

연립방정식 모형의 계수조건 검정법 제안

소선하^a, 박유성^b, 이동희^{1,c}

^a우리은행 리스크모델 적합성검증팀, ^b고려대학교 통계학과, ^c경기대학교 경영학전공

요약

경영·경제분야에서 사용되는 모형 가운데 연립방정식 모형은 모형 내에서 결정되는 내생변수와 모형 외
부로부터 결정된 외생변수들로 구성된 M 개의 방정식과 T 개의 관찰치로 이루어진 회귀방정식체계이며, 모
형에 대한 모수식별 및 유일해의 존재여부에 대한 결정방법으로 순서조건과 계수조건이 있다. 그러나 대부
분 연립방정식 모형이 이들 조건을 만족한다는 가정하에서 모수들을 추정하기 때문에 추정값이 비효율적이
거나, 유일한 모수 추정값이 존재하지 않는 경우가 이들 조건에 따라 발생할 수 있다. 본 연구에서는 순서조
건을 만족한다는 가정 하에서 계수조건의 충족여부를 검정하기 위한 검정통계량을 새롭게 제시하고 이의 근
사분포를 도출하였으며, 이와 함께 모의실험을 통하여 제안한 검정통계량의 검정력을 살펴보았다.

주요용어: 구조모형의 식별, 순서조건, 연립방정식 모형, 축약모형.

1. 서론

관찰이나 실험에 의한 자료를 가지고 관계성을 측정하고 계량화하기 위하여 흔히 사용하는 모형 가
운데 하나가 다음과 같은 선형회귀모형(linear regression model)이다.

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.1)$$

여기서 y_t 는 종속변수, \mathbf{x}_t 는 $(k \times 1)$ 벡터인 독립변수이다. $\boldsymbol{\beta}$ 는 $(k \times 1)$ 벡터인 모수이고, u_t 에 대해서는
평균이 0이고 유한한 분산을 갖는 확률변수임을 가정한다. 우리는 이와 같은 모형을 통해 독립변수로
부터 종속변수로의 단방향 인과성(unidirectional causality)을 표현할 수 있다. 그러나 경영·경제분야에
서 간단한 경제적 요인들간에서조차 단방향 인과성으로는 설명되지 않는 경우가 많기 때문에 다수의
선형회귀모형들로 이루어진 연립방정식모형(simultaneous equations model)이 널리 사용된다 (Christ,
1985; Dhrymes, 1994).

연립방정식은 모형 (1.1)과 같은 회귀방정식 다수가 하나의 모형에 동시에 포함되는 일련의 방정
식체계(system of equations)이다. 따라서 일반적인 다중회귀모형과는 달리 연립방정식에서는 모형 내
에 포함되는 변수들의 역할을 결정하기 위한 식별문제(identification problem)가 역사적으로 중요한 문
제로 제기되어 왔다 (Cameron과 Trivedi, 2005). 그러나 변수의 모형내에서의 역할이 경제학 이론과
경험적인 연구에 의해 식별되었다 할지라도 모형에 대한 통계적 추론과정이 올바른 결과를 제시하지
는 못하며, 모형에서의 정확한 모수의 식별과 유일해가 존재하기 위해서는 수리적인 순서조건(order
condition)과 계수조건(rank condition)을 충족해야 한다 (Womer, 1985). 본 연구에서는 연립방정식
에서의 이들 조건의 충족여부를 통계적으로 검정하기 위한 검정법을 제안하고자 한다. 이를 위하여 2장
에서는 연립방정식 모형과 수리적인 차원에서 모형내의 모수 식별문제와 함께 순서조건과 계수조건의

¹ 교신저자: (120-702) 서울시 서대문구 충정로2가 71, 경기대학교 경영학전공, 전임강사. E-mail: dhl@kgu.ac.kr

내용을 구체적인 예를 통해서 문제점을 살펴보도록 한다. 3장에서는 계수조건에 대한 검증법을 소개하며 이에 대한 점근적 성질(asymptotic properties)을 고찰하였다. 4장에서는 모의 실험결과를 제시하고, 마지막 5장은 연구의 결론이다.

2. 연립방정식모형에서의 구조모형의 식별

2.1. 연립방정식 모형의 순서조건과 계수조건

T 개의 관찰값과 모형 (1.1)의 회귀방정식 M 개로 구성되는 연립방정식 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}_t' \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{x}_t' \mathbf{B} = \mathbf{u}_t', \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.1)$$

여기서 $\mathbf{y}_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tM})'$, $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tK})'$, $\mathbf{u}_t = (u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tM})'$ 그리고 $\boldsymbol{\Gamma}$ 와 \mathbf{B} 는 각각 $M \times M$, $K \times M$ 모수행렬이다. 즉 M 개의 종속변수의 적절한 선형결합을 K 개의 독립변수의 결합으로 나타낸 것이다. 여기에서 \mathbf{y}_t 는 \mathbf{x}_t 에 의해 모형내에서 결정된다는 의미에서 내생변수(endogenous variable)로, \mathbf{x}_t 는 모형외부로부터 결정되기 때문에 외생변수(exogenous variable)라 부른다. 이와 더불어 오차항 \mathbf{u}_t 는 평균은 $\mathbf{0}$, 분산공분산 행렬은 양정치(positive definite)로써 대칭행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$ 인 정규분포를 따른다고 가정한다. 모형 (2.1)은 $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T)'$, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)'$, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T)'$ 로 나타냄으로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{U}. \quad (2.2)$$

이를 연립방정식의 구조모형(structural model)이라 하며, $\boldsymbol{\Gamma}$, \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Sigma}$ 등을 구조모수(structural parameters)라 한다. 특히 이들 구조모수들은 모형의 인과관계 구조를 반영하기 때문에 연립방정식 모형의 목적은 바로 $\boldsymbol{\Gamma}$, \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Sigma}$ 에 대한 일치 추정량을 얻는 것이다. 이 경우 만약 외생변수의 수가 방정식의 개수와 동일하다면 완전연립방정식 모형이라고 하며, 다음과 같이 연립방정식의 축약모형(reduced model)으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{V}.$$

따라서 구조모형과 축약모형의 모수간의 관계를

$$\boldsymbol{\Pi} = -\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

와 같이 표현할 수 있다.

이러한 축약모형에서는 모수에 대한 최소제곱추정량(ordinary least squares estimates)

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (2.5)$$

는 불편추정량(unbiased estimates)이며 동시에 일치추정량(consistent estimates)이다. 왜냐하면 비록 축약모형의 오차항이 구조모형과는 달리 상관되어 있다 할지라도 각각의 방정식에 포함된 외생변수들이 동일한 SUR (seemingly unrelated regression)의 형태로 나타나기 때문이다 (Enders, 2004). 그러나 구조모형 (2.2)에서는 종속변수에 해당하는 \mathbf{y} 가 $\boldsymbol{\Gamma}$ 를 통해 선형결합을 이루고 있기 때문에 구조모수에 대한 최소제곱추정값은 편이(bias)를 갖는다. 따라서 축약모형에서의 최소제곱추정량 (2.5)와 축약모형과 구조모형의 모수들간의 관계 (2.4)을 이용하여 구조모형의 모수에 대한 유일해를 도출할 수

있다면, 결국 구조모형에 대한 일치추정량을 얻을 수 있게 되며, 이것의 가능성 여부가 구조모형의 식별문제(problem of identification)이다 (Deistler와 Seifert, 1978). 구조모형의 식별에서 필요한 조건이 바로 순서조건(order condition)과 계수조건(rank condition)이다. 순서조건은 구조모형을 구성하는 식(2.1) 가운데 i 번째 방정식의 식별을 위한 필요조건으로써 i 번째 방정식에 포함되지 않는 외생변수의 수가 여기에 포함되는 내생변수의 수보다 크거나 최소한 같아야함을 의미한다. 반면 계수조건은 이보다 강한 조건으로써 구조모형의 식별을 위한 충분조건으로써, 구조모형에서의 모수와 축약모형에서의 추정량간의 모형식별을 위한 일대일 대응 조건으로

$$\text{rank}(\Pi_i^*) = M_i \tag{2.6}$$

를 만족해야 한다. 여기서 Π_i^* 는 축약모형의 모수에 대한 부행렬(submatrix)로 축약모형에서의 i 번째 방정식에 포함하지 않는 모수로 이루어진 행렬을, M_i 는 축약모형의 i 번째 방정식에 포함된 표준화되지 않은 내생변수의 수를 나타낸다(이후 여기서 사용된 *표시는 포함되지 않은 변수들을 나타낸다). 이와 동치(equivalence)로써 구조모형에 대해서는 i 번째 방정식에 포함되지 않는 모수들에 대한 행렬의 계수(rank)가 전체 방정식의 수보다 1이 작음(즉 $M - 1$)을 만족하면 된다 (Judge 등, 1984).

2.2. 계수조건에서 나타나는 또다른 문제

순서조건과 계수조건은 구조모형의 식별을 위한 중요한 조건이다. 그러나 이 두 가지 조건은 단지 가설로서 세워진 모형에서만 점검되기 때문에 실제상황에서는 이 모든 조건을 만족한다 할지라도 이제까지 효율적인 추정방법으로 알려진 앞서 언급한 추정량들의 효율성과 관련하여 문제가 발생할 수 있다. 다음의 예를 통해 이 문제를 좀 더 자세하게 살펴보도록 하자. 다음과 같이 내생변수가 3개이고 외생변수가 5개인 다음과 같은 연립방정식의 구조모형을 고려해보자.

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_{11} + \gamma_2\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_{13} + x_1\beta_{11} & & + x_5\beta_{15} & = \epsilon_1 \\ \gamma_1\gamma_{21} + \gamma_2\gamma_{22} & + x_1\beta_{21} + x_2\beta_{22} + x_3\beta_{23} + x_4\beta_{24} & & = \epsilon_2 \\ \gamma_2\gamma_{32} + \gamma_3\gamma_{33} + x_1\beta_{31} + x_2\beta_{32} & & + x_5\beta_{35} & = \epsilon_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

이 예에서 두 번째 방정식에 포함된 내생변수의 수는 1이고, 반면 포함되지 않은 외생변수의 수 역시 1이므로 순서조건을 만족한다. 이와 함께 계수조건에 따라 구조모형 (2.7)의 두 번째 방정식에 대해서 포함되지 않은 내생변수에 대한 모수들로 이루어진 행렬

$$\begin{pmatrix} \gamma_{13} & \beta_{15} \\ \gamma_{33} & \beta_{35} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

의 계수(rank)가 2이므로 계수조건 역시 만족하고 있음을 알 수 있다. 따라서 두 번째 방정식은 구조모형으로의 식별이 가능하므로 구조모수에 대한 일치추정량을 얻을 수 있을 것이다. 실제로 이렇듯 순서조건과 계수조건을 만족하는 모형 (2.7)의 구조모수 $\widehat{\gamma}_i, \widehat{\beta}_i$ 에 대하여 효율적인 추정결과를 제공하는지 다음과 같은 모의실험을 통하여 살펴보았다.

우선 구조모형의 모수행렬의 참값에 대하여 관계식 (2.4)를 이용한 축약모형으로 나타난 다음, 두 번째 방정식에 포함된 구조모수 행렬의 참값을 유지한 채 계수조건 (2.6)에서 사용된 행렬 Π_i^* 의 최소 고유값이 0.1부터 점진적으로 증가하도록 축약모형의 모수행렬들을 생성한 후, 구조모수에 대한 일치추정량을 제공하는 동시에 이단계최소제곱추정법 (2-stage least squared estimation: 2SLS)에 비하여 보다 효율적인 추정량을 제공하는 것으로 알려진 삼단계최소제곱추정법 (3-stage least squared estimation: 3SLS)에 의한 결과를 살펴보았다 (Judge 등, 1984).

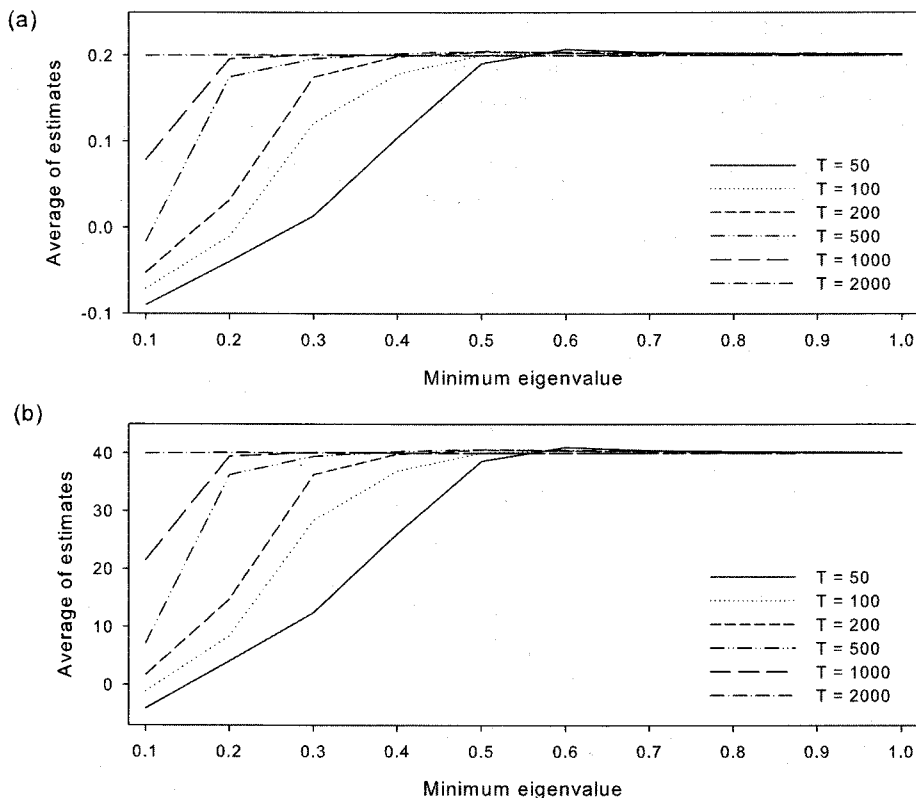


그림 1: 고유값과 표본크기 변화에 따른 식 (2.7)의 두 번째 방정식에 대한 추정량의 평균 ((a) γ_{21} , (b) β_{21})

모의실험은 표본크기를 50, 100, 200, 500, 1000, 2000의 순서로 증가시켜 가며 이루어졌으며, 동일한 표본크기에서는 외생변수의 값을 모두 같게하여 진행하였으며, 각각의 표본크기에 대하여 1000번 반복하였다. 다음의 그림 1은 두 번째 방정식 가운데 참값의 절대값이 가장 작게 설정된 $\gamma_{21}(= 0.2)$ 과 가장 크게 설정한 $\beta_{21}(= 40)$ 에 대한 3SLS 추정값의 평균값을 나타낸 것이다.

그림에서 보이듯이 표본의 크기가 매우 클 경우에는 최소고유값의 크기가 작을지라도 일치추정량을 제공하고 있는 것을 확인할 수 있다. 그러나 모의실험에서 나타나듯이 일치추정량을 제공할 수 있을 정도의 표본크기는 매우 비현실적일 정도로 커야만 가능하다. 그림 2는 γ_{21} 과 β_{21} 에 대한 3SLS 추정값의 평균제곱오차의 제곱근 (root mean squared error: RMSE)을 나타낸 것이다. 표본의 크기에 따라 차이는 있지만 최소고유값이 작은 경우에 추정값들이 매우 불안정하게 나타나고 있음을 볼 수 있다.

이와 같은 모의실험 결과로부터 식별가능한 연립방정식일지라도 실제로는 계수조건을 위한 다른 방정식의 모수행렬의 상태에 따라 효율적인 추정결과를 제공하지 못한다는 것을 확인할 수 있다. 실제로 모의실험 과정에서 두 번째 방정식에 포함되지 않은 구조모수들은 고유값의 크기에 상관없이 정확한 추정값은 물론 검정결과까지 유의하게 제공되고 있지만, 두 번째 방정식의 경우는 표본크기가 크더라도 고유값이 작은 경우에는 구조모수의 추정결과까지 유의하지 않게 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 최소 고유값이 어느정도 이상이어야 구조모수의 추정값이 안정적인지에 대한 기준을 제공할 수 있다면 비록 계수조건을 만족한다고 할지라도 그 추정결과가 믿을만한지에 대한 여부를 판정하는데 도움이 될 수 있을 것이다. 우리는 다음 장에서 이와 관련된 검정법을 제안하고자 한다.

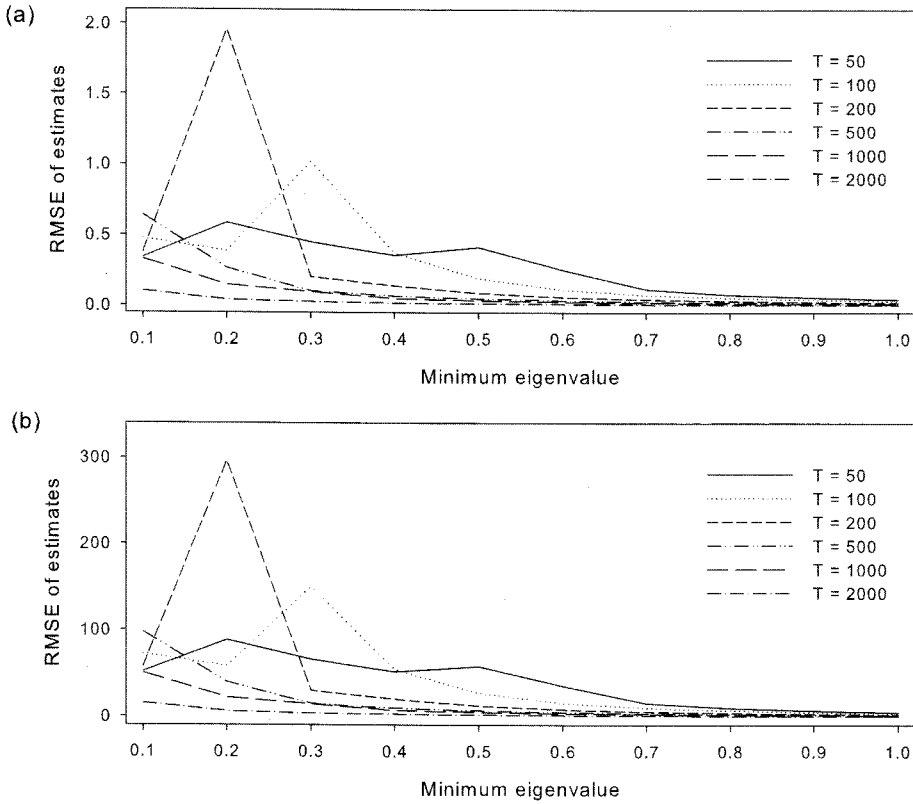


그림 2: 고유값과 표본크기 변화에 따른 식 (2.7)의 두 번째 방정식에 대한 추정량의 평균제곱오차 ((a) γ_{21} , (b) β_{21})

3. 계수조건에 대한 검정법

순서조건과 계수조건에 의하여 식별된 모형은 구조모수에 대한 효율적인 추정결과를 제공할 수 있어야 하지만 앞에서 살펴봤듯이 계수조건 점검을 위한 축약모형의 모수행렬의 부행렬 Π_i^* 의 최소고유값이 0에 가깝다면 축약모형을 통해 얻은 모수추정량은 구조모수에 대한 효율적인 추정결과를 제공하지 못한다. 따라서 순서조건 및 계수조건과 함께 행렬 Π_i^* 에 대한 고유값을 살펴봄으로써 보다 원래의 추정방법들이 효율적인 추정결과를 제공할 수 있는 조건을 살펴볼 수 있다. 이를 위해 전체 축약모형 (2.3)으로부터 i 번째 방정식에 대한 모수행렬을 분할하여 각각의 부행렬들로 표현함으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Greene, 1997).

$$\begin{pmatrix} y_i & Y_i' & Y_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i' & x_i'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_i & \Pi_i & \bar{\Pi}_i \\ \pi_i^* & \Pi_i^* & \bar{\Pi}_i^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i & V_i & V_i^* \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

따라서 i 번째 방정식의 계수조건에 해당하는 부행렬은 Π_i^* 으로써 계수가 M_i 인 $K_i^* \times M_i$ 이며, M_i 는 i 번째 방정식의 표준화되지 않은 내생변수의 수를 K_i^* 는 i 번째 방정식에 포함되지 않은 외생변수의 수를 나타낸다. 단 순서조건에 의해 $M_i \leq K_i^*$ 를 만족한다.

우리는 이와 같은 행렬 Π_i^* 의 고유값에 대한 근사분포를 유도하여 이를 이용한 계수조건에 대한 검정법을 제안하고자 한다. 우선 행렬 Π_i^* 는 항상 대칭행렬인 것은 아니므로 고유값을 구하기 위해 다음

과 같은 비정칙분해(singular value decomposition)을 이용하였다.

$$\Pi_i^* = L \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} M', \quad (3.2)$$

여기서 행렬 L, M 은 직교행렬이며, Δ 의 대각원소는 $\Pi_i^* \Pi_i^*$ 의 고유값의 양의 제곱근으로 이루어진다. 이제 다음의 정리를 이용하여 최소고유값의 근사분포를 얻을 수 있다.

정리 1. 식 (3.1)의 모수행렬 가운데 부행렬 Π_i^* 의 고유값을 $f_1(\pi_i), \dots, f_{M_i}(\pi_i)$ 라 하자. 단 $f_1(\pi_i) \geq f_2(\pi_i) \geq \dots \geq f_{M_i}(\pi_i)$ 이고 $\pi_i = \text{vec}(\Pi_i^*)$ 이다. 이때 i 번째 축약모형에서의 최소제곱추정량을 이용한 최소고유값 $f_{M_i}(\hat{\pi}_i)$ 의 분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{T} \left(f_{M_i}(\hat{\pi}_i) - f_{M_i}(\pi_i) \right) \xrightarrow{d} N \left(\mathbf{0}, \mathbf{J}'_{M_i} \left[\bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{A}} + Q_{x_i^* x_i} Q_{x_i^* x_i}^{-1} \bar{\mathbf{A}} Q_{x_i^* x_i}^{-1} Q_{x_i^* x_i}^{-1} \bar{\mathbf{C}}')^{-1} \bar{\mathbf{C}}' \right]^{-1} \mathbf{J}_{M_i} \right),$$

여기서 $Q_{AB} = \lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{A}\mathbf{B})/T$, $\mathbf{J}_{M_i} = (\partial/\partial \pi) \mathbf{f}_{M_i}(\pi_i)$, $\bar{\mathbf{C}} = (Q_{x_i^* x_i} - Q_{x_i^* x_i} Q_{x_i^* x_i}^{-1} Q_{x_i^* x_i})$, $\bar{\mathbf{A}} = (\Omega_i \otimes Q_{x_i^* x_i})$ 이며, Ω_i 는 i 번째 축약모형에 대응하는 분산공분산행렬이다.

증명: 축약모형의 전체 모수행렬에 대한 최소제곱추정량으로 이루어진 $\text{vec}(\hat{\Pi})$ 를 $\hat{\pi}$ 라 나타내면, $\hat{\pi}$ 는 근사적으로 평균이 π 이고 분산이 $\Omega \otimes Q_{x^* x}^{-1}$ 인 정규분포를 따른다 (Fomby 등, 1984). 이와 함께 i 번째 축약모형에 대한 방정식 (3.1)로부터 y_i 에 대응되는 방정식은

$$y_i = \begin{pmatrix} x_i' & x_i^{*'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_i \\ \Pi_i^* \end{pmatrix} + v_i$$

와 같으므로, 이들로부터 최소제곱추정량 $\hat{\pi}_i$ 의 근사분포는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\sqrt{T}(\hat{\pi}_i - \pi_i) \xrightarrow{d} N \left(\mathbf{0}, \left[\bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{A}} + Q_{x_i^* x_i} Q_{x_i^* x_i}^{-1} \bar{\mathbf{A}} Q_{x_i^* x_i}^{-1} Q_{x_i^* x_i}^{-1} \bar{\mathbf{C}}')^{-1} \bar{\mathbf{C}}' \right]^{-1} \right) \quad (3.3)$$

따라서 $\hat{\pi}_i$ 의 고유값에 대해서 $\mathbf{f}(\hat{\pi}_i) = (f_1(\hat{\pi}_i) \dots f_{M_i}(\hat{\pi}_i))'$ 라 하면

$$\mathbf{f}(\hat{\pi}_i) = \mathbf{f}(\pi_i) + \frac{\partial f_j}{\partial \hat{\pi}_k}(\pi_i)(\hat{\pi}_i - \pi_i) + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right)$$

이고, 결국 $\sqrt{T}(\mathbf{f}(\hat{\pi}_i) - \mathbf{f}(\pi_i))$ 의 분포는 $\sqrt{T} \partial f_j / \partial \hat{\pi}_k(\pi_i)(\hat{\pi}_i - \pi_i)$ 와 같으므로, 식 (3.3)을 이용하여 고유값의 근사분포를 얻을 수 있다. \square

4. 모의실험

우리가 제안한 계수조건 검정방법의 유효성을 살펴보기 위하여 모의실험을 실시하였다. 모의실험에서는 계수조건에 대한 부행렬의 0보다 큰 고유값이 행렬의 원소로 이루어진 연속함수라고 가정하고 원소들을 적당히 변화시키면서 고유값과 그에 대응하는 검정력 그리고 평균제곱오차 (MSE)를 살펴보았다. 단 우리가 제안한 검정방법을 사용하기 위해서는 편미분행렬에 대한 값이 필요한데, 방정식이 3개일 경우 부행렬의 고유값은 2차 방정식의 형태로서 근의 공식에 의하여 정확하게 유도할 수 있으므로 이에 대응하는 일차 편미분 행렬을 사용할 수 있으나, 방정식이 4개 이상이며, i 번째 방정식에 포함된 표준화되지 않은 내생변수가 3개 이상일 경우 3차 이상의 방정식을 풀어야하므로 문제점이 발생하

표 1: 고유값에 따른 유의수준과 검정력의 비교: 방정식이 3개인 경우

표본크기(T)	귀무가설	실제 최소고유값			
		0.3	0.5	0.7	0.9
50	0.3	0.053	0.196	0.674	0.869
	0.5	0.185	0.057	0.135	0.394
	0.7	0.386	0.144	0.052	0.090
	0.9	0.603	0.278	0.150	0.051
100	0.3	0.050	0.357	0.813	0.995
	0.5	0.316	0.046	0.168	0.743
	0.7	0.695	0.206	0.048	0.207
	0.9	0.913	0.530	0.190	0.050
150	0.3	0.047	0.557	0.996	0.999
	0.5	0.392	0.046	0.648	0.913
	0.7	0.758	0.312	0.047	0.322
	0.9	0.962	0.775	0.220	0.049
200	0.3	0.048	0.668	0.987	1.000
	0.5	0.487	0.049	0.397	0.976
	0.7	0.898	0.322	0.050	0.367
	0.9	0.996	0.802	0.334	0.043

표 2: 고유값에 따른 유의수준과 검정력의 비교: 방정식이 4개인 경우

표본크기(T)	귀무가설	실제 최소고유값			
		0.3	0.5	0.7	0.9
T = 50	0.3	0.058	0.099	0.632	0.908
	0.5	0.143	0.051	0.104	0.424
	0.7	0.255	0.120	0.057	0.086
	0.9	0.595	0.334	0.134	0.053
T = 100	0.3	0.050	0.353	0.815	1.000
	0.5	0.222	0.051	0.194	0.814
	0.7	0.464	0.151	0.048	0.234
	0.9	0.963	0.587	0.223	0.049
T = 150	0.3	0.048	0.515	0.932	1.000
	0.5	0.304	0.047	0.280	0.817
	0.7	0.661	0.211	0.051	0.239
	0.9	0.998	0.927	0.323	0.045
T = 200	0.3	0.050	0.602	0.983	1.000
	0.5	0.364	0.049	0.394	0.908
	0.7	0.776	0.256	0.050	0.292
	0.9	1.000	0.954	0.479	0.047

게 된다. 이때 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 도함수의 정의를 이용한 수치미분 결과를 사용하였으며, 이때 필요한 δ 는 $\sqrt{\text{Var}(\pi)}/100$ 를 사용하였다.

모의실험은 방정식이 각각 3개와 4개일 경우에 대해서 실시하였는데, Judge 등 (1987)에서 분석사례로 사용된 모형들에 대해서 외생변수값은 그대로 유지한 채, 여기서 제공된 공분산 행렬을 기준으로 다변량 정규분포로부터 오차를 생성한 후, 이에 따라 내생변수의 값을 다시 생성하였다. 이 과정에서 각 연립방정식의 구조모수는 제공된 추정값을 참값으로 사용하고, 앞서의 예에서와 같이 축약모형의 모수행렬 가운데 두 번째 방정식에 포함되지 않는 나머지 모수행렬들의 값의 고유값을 변화시켜 가면서 우리가 제안한 검정방법의 검정결과를 살펴보았다. 표 1과 2는 방정식의 개수에 대한 유의수준과

표 3: 고유값에 따른 추정치의 MSE비교: 방정식이 3개인 경우

표본크기(T)	고유값	모수의 참값			
		3	2	8	-7
$T = 50$	0.3	0.77	2.18	3.61	7.33
	0.5	0.44	1.34	2.37	4.48
	0.7	0.24	0.78	1.57	3.07
	0.9	0.16	0.51	1.53	1.48
$T = 100$	0.3	0.17	0.50	1.13	1.55
	0.5	0.09	0.31	0.75	1.01
	0.7	0.07	0.22	0.56	0.76
	0.9	0.05	0.16	0.34	0.57
$T = 150$	0.3	0.14	0.41	0.86	1.17
	0.5	0.08	0.24	0.58	0.69
	0.7	0.05	0.17	0.44	0.49
	0.9	0.02	0.08	0.23	0.30
$T = 200$	0.3	0.09	0.26	0.53	0.87
	0.5	0.06	0.21	0.45	0.69
	0.7	0.04	0.12	0.28	0.42
	0.9	0.03	0.11	0.25	0.35

표 4: 고유값에 따른 추정치의 MSE비교: 방정식이 4개인 경우

표본크기(T)	고유값	모수의 참값				
		0.5	-1.9	1.3	14	-7
$T = 50$	0.3	0.79	2.10	13.16	168.47	29.62
	0.5	0.45	0.85	8.43	56.86	13.19
	0.7	0.08	0.08	1.97	6.25	2.33
	0.9	0.03	0.003	1.15	10.53	3.68
$T = 100$	0.3	2.19	5.94	33.82	438.91	78.96
	0.5	0.15	0.29	2.79	20.20	4.35
	0.7	0.03	0.03	0.81	2.99	1.01
	0.9	0.01	0.01	0.46	3.14	1.55
$T = 150$	0.3	0.29	0.95	4.52	77.89	16.93
	0.5	0.043	0.09	0.88	7.75	1.84
	0.7	0.02	0.01	0.46	1.77	0.65
	0.9	0.01	0.01	0.33	2.49	1.13
$T = 200$	0.3	0.32	0.90	4.98	72.48	15.32
	0.5	0.04	0.08	0.82	6.06	1.49
	0.7	0.02	0.02	0.47	1.43	0.62
	0.9	0.01	0.01	0.24	2.25	0.87

검정력을 나타낸다. 이들 표에서 나타나는 두번째 열이 귀무가설이므로 대각선 방향으로 나타내는 값이 유의수준이며 이를 제외한 값들이 각각의 최소고유값에 따른 검정력이다. 표본크기(T)와 최소고유값에 관계없이 정리 1에 제시된 검정통계량은 일반적인 유의수준 $\alpha = 0.05$ 를 비교적 잘 유지하고 있으며 최소고유값이 귀무가설에서 멀어짐에 따라 검정력은 증가하고 있다. 또한 표본크기가 증가함에 따라 검정력이 증가하는 것을 볼 수 있다. 표 3과 4는 방정식이 각각 3개, 4개일때 최소고유값의 변화에 따른 MSE를 나타낸다. MSE는 최소고유값이 작아질수록 크게 나타나고 있으며 최소고유값이 작더라도 표본크기가 증가할수록 MSE가 안정되고 있음을 볼 수 있다. 그러므로 안정적인 MSE, 즉 안정적인 모수추정치를 얻기 위해 표본크기에 따라 최소고유값이 어느 정도가 되어야 하는가에 대한 기준이 필

요하다. 이에 본 연구에서는 우리가 제안한 검정법에 의해 추정된 최소고유값의 99% 하한값이 0보다 커야한다는 기준을 제시한다.

우선 방정식이 3개인 경우를 살펴보자. 모의실험을 통해서 표본크기가 50일 경우 최소고유값이 0.9 이상이어야 99% 신뢰하한이 0보다 컸으며, 표본크기가 100일 경우 최소고유값이 0.5 이상 그리고 표본크기가 각각 150, 200인 경우에는 최소고유값이 0.3 이상이어야 우리가 제시한 검정통계량에 의한 0보다 큰 신뢰하한이 나타났다. 이제 표 3을 살펴보면, 앞서 설명하였듯이 신뢰하한이 0보다 큰 최소고유값을 갖는 경우에서만 모수 추정치에 대한 MSE가 보다 안정적임을 확인할 수 있다.

방정식이 4개일 경우는 표본크기가 50일 경우 최소고유값이 0.7이상에서 신뢰하한이 0보다 크게 나타났다. 표 4에서 살펴보면 최소고유값이 0.7일때 MSE가 급격히 감소하였다. 표본크기가 100일 경우는 최소고유값이 0.5 이상이 되어야 신뢰하한이 0보다 컸는데 표 4에 나타난 모의실험 결과 최소고유값이 0.5 이상이면 MSE는 매우 안정적이다. 표본크기가 150, 200일 경우 최소고유값이 0.3보다 커야 신뢰하한이 0으로 나타났는데, 표 4에서 나타나듯이 최소고유값이 0.3보다 큰 경우에서야 MSE가 안정적인 모습을 보이고 있다.

5. 결론

순서조건과 계수조건을 만족한다면 연립방정식에 대해서는 최소제곱추정법이 아닌 구조모수에 대해 일치추정량을 제공하는 것으로 알려진 추정방법들을 사용함으로써 효율적인 추정결과를 얻을 수 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 연립방정식이 계수조건을 만족하더라도 본 연구에서 나타나듯이 일부 방정식의 모수에 포함되지 않는 모수행렬의 최소고유값이 작을 경우 구조모수에 대한 불안정한 추정결과를 제공되게 된다. 특히 현실에서 사용하게 되는 적당한 크기의 표본을 가지고는 최소고유값이 작을 경우에 기존의 추정방법으로는 부정확한 결과를 제공하고 있음을 모의실험을 통해 확인하였다.

본 연구에서는 계수조건 점검을 위한 행렬의 최소고유값이 0보다 클 때 최소고유값의 근사분포를 유도하였고, 이를 통해 최소고유값이 어느 값 이상이어야 구조형식에서의 모수의 추정량이 안정적인 지에 대해 99% 신뢰하한이 0이상일때의 최소고유값을 선택하였다. 모의실험을 통해 고유치의 유의수준과 검정력을 살펴본 결과 본 논문에서 도출한 근사분포가 최소고유값이 클 때 유의수준과 검정력을 잘 유지하고 있으며 고유치가 0에 가까울수록 검정력이 다소 떨어지는 모습을 보였다. 또한 추정된 최소고유값의 99% 신뢰하한이 0보다 클 때 구조모수의 추정량이 안정적임을 모의실험을 통해 보여주었다. 그러므로 우리가 제안한 검정법에 의한 최소고유값의 99% 신뢰하한이 0보다 커야 구조모수의 추정결과를 믿을 수 있다. 만약 99% 신뢰하한이 0보다 작다면 현재의 방정식에 사용한 외생변수만으로는 충분한 정보를 제공하지 못한다는 것을 의미하므로, 방정식에 포함된 내생변수와 관련된 또다른 외생변수를 추가해야 할 것이다.

감사의 글

연구과정에서 저자들이 간과했던 중요한 오류를 수정할 수 있도록 개선점을 제시해 주신 익명의 두 분 심사위원님께 감사드립니다.

참고 문헌

- Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005). *Microeconometrics: Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Christ, C. F. (1985). Early progress in estimating quantitative economic relationships in America, *American Economic Review*, 75, 39-52.

- Deistler, M. and Seifert, H. G. (1978). Identifiability and consistent estimability in econometric models, *Econometrica*, **46**, 969–980.
- Dhrymes, P. J. (1994). *Topics in Advanced Econometrics*, Springer-Verlag, New York.
- Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- Fomby, T. B., Hill, R. C. and Johnson, S. R. (1984). *Advanced Econometric Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Greene, W. H. (1997). *Econometric Analysis*, Prentice-Hall, New York.
- Judge, G. G., Hill, R. C., Griffith, W. E., Lütkepohl, H. and Lee, T. C. (1984). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.
- Womer, N. K. (1985). Identification and least squares in simultaneous equations, *The American Statistician*, **39**, 259–297.

2008년 8월 접수; 2008년 12월 채택

A Test of the Rank Conditions in the Simultaneous Equation Models

Sunha So^a, Yousung Park^b, Dong-Hee Lee^{1,c}

^aRisk Model Validation Team, Woori Bank, ^bDept. of Statistics, Korea Univ.,
^cDept. of Business Administration, Kyonggi Univ.

Abstract

Simultaneous equation models, which are widely used in business and economic areas, generally consist of endogenous variables determined within models and exogenous variables externally determined and in the simultaneous equations model framework there are rank and order conditions for the model identification and the existence of unique solutions. By contrast, their estimating results have less efficiencies and furthermore do not exist, since the most estimating procedures are performed under the assumptions for rank and order conditions. We propose the new statistical test for sufficiency of the rank condition under the order condition, and show the asymptotic properties for the test. The Monte Carlo simulation studies are achieved in order to evaluate its power and to suggest the baseline for satisfying the rank conditions.

Keywords: Model identification, order condition, rank condition, simultaneous equation model.

¹ Full-time Lecturer, Department of Business Administration, Kyonggi University, Seoul 120-702 Korea. E-mail: dhl@kgu.ac.kr