상태와 입력에 구간 시변 시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특이시스템의 지연 종속 강인 H_∞ 제어

論 文
58-1-30

Delay-dependent Robust H_∞ Control for Uncertain Discrete-time Descriptor Systems with Interval Time-varying Delays in State and Control Input

金 鍾 海[†]
(Jong-Hae Kim)

Abstract - In this paper, we consider the design problem of delay-dependent robust H_∞ controller of discrete-time descriptor systems with parameter uncertainties and interval time-varying delays in state and control input by delay-dependent LMI (linear matrix inequality) technique. A new delay-dependent bounded real lemma for discrete-time descriptor systems with time-varying delays is derived. The condition for the existence of robust H_∞ controller and the robust H_∞ state feedback control law are proposed by LMI approach. A numerical example is demonstrated to show the validity of the design method.

Key Words : Discrete-time Descriptor Systems, H_∞ Control, Delay-dependent Approach, Parameter Uncertainty, LMI

1. 서 론

전력 제어, 화학 공정, 장거리 통신 등과 같은 제어시스템에서 발생하는 시간지연은 시스템의 안정성과 밀접한 관련이 되기 때문에 시간지연에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 시간지연에 대한 연구는 지연 종속적인 방법과 지연 독립적인 방법이 있다. 일반적으로 지연 종속적인 해석 방법이 지연 독립적인 방법보다 덜 보수적인 것으로 알려져 있다. 특히, 변수 불확실성과 시간지연을 가지는 이산시간 시스템의 성능과 강인 안정성 문제는 상당한 관심을 가지고 연구가 진행되었다. 특이 시스템 모델은 동적 시스템의 자연스러운 표현이고 상태공간에서 해설할 수 있는 것보다 많은 것을 할 수 있기 때문에 특이시스템을 위한 H_∞ 제어문제는 많은 관심을 가지고 연구가 진행되어 왔다.

기존의 많은 특이시스템에 대한 연구결과가 연속시간에서 이루어져 오다가 이산시간에서의 연구가 최근 활발히 진행되고 있다. Xu와 Yang[1]은 이산시간 특이시스템의 정규성, 코잘 및 안정성을 만족하기 위한 상태궤환 H_∞ 제어기가 존재할 필요충분조건과 설계방법을 제시하였다. 하지만, 제어기 존재조건에서 등호조건이 포함되어 있고 비선형 요소가 있어서 최적의 제어기 해를 구하는데 어려움이 있었다. Zhang 등[2]은 특이시스템을 위한 새로운 유계 실수 정리(bounded real lemma)를 제안하였으나 제어기 설계방법으로 확대하지는 못하였다. Ji 등[3]은 변수 불확실성이 있는 이산시간 특이시스템의 강인 H_∞ 상태궤환 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계 알고리듬을 빠른 부시스템(fast subsystem)과 느린 부시스템(slow subsystem) 사이의 관계를 이용하여 새로운 유계 실수 정리를 통하여 선형행렬부등식 접근방법으로 제안하였다. 그러나 이러한 결과들[1,3]은 안정성에 영향을 끼치는 시간지연을 고려하지 않았다. Ma 등[4] 상태에 구간 시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템에 대하여 등가 모델변환(equivalent transformation)을 이용하여 지연 종속 강인 H_∞ 제어기가 존재할 조건과 설계방법을 제시하였다. 하지만 이러한 등가 모델 변환은 해를 구하는데 있어서 추가적인 차수 증가가 필요하였다. 등가 모델변환의 보수성을 줄이기 위하여 Zhang과 Han[5]은 유한 합 부등식(finite sun inequality)을 이용하여 지연종속 강인 H_∞ 필터 설계 방법을 제시하였다. 이러한 유한 합 부등식(finite sun inequality)을 이용하여 기존 결과들의 보수성을 줄이기 위하여 Wang 등[6]은 상태에 시변 시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특이시스템의 지연 종속 강인 H_∞ 제어기 설계방법을 제안하였다. 하지만 기존의 결과들이 상태에만 시변 시간지연이 있는 이산시간 특이시스템을 다루었다. 상태와 제어 입력에 상한값과 하한값의 구간 시변시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특아시스템의 강인 H_∞ 제어기 설계방법에 대한 연구결과는 없는 실정이다.

따라서, 본 논문에서는 기존 결과[3,6]를 확장하여 상태와 제어입력에 구간 시변 시간지연을 가지고 제어할 출력에서도 외란 입력을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 H_∞ 제어기 존재조건과 설계방법을 볼록 최적화가 가능한 지연종속 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 제시하고자 한다. 먼저 구간 시변 시간지연들을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 새로운 유계 실수 정리를 제안하고 이를 기반으로 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 강인 안정성과 H_∞ 성능지수를 보장하는 강인 H_∞ 제어기의 존재조건과 설계방법을 제안한다.

2. 문제설정

상태와 제어입력에 시변 시간지연을 불확실성 이산시간 특이시스템

† 교신저자, 正會員 : 鮮文大學校 電子工學部 副敎授・工博
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr
接受日字 : 2008年 9月 17日
最終完了 : 2008年 11月 18日

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= (A+\Delta A(k))x(k)+(A_d+\Delta A_d(k))x(k-d(k)) \\
&\quad +(B+\Delta B(k))u(k)+(B_h+\Delta B_h(k))u(k-h(k))+B_w(k) \\
z(k) &= Cx(k)+Du(k)+D_w w(k) \\
x(k) &= \phi(k),\ k=-\tau,-\tau+1,\cdots,1,\ \tau=\max(\bar{d},\bar{h})
\end{aligned} \tag{1}
$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in R^n$는 상태변수, $u(k)\in R^m$는 제어 입력변수, $w(k)\in R^p$는 외란 입력변수, $z(k)\in R^q$는 제어되어지는 출력변수(controlled output variable), E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 구간을 가지는 양의 정수 값인 시간지연항은

$$0<\underline{d}\le d(k)\le \bar{d}<\infty,\ 0<\underline{h}\le h(k)\le \bar{h}<\infty \tag{2}$$

를 만족하고, $\phi(k)$는 주어진 초기조건이고, 변수 불확실성은 노옴(norm)의 유계(bound)를 가지는

$$
\begin{aligned}
&\left[\Delta A(k)\quad \Delta B(k)\quad \Delta A_d(k)\quad \Delta B_h(k)\right] \\
&=MF(k)\left[H_1\quad H_2\quad H_3\quad H_4\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

과 같고, D와 $H_i(i=1,2,3,4)$는 알고 있는 상수행렬(known constant matrices)이고, $F(k)$는

$$F(k)^T F(k)\le I \tag{4}$$

를 만족하는 모르는 행렬이다. 시스템 (1)에 대하여 설계할 강인 H_∞ 상태궤환 제어기는

$$u(k)=Kx(k) \tag{5}$$

로 정의한다. 먼저, 변수 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)의 지연 종속 강인 H_∞ 제어기 설계를 위하여 변수 불확실성이 없는 여기되지 않은 시스템(unforced system)

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= Ax(k)+A_d x(k-d(k))+M_h x(k-h(k))+B_w w(k) \\
z(k) &= Cx(k)+D_w w(k)
\end{aligned} \tag{6}
$$

을 고려한다. 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템 (6)을 위한 정의와 수식전개를 위한 보조정리를 소개한다.

정의 1[5,6]: 특이시스템의 성질을 정의한다.

(i) $\det(zE-A)$이 항등적으로 영(identically zero)이 아니면, (E,A)는 정규적(regular)이다.

(ii) $rank(E)=\deg(\det(zE-A))$이면, (E,A)는 코잘(causal)이다.

(iii) (E,A)가 정규적이고 코잘이면 시스템 (6)은 정규적이고 코잘이다.

(iv) 정규적이고 $\det(zE-A)=0$의 모든 근이 단위원내에 존재하면 안정하다.

보조정리 1[7]: 적절한 차원을 가지는 행렬 Γ, Ξ와 대칭행렬 Ω가 주어진다. 식 (4)를 만족하는 $F(k)$에 대하여 $\Omega+\Gamma F(k)\Xi+\Xi^T F(k)^T\Gamma^T<0$을 만족하기 위한 필요충분조건은 $\Omega+\epsilon\Gamma\Gamma^T+\epsilon^{-1}\Xi^T\Xi<0$을 만족하는 양의 상수 ϵ이 존재하는 것이다.

보조정리 2: 적절한 차원을 가지는 행렬 N_1, N_2, N_3, N_4, W, 양의 정부호(positive-definite) 행렬 S_1, S_2와 식 (2)에서 정의한 시간지연 $d(k)$와 $h(k)$에 대하여, 아래의 성질

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j)-\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j) \\
&=\zeta(k)^T\left\{\Pi_1+\Pi_2+d(k)Y_1^T S_1^{-1}Y_1+h(k)Y_2^T S_2^{-1}Y_2\right\}\zeta(k) \\
&\le \zeta(k)^T\left\{\Pi_1+\Pi_2+\bar{d}Y_1^T S_1^{-1}Y_1+\bar{h}Y_2^T S_2^{-1}Y_2\right\}\zeta(k)
\end{aligned} \tag{7}
$$

을 만족한다. 여기서, 변수들은

$$
\Pi_1=\begin{bmatrix} N_1^T E+E^T N_1 & -N_1^T E+E^T N_2 & 0 & E^T W \\ * & -N_2^T E-E^T N_2 & 0 & -E^T W \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Pi_2=\begin{bmatrix} N_3^T E+E^T N_3 & 0 & -N_3^T E+E^T N_4 & E^T W \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -N_4^T E-E^T N_4 & -E^T W \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}
$$

$$Y_1=\left[N_1\ N_2\ 0\ W\right],\ Y_2=\left[N_3\ 0\ N_4\ W\right]$$

으로 정의한다. 여기서, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이다.

증명: 아래의 행렬

$$C_1=\begin{bmatrix} S_1^{1/2} & S_1^{-1/2}Y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix} S_2^{1/2} & S_2^{-1/2}Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

에서 $C_1^T C_1\ge 0$과 $C_2^T C_2\ge 0$으로부터

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}\begin{bmatrix} Ey(j) \\ \zeta(k)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} S_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Y_1^T S_1^{-1}Y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ey(j) \\ \zeta(k)\end{bmatrix}\ge 0 \\
&\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}\begin{bmatrix} Ey(j) \\ \zeta(k)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} S_2 & Y_2 \\ Y_2^T & Y_2^T S_2^{-1}Y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ey(j) \\ \zeta(k)\end{bmatrix}\ge 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

가 되고,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} 2\zeta(k)^T Y_1^T Ey(j)=2\zeta(k)^T Y_1^T[E\quad -E\quad 0\quad 0]\zeta(k) \\
&\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} 2\zeta(k)^T Y_2^T Ey(j)=2\zeta(k)^T Y_2^T[E\quad 0\quad -E\quad 0]\zeta(k)
\end{aligned} \tag{10}
$$

의 관계로부터 식 (9)를 정리하면 식 (7)이 된다. ■

정의 2: 본 논문에서 설계할 강인 H_∞ 제어기 (5)의 목적은 다음과 같이 정리된다.

(i) 시스템 (1)과 제어기 (5)로 구성되는 폐루프 시스템이 $w(k)=0$일 때, 정규적, 코잘 및 안정성을 만족한다.

(ii) $x(k)$의 초기조건이 영에 대하여, 다음의 H_∞ 성능지수

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(z(k)^T z(k)-\gamma^2 w(k)^T w(k))<0 \tag{11}$$

을 만족하여야 한다.

따라서, 식 (2)의 시변 시간지연과 식 (3)의 변수 불확실성 및 외란 입력 $w(k)$의 존재에도 불구하고 강인 안정성과 H_∞ 성능지수를 만족하여야 한다.

3. 강인 비약성 제어기 설계

본 절에서는 먼저 여기되지 않은 공칭 시스템 (6)에 대하여, 정의 2를 만족하는 유계 실수정리를 먼저 제안한다. 그리고 구한 결과를 이용하여 시스템 (1)로 확장하여 정의 2를 만족하는 강인 H_∞ 제어기 (5)의 존재조건과 설계방법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 알고리듬은 기존의 결과들이 상태에만 시간지연을 고려하는 것과 달리 상태와 제어입력에 (2)와 같은 구간 시변 시간을 가지는 불확실 이산 시간 특이 시스템에 대한 제어기 설계방법을 제안한다. 수식 전개를 위하여 몇 가지 변수들을

$$
\begin{aligned}
\zeta(k) &= \left[x(k)^T x(k-d(k))^T x(k-h(k))^T w(k)^T\right] \\
y(l) &= x(l+1)-x(l)
\end{aligned} \tag{12}
$$

와 같이 정의하면 이산시간 특이시스템 (6)과 관련된 식은

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= \left[A\ A_{A_d}\ M_h\ B_w\right]\zeta(k)\equiv\Psi_1\zeta(k) \\
Ey(k) &= \left[A-E\ A_d\ M_h\ B_w\right]\zeta(k)\equiv\Psi_2\zeta(k)
\end{aligned} \tag{13}
$$

으로 정의된다.

정리 1: 시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템 (6)에 대하여, 선형행렬부등식

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ * & \Lambda_3\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S_1, S_2, W_1, W_2, 양의 상수 ρ와 행렬 Z, N_1, N_2, N_3, N_4가 존재하면, 이산시간 특이시스템 (6)은 정의 2를 만족한다. 여기서, Φ은 $E^T\Phi=0$을 만족하는 적절한 차원을 가지는 행렬이고, 변수들은

$$\Lambda_1=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14}\\ * & -N_2^TE-E^TN_2-W_1 & 0 & -E^TW\\ * & * & -N_4^TE-E^TN_4-W_2 & -E^TW\\ * & * & * & -\rho I+D_w^TD_w\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{11}=A^T\Phi Z^T+Z\Phi^TA+N_1^TE+E^TN_1+N_3^TE+E^TN_3$$
$$\quad -E^TPE+C^TC+d^*W_1+h^*W_2$$

$$\Lambda_{12}=Z\Phi^TA_d-N_1^TE+E^TN_2$$

$$\Lambda_{13}=Z\Phi^TM_h-N_3^TE+E^TN_4$$

$$\Lambda_{14}=Z\Phi^TB_w+2E^TW+C^TD_w$$

$$d^*=\bar{d}-\underline{d}+1$$

$$h^*=\bar{h}-\underline{h}+1$$

$$\rho=\gamma^2$$

$$\Lambda_2=\begin{bmatrix}A^TP & \bar{d}(A-E)^TS_1 & \bar{h}(A-E)^TS_2 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T\\ A_d^TP & \bar{d}A_d^TS_1 & \bar{h}A_d^TS_2 & \bar{d}N_2^T & 0\\ M_h^TP & \bar{d}M_h^TS_1 & \bar{h}M_h^TS_2 & 0 & \bar{h}N_4^T\\ B_w^TP & \bar{d}B_w^TS_1 & \bar{h}B_w^TS_2 & \bar{d}W^T & \bar{h}W^T\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3=diag\left\{-P,-\bar{d}S_1,-\bar{h}S_2,-\bar{d}S_1,-\bar{h}S_2\right\}$$

와 같다. 여기서, $diag\{\bullet\}$는 블록 대각 행렬이다.

증명: 안정성을 위하여 적절한 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(k))=V_1(k)+V_2(k)+V_3(k)+V_4(k)+V_5(k)+V_6(k)+V_7(k) \tag{15}$$

와 같이 설정한다. 여기서, 각 함수들은

$$V_1(k)=x(k)^TE^TPEx(k)$$

$$V_2(k)=\sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1}y(j)^TE^TS_1Ey(j)$$

$$V_3(k)=\sum_{\theta=-\bar{h}+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1}y(j)^TE^TS_2Ey(j)$$

$$V_4(k)=\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x(i)^TW_1x(i)$$

$$V_5(k)=\sum_{i=k-h(k)}^{k-1}x(i)^TW_2x(i)$$

$$V_6(k)=\sum_{j=-\bar{d}+2}^{-\underline{d}+1}\sum_{l=k+j-1}^{k-1}x(l)^TW_1x(l)$$

$$V_7(k)=\sum_{j=-\bar{h}+2}^{-\underline{h}+1}\sum_{l=k+j-1}^{k-1}x(l)^TW_2x(l)$$

으로 정의한다. 식 (15)에서 전방향 차분(forward difference)인 $\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)$을 시스템 (6)에 대하여 각 함수에서 구하면

$$\Delta V_1(k)=V_1(k+1)-V_1(k)=\zeta(k)^T\Psi_1^TP\Psi_1\zeta(k)-\zeta(k)^T\Psi_3\zeta(k) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k)=&\ V_2(k+1)-V_2(k)\\ &=\bar{d}y(k)^TE^TS_1Ey(k)-\sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1}y(j)^TE^TS_1Ey(j)\\ &\le \bar{d}y(k)^TE^TS_1Ey(k)-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}y(j)^TE^TS_1Ey(j)\\ &=\bar{d}\zeta(k)^T\Psi_2^TS_1\Psi_2\zeta(k)-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}y(j)^TE^TS_1Ey(j)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_3(k)=&\ V_3(k+1)-V_3(k)\\ &=\bar{h}y(k)^TE^TS_2Ey(k)-\sum_{j=k-\bar{h}}^{k-1}y(j)^TE^TS_2Ey(j)\\ &\le \bar{h}y(k)^TE^TS_2Ey(k)-\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}y(j)^TE^TS_2Ey(j)\\ &=\bar{h}\zeta(k)^T\Psi_2^TS_2\Psi_2\zeta(k)-\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}y(j)^TE^TS_2Ey(j)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\Delta V_4(k)+\Delta V_6(k)\\ &\le d^*x(k)^TW_1x(k)-x(k-d(k))^TW_1x(k-d(k))=\zeta(k)^T\Psi_4\zeta(k)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\Delta V_5(k)+\Delta V_7(k)\\ &\le h^*x(k)^TW_2x(k)-x(k-h(k))^TW_2x(k-h(k))=\zeta(k)^T\Psi_5\zeta(k)\end{aligned} \tag{20}$$

과 같다. 식 (19)와 (20)의 자세한 전개는 참고문헌 [8]을 이용하면 쉽게 전개가 된다. 여기서, 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi_3=\begin{bmatrix}E^TPE & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \Psi_4=\begin{bmatrix}d^*W_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -W_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Psi_5=\begin{bmatrix}h^*W_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -W_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{21}$$

보조정리 2를 이용하여 식 (16)-(21)을 정리하면

$$\begin{aligned}&\Delta V(k)\\ &\le \zeta(k)^T\left\{\begin{aligned}&\Psi_1^TP\Psi_1-\Psi_3+\bar{d}\Psi_2^TS_1\Psi_2+\bar{h}\Psi_2^TS_2\Psi_2+\Pi_1\\ &+\Pi_2+\bar{d}Y_1^TS_1^{-1}Y_1+\bar{h}Y_2^TS_2^{-1}Y_2+\Psi_4+\Psi_5\end{aligned}\right\}\zeta(k)<0\end{aligned} \tag{22}$$

와 같고 $E^T\Phi=0$이므로

$$2x(k+1)^TE^T\Phi Z^Tx(k)=0 \tag{23}$$

을 유도할 수 있다. $x(k)$의 영인 초기조건과 $V(x_0)=0$와 식 (22)와 (23)에서 슈어 여수정리를 이용하면

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(z(k)^Tz(k)-\rho w(k)^Tw(k)) \tag{24}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}(z(k)^Tz(k)-\rho w(k)^Tw(k))+V(x_\infty)-V(x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta(k)^T\Lambda\zeta(k)$$

와 같이 되므로 안정성을 위한 조건 식 (14)를 얻는다. ■

정리 2: 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)과 강인 H_∞ 제어기 (5)에 대하여, 선형행렬 부등식

$$\begin{bmatrix}\overline{\Lambda_1} & \overline{\Lambda_2} & \overline{\Lambda_3} & \overline{\Lambda_4} & \overline{\Lambda_5} & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T & \overline{\Lambda_6}\\ * & \overline{\Lambda_7} & X^TA_d^T & Y^TB_h^T & \overline{\Lambda_8} & 0 & 0 & \overline{\Lambda_6}\\ * & * & \overline{\Lambda_9} & 0 & -EW & \bar{d}N_2^T & 0 & 0\\ * & * & * & \overline{\Lambda_{10}} & -EW & 0 & \bar{h}N_4^T & 0\\ * & * & * & * & \overline{\Lambda_{11}} & \bar{d}W^T & \bar{h}W^T & 0\\ * & * & * & * & * & -dS_1 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & \overline{\Lambda_{12}}\end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S_1, S_2, W_1, W_2, 양의 상수

ϵ, ρ와 행렬 Z, N_1, N_2, N_3, N_4, X, Y가 존재하면 정의 2의 성질을 만족하는 강인 H_∞ 제어기는

$$u(k) = YX^{-1}x(k) \tag{26}$$

이다. 여기서, Φ는 $E\Phi=0$를 만족하는 적절한 차원을 가지는 행렬이고 몇 가지 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{\Lambda_1} = (A-E)X + X^T(A-E)^T + BY + Y^TB^T + N_1^TE^T + EN_1 + N_3^TE^T + EN_3 + d^* W_1 + h^* W_2 + \epsilon MM^T + B_wB_w^T$$

$$\overline{\Lambda_2} = (A-E)X + BY + Z\Phi^T - X^T + EP$$

$$\overline{\Lambda_3} = X^TA_d^T - N_1^TE^T + EN_2, \quad \overline{\Lambda_4} = Y^TB_h^T - N_3^TE^T + EN_4$$

$$\overline{\Lambda_5} = X^TC^T + Y^TD^T + 2EW$$

$$\overline{\Lambda_6} = \begin{bmatrix} X^TH_1^T + Y^TH_2^T & X^TH_3^T & Y^TH_4^T \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Lambda_7} = -X - X^T + P + \bar{d}S_1 + \bar{h}S_2$$

$$\overline{\Lambda_8} = X^TC^T + Y^TD^T$$

$$\overline{\Lambda_9} = -N_2^TE^T - EN_2 - W_1 + \epsilon MM^T$$

$$\overline{\Lambda_{10}} = -N_4^TE^T - EN_4 - W_2 + \epsilon MM^T$$

$$\overline{\Lambda_{11}} = -\rho I + D_wD_w^T$$

$$\overline{\Lambda_{12}} = diag\{-\epsilon I, -\epsilon I, -\epsilon I\}$$

증명: 시스템 (6)은

$$\begin{aligned} \overline{E}\overline{x}(k+1) &= \overline{A}\overline{x}(k) + \overline{A_d}\overline{x}(k-d(k)) + \overline{M_h}\overline{x}(k-h(k)) + \overline{B_w}w(k) \\ z(k) &= \overline{C}\overline{x}(k) + \overline{C_d}\overline{x}(k-d(k)) + \overline{N_h}\overline{x}(k-h(k)) + D_ww(k) \end{aligned} \tag{27}$$

과 같이 표현되고, 변수들은

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix}, \ \overline{A} = \begin{bmatrix} E & I \\ A-E & -I \end{bmatrix}, \ \overline{A_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M_h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_h & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{C_d} = \begin{bmatrix} C_d & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{N_h} = \begin{bmatrix} N_h & 0 \end{bmatrix}$$

와 같다. 참고문헌 [3]의 정리 3의 전개와 유사하게 E, A, A_d, M_h, B_w, C, C_d, N_h, D_w, P, W_1, W_2, W, Z, S_1, S_2, N_1, N_2, N_3, N_4, Φ의 행렬이 $\overline{E}$, $\overline{A}$, $\overline{A_d}$, $\overline{M_h}$, $\overline{B_w}$, C, $\overline{C_d}$, $\overline{N_h}$, $\overline{D_w}$, $\overline{P}$, $\overline{W_1}$, $\overline{W_2}$, $\overline{W}$, $\overline{Z}$, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$, $\overline{N_3}$, $\overline{N_4}$, $\overline{\Phi}$에 의해 대치되고 식 (14)를 만족하면 시스템 (27)이 정규성, 코잘 및 안정성을 만족한다. 여기서, 특히

$$\begin{aligned} &\overline{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{W_1} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{W_2} = \begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{W} = \begin{bmatrix} W \\ \alpha I \end{bmatrix}, \\ &\overline{Z} = \begin{bmatrix} Z & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \ \overline{S_1} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{S_2} = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{N_1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} \\ &\overline{N_2} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{N_3} = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{N_4} = \begin{bmatrix} N_4 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \ \overline{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

과 같이 선택하여 식 (27)과 (28)로 대치한 변수들을 식 (14)에 대입하고 슈어 여수정리와 $\alpha \to 0$이라고 두면 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_5 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T \\ * & \Phi_6 & X^TA_d & X^TM_h & X^TB_w & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_7 & 0 & -E^TW & -\bar{d}N_2^T & 0 \\ * & * & * & \Phi_8 & -E^TW & 0 & \bar{h}N_4^T \\ * & * & * & * & -\rho I + D_w^TD_w & \bar{d}W^T & \bar{h}W^T \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

를 얻는다. 여기서, 변수들은 다음과 같다.

$$\Phi_1 = (A-E)^TX + X^T(A-E) + N_1^TE + E^TN_1 + N_3^TE + E^TN_3 + C^TC + d^* W_1 + h^* W_2$$

$$\Phi_2 = (A-E)^TX + Z\Phi^T - X^T + E^TP$$

$$\Phi_3 = X^TA_d - N_1^TE + E^TN_2, \ \Phi_4 = X^TM_h - N_3^TE + E^TN_4$$

$$\Phi_5 = X^TB_w + 2E^TW + C^TD_w, \ \Phi_6 = -X - X^T + P + \bar{d}S_1 + \bar{h}S_2$$

$$\Phi_7 = -N_2^TE - E^TN_2 - W_1, \quad \Phi_8 = -N_4^TE - E^TN_4 - W_2.$$

시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템

$$\begin{aligned} E^T\eta(k+1) &= A^T\eta(k) + A_d^T\eta(k-d(k)) + M_h^T\eta(k-h(k)) + C^T\overline{w}(k) \\ z(k) &= B_w^T\eta(k) + D_w^T\overline{w}(k) \end{aligned} \tag{30}$$

을 고려하자. 여기서, $\eta(k) \in R^n$는 상태변수, $\overline{w}(k) \in R^q$는 외란 입력변수이고 나머지 변수는 시스템 (1)의 정의와 동일하다. $\det(zE-A) = \det(zE^T - A^T)$이므로 (E, A)가 정규성과 코잘을 만족하기 위한 필요충분조건은 (E^T, A^T)가 정규적이고 코잘이면 된다. 그리고 시스템 (6)이 정규적이고 코잘이 되기 위한 필요충분조건은 시스템 (30)이 정규적이고 코잘이다. 또한, $\det(zE - A - A_dz^{-d(k)} - M_hz^{-h(k)}) = 0$의 해는 $\det(zE^T - A^T - A_d^Tz^{-d(k)} - M_h^Tz^{-h(k)}) = 0$의 해와 동일하기 때문에, $w(k)=0$일 때의 시스템 (6)이 안정하기 위한 필요충분조건은 $\overline{w}(k)=0$일 때 시스템 (30)이 안정하다는 것이다. 또한, 시스템 (6)에서 H_∞ 성능지수 (11)을 만족하기 위한 필요충분조건은 시스템 (30)에서

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (z(k)^Tz(k) - \gamma^2\overline{w}(k)^T\overline{w}(k)) < 0 \tag{31}$$

의 H_∞ 성능지수를 만족하는 것이다. 따라서, 식 (29)에서 E, A, A_d, M_h, B_w, C, D_w의 행렬에 E^T, A^T, A_d^T, M_h^T, C^T, B_w^T, D_w^T를 각각 대입하면 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \Pi_5 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T \\ * & \Pi_6 & X^TA_d^T & X^TM_h^T & X^TC^T & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_7 & 0 & -EW & -\bar{d}N_2^T & 0 \\ * & * & * & \Phi_8 & -EW & 0 & \bar{h}N_4^T \\ * & * & * & * & -\rho I + D_wD_w^T & \bar{d}W^T & \bar{h}W^T \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{32}$$

를 얻고 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\Pi_1 = (A-E)X + X^T(A-E)^T + N_1^TE^T + EN_1 + N_3^TE^T + EN_3 + B_wB_w^T + d^* W_1 + h^* W_2$$

$$\Pi_2 = (A-E)X + Z\Phi^T - X^T + EP$$

$$\Pi_3 = X^TA_d^T - N_1^TE^T + EN_2$$

$$\Pi_4 = X^TM_h^T - N_3^TE^T + EN_4$$

$$\Pi_5 = X^TC^T + 2EW + B_wD_w^T$$

$$\Pi_6 = -X - X^T + P + \bar{d}S_1 + \bar{h}S_2$$

$$\Pi_7 = -N_2^TE^T - EN_2 - W_1$$

$$\Pi_8 = -N_4^TE^T - EN_4 - W_2.$$

시변 시간지연과 변수 불확실성 및 외란을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)에서 정의 2의 성질을 만족하기 위하여 식 (32)에 시스템 행렬의 값을

$$\begin{aligned} A &\leftarrow A + BK + MF(k)(H_1 + H_2K) \equiv A_K + MF(k)H_K \\ A_d &\leftarrow A_d + MF(k)H_3 \\ M_h &\leftarrow B_hK + MF(k)H_4K \\ C &\leftarrow C + DK \equiv C_K \end{aligned} \tag{33}$$

과 같이 대입하고 보조정리 1을 적용하면 각 변수는

$$\varOmega=\begin{bmatrix}\varOmega_1 & \varOmega_2 & \varOmega_3 & \varOmega_4 & \varOmega_5 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T \\ * & \varOmega_6 & X^TA_d^T & X^TK^TB_h^T & X^TC_K^T & 0 & 0 \\ * & * & \varOmega_7 & 0 & -EW & \bar{d}N_2^T & 0 \\ * & * & * & \varOmega_8 & -EW & 0 & \bar{h}N_4^T \\ * & * & * & * & -\rho I+D_wD_w^T & \bar{d}W^T & \bar{h}W^T \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2\end{bmatrix}$$

$$\varGamma=\begin{bmatrix}M & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & M\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \varXi=\begin{bmatrix}H_KX & H_KX & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ H_3X & H_3X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ H_4KX & H_4KX & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{34}$$

와 같고 변수들은 아래와 같다.

$$\varOmega_1 = A_KX+X^TA_K^T+N_1^TE^T+EN_1+N_3^TE^T+EN_3 +d^*W_1+h^*W_2+B_wB_w^T$$

$$\varOmega_2=(A_K-E)X+Z\varPhi^T-X^T+EP$$

$$\varOmega_3=X^TA_d^T-N_1^TE^T+EN_2$$

$$\varOmega_4=X^TK^TB_h^T-N_3^TE^T+EN_4$$

$$\varOmega_5=X^TC_K^T+2EW+B_wD_w^T$$

$$\varOmega_6=-X-X^T+P+\bar{d}S_1+\bar{h}S_2$$

$$\varOmega_7=-N_2^TE^T-EN_2-W_1$$

$$\varOmega_8=-N_4^TE^T-EN_4-W_2.$$

식 (34)의 변수들을 $\varOmega+\epsilon\varGamma\varGamma^T+\epsilon^{-1}\varXi^T\varXi<0$에 대입하고 $Y=KX$로 정의한 후 슈어 여수정리를 이용하여 정리하면 강인 H_∞ 제어기가 존재할 선형행렬부등식 조건 (25)와 제어기 (26)을 구할 수 있다. ■

참조 1: 정리 2에서 H_∞ 성능지수인 γ의 최소값을 구하고자 하면, '*Minimize ρ subject to LMI (25)*' 로 변형할 수 있다. 또한, 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식이 되므로 완벽한 최적화문제로 변형이 된다.

예제 1: 제안한 강인 H_∞ 제어기 설계 알고리듬의 타당성을 확인하기 위하여 상태와 제어입력에 시변 시간지연과 변수 불확실성 및 외란을 가지는 이산시간 특이시스템

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}x(k+1)=\left\{\begin{bmatrix}0.7&0.25\\0.9&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}F(k)[0.2\ 0.2]\right\}x(k) +\left\{\begin{bmatrix}0.7&0.3\\0.25&-0.1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}F(k)[0.2\ 0.2]\right\}x(k-d(k)) +\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}F(k)0.2\right\}u(k) +\left\{\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}F(k)0.2\right\}u(k-h(k))+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}w(k) \tag{35}$$

$$z(k)=[0.1\ 0.5]x(k)+0.3u(k)+0.1w(k)$$

를 고려한다. $E\varPhi=0$를 만족하는 행렬은 $\varPhi=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$로 두고, 시변 시간지연을 $0\le h(k)\le 1$과 $1\le d(k)\le\bar{d}$에 대하여 $\bar{d}$의 변화에 대한 H_∞ 성능지수인 최소의 γ와 제어기 이득 K 값과 관계는 표 1에서 주어진다. 참조 1의 최적화문제는 LMI Toolbox[9]의 '*mincx*' 명령어를 이용하면 해를 구할 수 있다. 표 1에서 보듯이 시변 시간지연의 상한 값이 커질수록 γ의 값이 증가하고 제어기 이득도 증가함을 알 수 있다. 즉, $\bar{d}$의 값이 작을수록 γ가 작아지므로 외란에 대한 보장할 수 있는 여유도가 커진다. 따라서 해가 존재하는(feasible) 경우의 모든 제어기는 변수 불확실성과 구간 사이에서의 시변 시간지연 및 외란에 대해서도 강인 안정성을 보장하고 또한 γ의 범위내에서의 H_∞ 성능지수를 보장한다.

표 1 $\bar{d}$의 변화에 따른 γ와 제어기 이득

Table 1. The values of γ and controller gains according to the changes of $\bar{d}$

$\bar{d}$	γ	K
1	0.6040	$[-0.9374\ \ -1.8677]$
2	0.9254	$[-1.7535\ \ -2.0367]$
3	1.5690	$[-3.3036\ \ -2.7786]$
4	2.8063	$[-5.3844\ \ -3.9158]$
5	6.1443	$[-8.0893\ \ -5.4307]$
6	51.0027	$[-11.5904\ \ -7.4021]$
7	infeasible	

4. 결 론

본 논문에서는 상태와 제어입력에 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 H_∞ 제어기의 존재조건과 제어기 설계방법을 기존 결과와는 달리 시스템 행렬의 분해나 모델 변형을 통하지 않고 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하였다. 기존의 모든 결과들이 상태에 있는 시간지연을 다룬 반면에 본 논문에서는 상태와 제어입력에 구간을 가지는 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 강인 안정성과 H_∞ 성능지수를 보장하는 제어기 설계방법을 제안하였다. 예제를 통하여 제안한 알고리듬의 타당성을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] S. Xu and C. Yang, "H_∞ state feedback control for discrete singular systems," *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. 45, no. 7, pp. 1405-1409, 2002.

[2] G. Zhang and Y. Jia, "New result on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict matrix inequality condition," *Proc. of American Control Conf.*, pp. 634-638, 2002.

[3] X. Ji, H. Su, and J. Chu, "Robust state feedback H_∞ control for uncertain linear discrete singular systems," *IET Control Theory Appl.,* vol. 1, no. 1, pp. 195-200, 2007.

[4] S. Ma, C. Zhang, and Z. Cheng, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete-time singular systems with time delay," *Journal of Computational and Applied Mathematic,* vol. 217, pp. 194-211, 2008.

[5] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with

time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 53, no. 12, pp. 1466-1470, 2006.

[6] H. Wang, A. Xue, R. Lu, and Y. Chen, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete singular time-varying delay systems based on a finite sum inequality," *Proc. of the 26th Chinese Control Conf.*, pp. 595-599, 2007.

[7] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Systems and Control Lett.*, vol. 31, pp. 129-138, 1987.

[8] S. Xu and T. Chen, "Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers," *Systems and Control Lett.*, vol. 51, pp. 171-183, 2004.

[9] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학부 부교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr