을 하기 때문에 진동의 저감이나 계의 안정성 확보는 필수 불가결한 문제이다.

이 연구에서는 밀폐된 공간에서 동시에 회전하는 원판의 진동을 해석적인 방법으로 구하여 계의 안정성을 구하고자 한다(Fig. 1 참조). 이때, 원판의 진동은 주위의 유체(공기)와 연성되어 있기 때문에 구조-음향의 연성 문제를 해석하는 방법이 필요하다.

밀폐된 공간에서 회전하는 원판의 공탄성(aero-elastic)적인 안정성 문제는 그 동안 많은 연구가 진행되어 왔다⁽¹⁻⁵⁾. 일부 연구자는 주위 유체를 모델링하기 위하여 임시 방편적인 회전 감쇄 연산자(ad-hoc damping operator)를 사용하였으나⁽⁵⁻⁷⁾, 대부분의 많은 연구에서는 얇은 유막을 가지는 윤활 이론(thin hydrodynamic lubrication theory)을 이용하여 유체와 회전원판의 연성 문제를 해석하였다⁽⁸⁻¹²⁾. 이러한 해석 방법은 플로피 디스크(floppy disk)와 같이 유연한 원판이 낮은 레이놀즈 수

* 교신저자; 정희원, 경북대학교 기계공학부
E-mail : nckang@knu.ac.kr
Tel : (053)950-7545, Fax : (053)950-6550

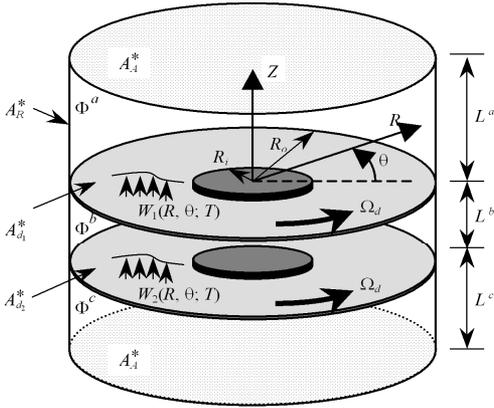


Fig. 1 A schematic diagram of the rotating disk in an enclosed compressible, inviscid fluid

(Reynolds number)를 가지는 유동장 주위에서 회전하는 경우에는 적합하지만, HDD, DVD/CD-Rom과 같이 고속으로 회전하는 원판의 경우에는 적합하지 않다. 후자의 경우는 원판이 상대적으로 뻣뻣하고 (stiff), 주위 유동장은 높은 레이놀즈 수를 가지며 에커만 경계층(Ekman boundary layer)이 밀폐된 공간의 크기에 비하여 매우 작게 된다. 더 나아가, 밀폐된 공간에 존재 있는 음향 모드(mode)가 원판의 진동과 연성하여 계의 안정성에 영향을 미치게 된다. 따라서 이 연구에서는 유체의 흐름을 압축성 포텐셜 유동(compressible potential flow)으로 가정하여 해석하고자 한다.

이 연구는 밀폐된 공간에서 회전하는 원판의 안정성을 해석한 연구⁽¹³⁾를 토대로, 동일한 방향으로 동시에 회전하는 두 개의 원판과 주위 유동장의 연성 문제를 해석하여 비교하였다. 원판과 유동장을 지배하는 운동방정식을 이산화(discretization)하여 일반적인 형태의 행렬방정식으로 유도하여 고유치 해석을 수행하였으며, 원판과 음향 감쇄에 따른 안정성 영역을 한 개의 회전원판 해석 결과와 비교하여 검토하였다.

2. 지배방정식

밀폐된 공간에서 속도 Ω_d 로 회전하는 두 개의 원판은 내경 R_i 에 고정되어있으며, 외경 R_o 에서는 자유단 경계 조건을 가진다. 두께 H , 밀도 ρ_d 인 회전 원판은 Kirchhoff 판(plate)으로 가정하고, 영 계수

(Young's modulus) E , 푸아송 비(Poisson's ratio) ν 의 물성치를 가진다. 이때, 유체로 둘러싸인 공간에서 회전하는 원판은 윗면과 밑면의 공력(aero-dynamic)에 의한 압력 차이에 의하여 외력 Q 를 받게 되며, 다음과 같은 운동방정식에 지배된다^(4,12).

$$\rho_d H (W_{,TT} + 2\Omega_d W_{,T0} + \Omega_d^2 W_{,00}) + C [W_{,T} + \Omega W_{,0}] + D \nabla^4 W - \frac{H}{R} (R\sigma_r^* W_{,R})_{,R} - \frac{H}{R^2} (\sigma_\theta^* W_{,\theta})_{,\theta} = Q \quad (1)$$

여기서, $D = EH^3/12(1-\nu^2)$ 로써 원판의 굽힘 강성 (flexural rigidity), ∇^4 은 biharmonic 연산자를 나타내며, 아래 첨자 콤마는 각 변수에 따른 편미분을 의미한다. 이때, 반경방향과 원주방향 응력 σ_r^* , σ_θ^* 은 면 응력(plane stress) 이론으로부터 구할 수 있다⁽¹⁴⁾. 또한, 양의 정부호 연산자(positive definite operator) $C[\cdot] = \eta^* D \nabla^4$ 는 원판의 감쇄를 나타내며, 여기서, η^* 는 점탄성 계수(viscoelastic coefficient)를 의미한다⁽⁴⁾.

밀도 ρ_f 의 비점성 압축성 무와동 유체(inviscid compressible irrotational fluid)의 지배방정식은 다음과 같은 파동 방정식으로 표현된다.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_o^2} \Phi_{,TT} \quad (2)$$

여기서, Φ 는 속도 포텐셜(velocity potential)이며, 유체의 압력과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$P = -\rho_f \Phi_{,T} \quad (3)$$

따라서,

$$Q = \rho_f \Phi_{,T}^a - \rho_f \Phi_{,T}^b |_{Z=0} \equiv \rho_f [[\Phi_{,T}]]_{Z=0} \quad (4)$$

여기서, 위첨자 a, b 는 밀폐된 공간의 위쪽과 아래쪽의 음향공동(acoustic cavity)을 의미한다.

이제 다음과 같은 무차원 변수(nondimensional variables)를 도입하면

$$r = \frac{R}{R_o}, \quad z = \frac{Z}{R_o}, \quad \kappa = \frac{R_i}{R_o}, \quad w = \frac{W}{H}, \quad l^{a,b,c} = \frac{L^{a,b,c}}{R_o}$$

$$t = \frac{T}{T_o}, \quad \Omega = \Omega_d T_o, \quad T_o = \sqrt{\frac{\rho_d R_o^4 H}{D}}$$

$$\eta = \frac{\eta^*}{T_o}, \quad \sigma_r = \frac{T_o^2}{\rho_d R_o^2} \sigma_r^* \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{T_o^2}{\rho_d R_o^2} \sigma_\theta^*, \quad \phi = \frac{T_o}{R_o H} \Phi$$

밀폐된 공간에서 회전하는 원판과 음향 진동의 연성 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_{,tt} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta} + C_d[w_{,t} + \Omega w_{,\theta}] + \mathbf{K}_d[w] = \Lambda[[\phi_{,r}]]_{z=0} \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{C^2} \phi_{,tt} \quad (7)$$

여기서,

$$\mathbf{K}_d[w] = \nabla^4 w - \frac{1}{r} (r \sigma_r w_{,r})_{,r} - \frac{1}{r^2} \sigma_\theta w_{,\theta\theta}$$

$$C_d[w_{,t} + \Omega w_{,\theta}] = \nabla^4 w_{,t} + \Omega \nabla^4 w_{,\theta}$$

이때, $\mathbf{K}_d[\cdot]$ 는 자기수반(self-adjoint) 양의 정부호 연산자(positive definite operator)로써 막 응력(membrane stiffness)을 포함한다. 또한, 고정 좌표 계에서의 $C_d[w_{,t} + \Omega w_{,\theta}]$ 는 감쇠(damping)와 순환 항(circulatory term)을 포함한다. 그리고, 무차원 상수 Λ , C 는 유체의 밀도와 속도비를 의미하며 다음과 같이 유도된다. 즉,

$$\Lambda = \frac{\rho_f R_o}{\rho_d H} \quad (8)$$

$$C = \frac{c_o}{c_b} = \frac{c_o}{R_o/T_o} = \frac{c_o}{\sqrt{D/\rho_d R_o^2 H}}$$

내경에서 고정되어 있고 외경에서는 자유단으로 구성된 회전원판의 경계조건식은 이미 잘 알려져 있으며⁽³⁾, 밀폐된 공간의 유동장은 세 개의 영역으로 구분 된다. 즉, 강체의 외벽으로 둘러싸인 부분(A_R)과 원판과 접촉하는 부분(A_d), 그리고 음향 공동의 위와 아래쪽에 위치하는 흡음면(absorbent wall)과 만나는 부분(A_A)으로 구성된다. 따라서, 세 개의 음향 공동의 경계 조건은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla \phi^a \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \text{on } A_R \\ -\dot{w}_1 & \text{on } A_{d_1} \\ -\dot{\phi}^a / z_A & \text{on } A_A \end{cases}$$

$$\nabla \phi^b \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \text{on } A_R \\ \dot{w}_1 & \text{on } A_{d_1} \\ -\dot{w}_2 & \text{on } A_{d_2} \end{cases} \quad (9)$$

$$\nabla \phi^c \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \text{on } A_R \\ \dot{w}_2 & \text{on } A_{d_2} \\ -\dot{\phi}^c / z_A & \text{on } A_A \end{cases}$$

여기서, 위쪽 원판의 속도(\dot{w}_1)는 음향 공동(ϕ^a , ϕ^b)이 접촉하는 부분의 속도와 일치하며, 아래쪽 원판의 속도(\dot{w}_2)는 음향 공동(ϕ^b , ϕ^c)이 접촉하는 부분의 속도와 일치하게 된다. 이때, 흡음면의 물리적 특성은 임피던스(impedance) z_A^* 로 모델링되며⁽¹⁵⁾, $z_A = T_o z_A^* / \rho_f R_o$ 로 무차원화 되었다.

3. 이산화

원판과 음향공동 속도 포텐셜의 진동에 관한 편미분 연성방정식 식 (6), (7)과 클램프된 원판의 경계조건, 음향 경계조건 식 (9)을 모두 만족시키는 해를 구하기 위하여, 이 연구에서는 구조-음향 연성 해석에서 즐겨 사용되는 이산화 방법을 사용 하였다. 먼저 비연성된 공동의 음향 모드는 아래의 식을 만족시킨다.

$$\nabla^2 F_n^{a,b,c} + \frac{\Lambda_n^2}{C^2} F_n^{a,b,c} = 0 \quad \text{with} \quad \nabla F_n^{a,b,c} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (10)$$

여기서, Λ_n 은 n 차 음향 고유진동수를 나타내며, F_n 은 그때의 음향 모드를 나타낸다. 여기서 위쪽 음향 공동에 대하여 Green's theorem을 이용하면⁽¹⁵⁻¹⁷⁾,

$$\iiint_{V^a} (F_n^a \nabla^2 \phi^a - \phi^a \nabla^2 F_n^a) dV = \iint_A (F_n^a \nabla \phi^a \cdot \mathbf{n} - \phi^a \nabla F_n^a \cdot \mathbf{n}) dA \quad (11)$$

와 같이 되며, 식 (10)과 경계조건 식 (9)를 이용하면 다음과 같이 정리된다. 즉,

$$\frac{1}{C^2} \int_{V^a} [F_n^a \ddot{\phi}^a + (\Lambda_n^a)^2 \phi^a F_n^a] dV + \int_{A_A} F_n^a \frac{\dot{\phi}^a}{z_A} dA = - \int_{A_{d_1}} F_n^a \dot{w}_1 dA \quad (12a)$$

가운데와 아래쪽 음향 공동에 대하여도 마찬가지로 방법을 적용하면 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \int_{V^b} [F_n^b \ddot{\phi}^b + (\Lambda_n^b)^2 \phi^b F_n^b] dV \\ = - \int_{A_{d1}} F_n^b \dot{w}_1 dA + \int_{A_{d2}} F_n^b \dot{w}_2 dA \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \int_{V^b} [F_n^c \ddot{\phi}^c + (\Lambda_n^c)^2 \phi^c F_n^c] dV + \int_{A_A} F_n^c \frac{\dot{\phi}^c}{z_A} dA \\ = \int_{A_{d2}} F_n^c \dot{w}_2 dA \end{aligned} \quad (12c)$$

식 (12)는 식 (7) 음향 방정식의 약형(weak form)이며, 속도 포텐셜과 원판의 수직변위는 각각 비연성 음향 모드와 구조 모드로 이산화 되어 다음과 같이 표현된다.

$$\phi^a(r, \theta, z; t) = \sum_n a_n(t) F_n^a(r, \theta, z) \quad (13a)$$

$$\phi^b(r, \theta, z; t) = \sum_n b_n(t) F_n^b(r, \theta, z) \quad (13b)$$

$$\phi^c(r, \theta, z; t) = \sum_n c_n(t) F_n^c(r, \theta, z) \quad (13c)$$

$$w_1(r, \theta; t) = \sum_m q_{1m}(t) \Psi_m(r, \theta) \quad (14a)$$

$$w_2(r, \theta; t) = \sum_m q_{2m}(t) \Psi_m(r, \theta) \quad (14b)$$

여기서, a_n , b_n , c_n 과 q_{1m} , q_{2m} 는 각각 음향 공동과 원판의 일반화 좌표계(generalized coordinate)를 나타내며, Ψ_m 은 비연성 원판의 구조 모드를 나타낸다⁽¹⁸⁾. 이때, 아래첨자 n 은 음향 모드의 절직경(nodal diameter) n_1 , 절원(nodal circle) n_2 , 그리고 z 방향 노드 번호 n_3 를 표현하는 (n_1, n_2, n_3) 를 대표하며, 아래첨자 m 은 구조 모드의 절직경 m_1 , 절원 m_2 를 표현하는 (m_1, m_2) 를 의미한다. 또한 원판과 음향 공동의 축 대칭 모드는 싸인(sine)과 코싸인(cosine) 모드로 구성되며, 위첨자 S 와 C 로 각각 표시할 수 있다. 이제 식 (13)과 식 (14)를 식 (12)에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 이산화된 음향 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{V^a M_n^a}{C^2} [\ddot{a}_n + (\Lambda_n^a)^2 a_n] + A_A \sum_r \dot{a}_r C_{nr}^a \\ = -A_d \sum_m \dot{q}_{1m} L_{nm}^a \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{V^b M_n^b}{C^2} [\ddot{b}_n + (\Lambda_n^b)^2 b_n] \\ = -A_d \sum_m \dot{q}_{2m} L_{nm}^b + A_d \sum_m \dot{q}_{1m} L_{nm}^b \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \frac{V^c M_n^c}{C^2} [\ddot{c}_n + (\Lambda_n^c)^2 c_n] + A_A \sum_r \dot{c}_r C_{nr}^c \\ = A_d \sum_m \dot{q}_{2m} L_{nm}^c \end{aligned} \quad (15c)$$

이때, 비연성 음향 모드의 직교성(orthogonality)을 이용하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^{a,b,c}} \int_{V^{a,b,c}} F_n^{a,b,c} F_r^{a,b,c} dV = \begin{cases} M_n^{a,b,c} & \text{when } n=r \\ 0 & \text{when } n \neq r \end{cases} \\ \text{where, } V^{a,b,c} = \pi l^{a,b,c} \end{aligned} \quad (16)$$

$$C_{nr}^{a,c} = \frac{1}{A_A} \int_{A_A} F_n^{a,c} F_r^{a,c} / z_A dA \quad (17)$$

$$L_{nm}^{a,b,c} = \frac{1}{A_d} \int_{A_d} F_n^{a,b,c} \Psi_m dA \quad (18)$$

식 (13)과 식 (14)를 식 (6)에 대입하고 Galerkin 방법을 이용하면 다음과 같이 원판의 이산화 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1m}^C(t) + 2m_1 \Omega \dot{q}_{1m}^S(t) + k_m q_{1m}^C(t) + \eta \omega_{ms}^2 (\dot{q}_{1m}^C + m_1 \Omega q_{1m}^S) \\ = \Lambda A_d \left(\sum_n \dot{a}_n^C L_{nm}^{aC} - \sum_n \dot{b}_n^C L_{nm}^{bC} \right) \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1m}^S(t) - 2m_1 \Omega \dot{q}_{1m}^C(t) + k_m q_{1m}^S(t) + \eta \omega_{ms}^2 (\dot{q}_{1m}^S - m_1 \Omega q_{1m}^C) \\ = \Lambda A_d \left(\sum_n \dot{a}_n^S L_{nm}^{aS} - \sum_n \dot{b}_n^S L_{nm}^{bS} \right) \end{aligned} \quad (19b)$$

여기서,

$$k_m = \omega_{ms}^2 - \alpha_m - m_1^2(\Omega^2 - \beta_m)$$

$$\omega_{ms}^2 = \pi \int_{\kappa}^1 (\tilde{V}_r^4 R_m) R_m r dr$$

$$\alpha_m = \pi \int_{\kappa}^1 (r \sigma_r R_m) r R_m dr$$

$$\beta_m = \pi \int_{\kappa}^1 \frac{1}{r} \sigma_0 R_m^2 dr$$

그리고

$$\tilde{V}_r^4 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m_1^2}{r^2} \right)^2$$

또한, 아래쪽 원판의 수직변위 $w_2(r, q, t)$ 를 나타내는 일반 변위 $q_{2m}(t)$ 에 대한 이산화 방정식은 같은 방법으로 구할 수 있다.

이제 식 (15)와 식 (19)를 연립하면 밀폐된 공간에서 회전하는 원판의 연성방정식을 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{20}$$

여기서,

$$\mathbf{x} = [a_n, q_{1m}, b_n, q_{2m}, c_n]^T$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & & & & \\ & \mathbf{M}_{q1} & & & \\ & & \mathbf{M}_b & & \\ & & & \mathbf{M}_{q2} & \\ & & & & \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & & & & \\ & \mathbf{C}_{q1} & & & \\ & & \mathbf{0} & & \\ & & & \mathbf{C}_{q2} & \\ & & & & \mathbf{C}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} & \mathbf{L}_{aq} & & & \\ -\mathbf{L}_{aq1}^T & \mathbf{G}_{q1} & \mathbf{L}_{bq1}^T & & \\ & -\mathbf{L}_{bq1} & & \mathbf{L}_{bq2} & \\ & & & \mathbf{G}_{q2} & \mathbf{L}_{cq2}^T \\ & & & -\mathbf{L}_{cq2} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & & & & \\ & \mathbf{K}_{q1} & & & \\ & & \mathbf{K}_b & & \\ & & & \mathbf{K}_{q2} & \\ & & & & \mathbf{K}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \mathbf{D}_{q1} & & & \\ & & \mathbf{0} & & \\ & & & \mathbf{D}_{q2} & \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Table 1 Disk and acoustic cavity parameters

| Symbols | Values | Descriptions |
|----------|-------------------------|-----------------------|
| R_o | 4.74 cm | Outer radius |
| R_i | 1.56 cm | Inner radius |
| H | 0.79 mm | Disk thickness |
| ρ_d | 2,700 kg/m ³ | Disk density |
| ρ_f | 1.2 kg/m ³ | Air density |
| E | 71 GPa | Young's modulus |
| ν | 0.33 | Poisson's ratio |
| c_o | 343 m/sec | Speed of sound in air |

각 행렬을 구성하는 부분 행렬의 요소는 한 개의 원판이 회전하는 경우와 비슷하게 정의되므로 여기서는 생략하기로 한다⁽¹³⁾. 또한 이 논문에서는 한 개의 원판이 밀폐된 공간에서 회전하는 경우와 비교하기 위하여 동일한 물성치를 가지는 경우에 대하여 해석하였다(Table 1 참조). 단, 음향 공동의 경우 L^a , L^b , L^c 는 모두 동일하게 0.1 cm의 높이를 가지는 경우로 해석하였다.

4. 해석결과

4.1 비감쇄의 경우

이 연구에서는 밀폐된 용기 안에서 동시에 회전하는 원판의 고유진동수를 수치적으로 해석 하였다. 회전 원판의 진동 모드는 식 (20)과 같이 음향 모드와 연성되어 나타나며 감쇄, 자이로스코픽 행렬 (gyroscopic matrix)과 강성(stiffness matrix), 순환 행렬(circulatory matrix) 등으로 구성되는 이산화 방정식의 고유치 해석을 통하여 구할 수 있다. 원판과 음향공동의 절직경 모드는 삼각함수의 직교성 때문에 비연성 되므로, 각 노드에 대한 해석을 증첩하여 표현할 수 있다.

원판과 음향 감쇄가 없는 비감쇄의 경우, 원판과 음향 공동 연성계의 고유치 해석 결과를 원판의 회전 속도에 대하여 Fig. 2에 도시하였다. 한 개의 원판의 회전하는 경우와 비교하여 유사한 결과를 얻을 수 있었다⁽¹³⁾. 그러나 두 개의 원판이 음향 공동과 연성되어 나타나기 때문에, 두 개의 원판에 해당하는 모드 궤적들이 나타난다. 각 절직경의 반향파(reflected traveling wave)가 음향 모드와 만나기 직전 모드일치(mode coalescence) 현상이 발생하며 그 순간 고유치의 실수부가 양이 되어 연성계의 불안정

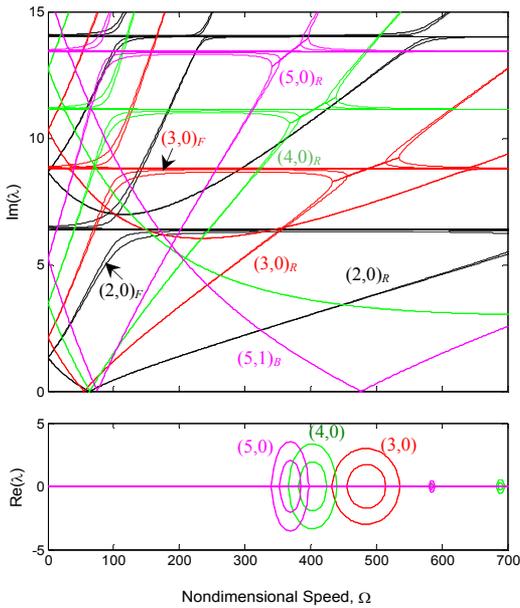


Fig. 2 Eigenvalues of the coupled system with respect to rotating speed

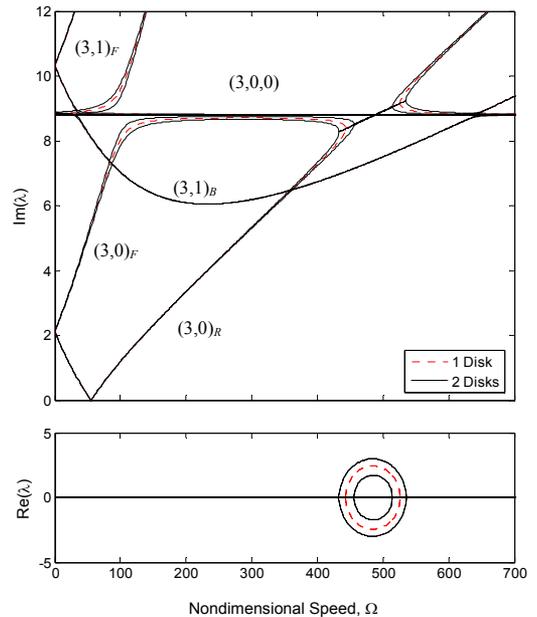


Fig. 3 Eigenvalues of 3 nodal diameter of the coupled system

한 구간이 나타난다.

보다 자세한 검토를 위하여 세 개의 절직경을 가지는 원판과 음향 모드계의 고유치를 Fig. 3에 다시 나타내었다. 한 개의 원판의 경우와 비교하기 위하여 실선은 두 개의 회전원판의 경우를, 점선은 한 개의 회전원판의 경우를 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이, 한 개의 원판의 경우는 고유치가 두 개의 원판의 고유치들 중간에 위치한다. 이러한 현상은 고유치의 실수와 허수부의 경우 동일하게 나타나며, 음향 공동의 높이를 모두 동일하게 적용하였기 때문에 정확히 중간에 위치하는 것으로 판단된다. 만일 음향 공동의 높이가 서로 다를 경우, 원판과 음향모드 사이의 연성되는 양이 다르기 때문에 한쪽으로 근접하여 나타날 수 있다.

한 개의 회전원판의 경우와 또 다른 점은 플러터 속도(flutter speed; 고유치 실수부가 양이 되는 속도) 구간이 두 개의 회전 원판의 경우에 넓게 나타나는 것이다. 즉, 가운데 위치한 음향 공동이 위쪽과 아래쪽에 위치한 원판과 연성되는 양이 커지게 되므로, 더 빨리 모드 일치가 발생하고 더 늦게 분리된다. 따라서, 이에 상응하여 고유치 허수부의 양수 부분이 넓게 분포되며, 넓은 불안정 구간을 나타낸다.

회전원판과 음향 공동 연성계의 플러터 속도 구간을 무차원 상수에 대하여 Fig. 4에 도시하였다. 무차원 상수 A 에 대하여는 각 모드 별로 포물선 형태의 플러터 속도 구간을 가지며, 무차원 상수 C 에 대하여는 비례하는 플러터 속도 구간을 가진다. 한 개의 원판이 회전하는 경우와 비교하면, 유체의 밀도가 커지는 경우(A 가 증가하는 경우) 더욱 넓은 영역에서 계의 불안정성이 나타남을 알 수 있다. 그러나, C 가 증가하는 경우(유체의 음향 속도가 증가하는 경우)는 한 개의 원판이 회전하는 경우와 동일한 결과를 나타낸다.

4.2 감쇄의 경우

(1) 음향 감쇄의 경우

음향 감쇄가 있는 경우, 원판과 음향공동 연성계의 고유치 해석 수행하였다. 한 개의 원판의 회전하는 경우와 비교하여 유사한 결과를 얻을 수 있었으나, 두 개의 원판이 회전함에 따라 두 개의 구조모드 궤적들을 얻을 수 있었다. 음향 감쇄는 위와 아래쪽에 위치하는 흡음면의 특성에 따라 존재하며, 원판에 의한 구조 감쇄가 없는 경우 식 (20)에서 순환행렬(circulatory matrix) D 가 소거되기 때문에 연성 행렬 방정식은 양의 정부호 감쇄(positive definite

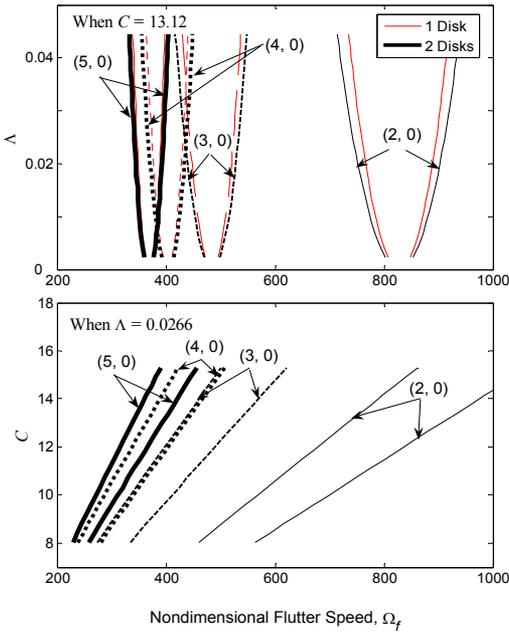


Fig. 4 Variation of nondimensional flutter speed with respect to Λ and C

damping) 행렬을 가지는 자이로스코픽 계로 변환된다. 따라서, Kelvin-Tait-Chetaev 원리에 의하여 연성계는 회전원판의 임계속도(critical speed; 원판의 고유 진동수가 영이 될 때)에서 불안 정하게 된다⁽¹⁹⁾.

수치적으로 이를 확인하기 위하여 세 개의 절직 경을 가지는 원판과 음향 모드계의 고유치를 Fig. 5에 도시하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 연성계의 실수 고유치는 정확히 원판의 임계속도에서 발생하며(확대 영역 참조), 일단 계의 불안정성이 나타나면 고속 영역에서는 지속적으로 불안정한 특성을 유지한다. 이때 원판의 임계속도는 강성 행렬의 행렬식(determinant)이 영이 되는 순간이지만, 식 (20)의 강성 행렬에서는 원판과 음향 모드가 연성되어 있지 않기 때문에, 계의 플러터 속도는 무차원 상수 Λ 와 C 에 대하여 종속적이지 않게 되며, 원판의 개수와도 무관하게 된다. 즉, 한 개의 원판이 회전하는 경우나, 두 개의 원판이 회전하는 경우 동일하게 원판의 임계속도에서 계의 불안정성이 발생하게 된다.

(2) 원판 감쇄의 경우

원판의 점탄성(viscoelastic)에 의한 감쇄가 있는 경우, 연성계의 고유치 해석 결과를 Fig. 6에 도시

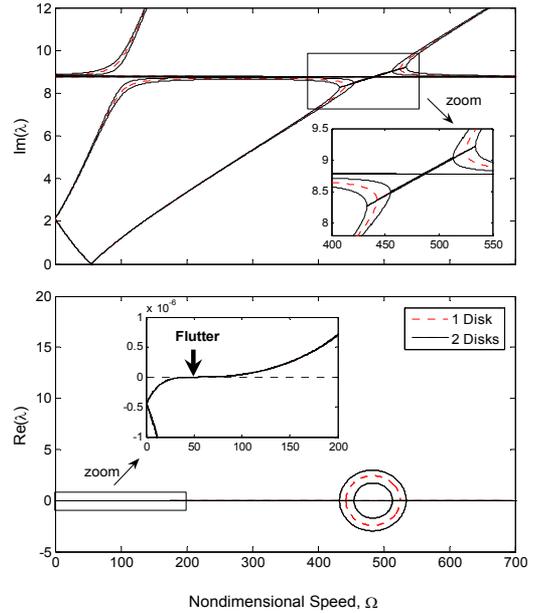


Fig. 5 Eigenvalues of 3 nodal diameter of the coupled system in the presence of acoustic damping alone induced by sound absorbing wall

하였다. 연성계의 불안정성은 임계속도 보다 큰 지점에서 발생하지만, 원판의 개수에 상관없이 동일한 속도에서 나타난다.

이러한 현상은 원판 음향 연성계를 회전 좌표계(disk rotating coordinate)로 변환하여 생각할 경우, 쉽게 이해할 수 있다. 즉, 식 (20)에 나타난 원판의 감쇄에 의한 순환 행렬 D 는 원판의 점탄성에 기인한 감쇄 항이 지면에 고정된 좌표계(ground-fixed coordinate)로 변환되면서 부수적으로 발생한 행렬이기 때문에, 회전 좌표계에서는 소거된다. 따라서 음향 감쇄가 없는 경우, 다시 양의 정부호 감쇄 행렬을 가지는 자이로스코픽 계로 환원된다.

또한 회전 좌표계에서 원판-음향 연성계는 원판이 고정되고 음향 공동이 회전하는 계로 이해할 수 있으므로, 앞 서와 마찬가지로 Kelvin-Tait-Chetaev 원리에 의하여 회전하는 음향 공동의 임계속도에서 계의 불안정성이 발생하게 된다⁽¹³⁾. 따라서 원판의 개수와 무관한 지점에서 계의 플러터 속도가 나타난다.

(3) 복합적인 감쇄의 경우

두 개의 원판이 밀폐된 공간에서 동시에 회전하

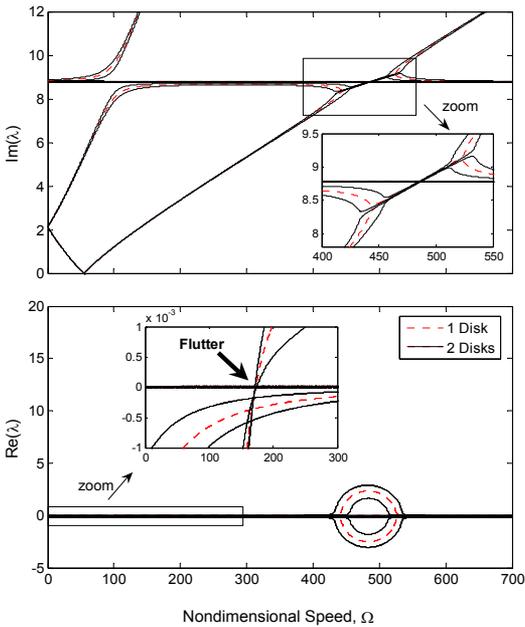


Fig. 6 Eigenvalues of 3 nodal diameter of the coupled system in the presence of disk damping alone induced by viscoelastic disk material

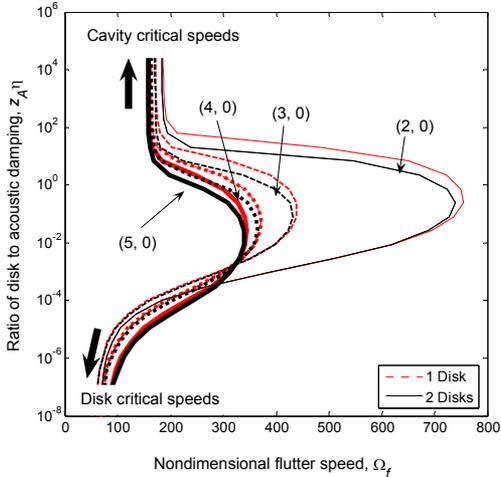


Fig. 7 Variation of flutter speed with the ratio of disk to acoustic damping $z_{A\eta}$

는 구조-음향 연성계에서, 흡음면에 의한 음향 감쇄와 점탄성에 의한 원판의 감쇄가 동시에 존재하는 경우에 대한 고유치 해석을 수행하였으며, 계의 플러터 속도를 구하여 원판과 음향 감쇄의 비에 대하여 Fig. 7에 나타내었다.

각 모드에 따라 그림에 도시한 곡선의 오른쪽 영역에서 불안정한 영역이 발생한다. 특히 두 개의 원판이 회전하는 경우에 더 낮은 속도에서 불안정성이 나타나며, 감쇄가 음향 또는 원판 감쇄의 경우로 접근할 경우, 각각 원판과 음향 공동의 임계속도로 접근함을 알 수 있다.

3. 결 론

이 연구에서는 밀폐된 용기 안에서 회전하는 두 개의 원판과 음향 공동과의 연성해석을 통하여 계의 안정성 해석을 수행하였으며, 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 한 개의 원판이 회전하는 경우와 마찬가지로, 이산화 과정을 통하여 자이로스코픽 행렬과 순환 행렬로 구성된 연성된 행렬방정식을 구하였다. 둘째, 감쇄가 없는 경우 연성계의 플러터 속도는 모드 일치에 의하여 발생함을 확인하였으며, 두 개의 원판이 회전하는 경우, 더 넓은 속도 구간에서 계의 불안정성이 나타남을 확인하였다. 또한 흡음면에 의한 음향 감쇄와 점탄성에 의한 원판의 감쇄에 의한 계의 안정성을 각각 해석하였으며, 최종적으로 복합된 감쇄의 경우에 대하여 플러터 속도를 구하였다.

이 연구에서는 원판과 음향 공동과의 반경방향 간극(radial clearance)이 없는 경우에 대하여 수행하였으나, 간극이 있는 경우에 대하여도 확장 가능하므로 보다 실제적인 문제 해석이 가능할 것으로 판단된다⁽²⁰⁾.

후 기

이 논문은 2007년도 경북대학교신임교수정착연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) D'Angelo, C. and Mote, Jr., C. D., 1993, "Aerodynamically Excited Vibration and Flutter of a Thin Disk Rotating at Supercritical Speed," Journal of Sound and Vibration, Vol. 168, No. 1, pp. 15-30.
- (2) D'Angelo, C. and Mote, Jr. C. D., 1993, "Natural Frequencies of a Thin Disk, Clamped by Thick Collars with Friction at the Contacting Surfaces,"

Spinning at High Rotating Speed,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 168, No. 1, pp. 1~14.

(3) Renshaw, A. A., D’Angelo, C. and Mote, Jr. C. D., 1994, “Aeroelastically Excited Vibration of a Rotating Disk,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 177, No. 5, pp. 577~590.

(4) Hansen, M. H., Raman, A. and Mote, Jr. C. D., 2001, “Estimation of Nonconservative Aerodynamic Pressure Leading to Flutter of Spinning Disks,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 15, pp. 39~57.

(5) Yasuda, K., Torii, T. and Shimizu, T., 1992, “Self excited oscillations of a circular disk rotating in air,” *JSME International Journal, Series 3: Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry*, Vol. 35, pp. 347~352.

(6) Kim, B. C., Raman, A. and Mote, Jr. C. D., 2000, “Prediction of Aeroelastic Flutter in a Hard Disk Drive,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, No. 2, pp. 309~325.

(7) Hansen, M. H., 1999, *Aeroelasticity and Dynamics of Spinning Disks*, Ph. D thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark.

(8) Huang, F. Y. and Mote, Jr. C. D., 1995, “On the Instability Mechanisms of a Disk Rotating Close to a Rigid Surface,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 764~771.

(9) Huang, F. Y. and Mote, Jr. C. D., 1996, “Mathematical Analysis of Stability of a Spinning Disk Under Rotating, Arbitrarily Large Damping Forces,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 118, pp. 657~662.

(10) Naganathan, G., Ramadhayani, S. and Bajaj, A. K., 2003, “Numerical Simulations of Flutter Instability of a Flexible Disk Rotating Close to a Rigid Wall,” *Journal of Vibration and Control*, Vol.

9, No. 1, pp. 95~118.

(11) Renshaw, A. A., 1998, “Critical Speed for Floppy Disks,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, pp. 116~120.

(12) Hosaka, H. and Crandall, S. H., 1992, “Self-excited Vibrations of a Flexible Disk Rotating on an Air Film Above a Flat Surface,” *Acta Mechanica*, Vol. 3, pp. 115~127.

(13) Kang, N. and Raman, A., 2004, “Aeroelastic Flutter Mechanisms of a Flexible Disk Rotating in an Enclosed Compressible Fluid,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, pp. 120~130.

(14) Love, A. E., 1944, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications.

(15) Dowell, E. H., Gorman, G. F. and Smith, D. A., 1977, “Acoustoelasticity: General Theory, Acoustic Natural Modes and Forced Response to Sinusoidal Excitation, Including Comparisons with Experiment,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 52, No. 4, pp. 519~542.

(16) Fahy, F., 1985, *Sound and Structural Vibration*, Academic Press, Chap. 6.

(17) Dowell, E. H., 1975, *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Noordhoff International Publishing, Leyden, Chap. 4.

(18) Vogel, S. M. and Skinner, D. W., 1965, “Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 926~931.

(19) Merkin, D. R., 1997, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag New York, Inc., Chap. 6.

(20) Kang, N. and Raman, A., 2006, “Vibration and Stability of a Flexible Disk Rotating in a Gas-Filled Enclosure-Part 1: Theoretical Study,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, pp. 651~675.