韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 23집 제 1호, 2009. 2. 39-51

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 1, Feb. 2009. 39-51

교수매체로써 칠교판을 활용한 영재교육 자료 개발

심 상 길 (단국대학교)

영재를 위한 교육 자료의 개발을 위해 주제 선정에서는 학습자에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있고, 다양한 전략이나 해결 방법을 가지는 학습 문제를 선정하고, 내용면에서는 보다 추상적이고, 복잡하고, 서로 다른 영역의 내용을 함께 다루어야 한다. 이를 위하여 교수매체로써 가장 널리 알려진 칠교판을 사용하여 단계적이고 다양한 문제로 이루어진 활동을 구성하기 위해, 칠교판의 조각들의 특징과 조각의 선택에 따른 조합을 이용하여 가능한 모든 경우가 답이 되는 도형 찾기, 가장 많은 답이 있는 모양 찾기 등을 문제 제기와 제기된 새로운 문제 상황에서 추측하고 추론하는 활동의 예를 제시하였다. 이를 통하여 수학적 힘과 창의성 및 분석력과 종합력 등 고차원적인 사고력을 길러주는 다양한 경험을 제공할 수 있다.

I. 서 론

수학과 영재교육과정은 일반 교육과정을 바탕으로 하되 속진보다는 심화를 통하여 수학문제해결에 그치지 않고 수학을 만들어 내는 수학적 힘을 강화하여 수학분야에서의 지속적인 연구를 하기 원하는 전문 수학자를 만들어 내는 것을 목표로 한다(한국교육개발원, 1999). 이러한 영재교육의 대상이 되는 학생들은 일반 학생들과 다른 프로그램과 학습지도가 필요하다. NCTM의 '학교수학의 원리와 규준'(2000)에서는 수학에 특별한 재능이나 관심을 가진 학생들에게 그들이 도전하고 참여할 수 있는 풍부한 프로그램이나 추가적인 수단이 필요하고, 이러한 학생들의 재능과 흥미는 그들이 더 나은 기회를 갖고 안내를 받을 수 있도록 키워져야 하고 뒷받침되어야 한다고 언급하고 있다.

영재를 위한 교육 자료는 뛰어난 재능을 가진 학생들의 지적 욕구를 충족시키고 잠재력을 최대한 계발하는데 적절한 것이어야 하고, 수학 영재의 특성에 맞게 개발된 교육 자료는 수학적 힘과 창의성 및 분석력과 종합력 등 고차원적인 사고력을 길러 줄 수 있어야 한다. 특히, 영재들에게 새로운 문제 상황에서 다양한 경험을 제공하고, 고차원적인 사고력을 기를 수 있도록 교수매체로써 조작교구의 활용을 제안하고 있다(한국교육개발원, 1999; 박영희, 1999; 이경화, 1999; 신현용, 한인기, 이종욱, 2000; 남승인, 2003). 교수매체란 교수의 매개체로서 교수-학습 과정에서 학습에 자극을 부여할 수 있는 사물이나 구성 요소를 의미하는 것이다. 교수 공학적 접근에서 교수매체의 범위는 이처럼

* 접수일(2009년 1월 2일), 심사(수정)일(2009년 1월 16일), 게재확정일자(2009년 1월 23일)
* ZDM 분류 : U63
* MSC2000 분류 : 97U60
* 주제어 : 교수매체, 칠교판, 영재교육 자료 개발

제한된 것이 아니다. 교수매체는 모든 종류의 교수·학습 자료를 포함하는 일체의 교육환경을 말한다. 여기서 말하는 교육환경은 교사의 교수기술 및 학습 분위기까지도 포함한다. 따라서 오늘날의 교수매체의 개념은 이러한 총체적 교육환경으로서 효율적인 조화를 강조한다(이영자, 박미라, 최경애, 1999). 본 연구에서 조작교구뿐만 아니라 이를 이용한 교수자료, 교사의 발문, 학생의 문제제기 활동 등을 모두 포함하는 의미로 조작교구보다는 보다 넓은 의미의 교수매체라는 용어를 사용하였다.

교구를 이용한 퍼즐은 물리적 조작과 정신적 조작을 자연스럽게 통합시킬 수 있으며, 학생들이 교구 조작으로부터 발견한 일정한 규칙성은 수학적 원리·법칙 그 자체이다. 초·중등학교에서 다루는 대부분의 수학적 개념이나 지식의 이해에는 단순한 물리적 추상화로서가 아닌 실제로 행동하고 행동의 결과를 반성하는 과정, 즉 반영적 추상화 과정을 거치면서 배운다고 볼 때, 퍼즐은 단순한 조작 또는 반복 연습이나 훈련의 차원을 훨씬 넘어서는 능동적이고 탐구적인 활동과 자기 조절과정을 통하여 외적인 현상으로부터 내적인 지식으로 유도·대체할 수 있다(남승인, 2003).

영재교육에서 이러한 교수매체로써 조작교구의 활용에 대한 연구로, 박영희(1999)는 소마큐브를 활용한 3×3×3 정육면체와 다양한 입체도형 만들기를 소개하고 있고, 이경화(1999)는 칠교판을 사용하여 일부 조각을 사용하여 다각형 만들기, 주어진 넓이에 맞는 다각형 만들기, 2세트로 정사각형 만들기 등을 소개하고 있고, 한국교육개발원의 '수학과 영재교육과정 시안'(1999)에서는 칠교판 조각들 사이의 기본관계, 패턴, 논리, 넓이 등 탐구, 다각형 만들기, 합동과 닮은 도형 만들기, 칠교판의 변형 탐구, 모자이크 퍼즐 탐구, 펜토미노와 헥소미노를 이용한 모양 채우기와 만들기, 패턴블록을 이용한 모양 만들기, 패턴 찾기, 대칭, 회전, 뒤집기, 각 만들기, 각도 구하기 등과 소마큐브의 해 탐구와 같은 내용을 소개하고 있다. 이러한 조작교구를 보다 폭넓게 활용하기 위해 각 교구들의 특징과 조각의 선택에 따른 조합을 이용하여 가능한 모든 경우가 답이 되는 도형 찾기, 가장 많은 답이 존재하는 도형 찾기 등의 문제 제기와 제기된 새로운 문제 상황에서 추측하고 추론하는 활동을 통해 수학적 힘과 같은 고차원적인 사고력을 길러주는 다양한 경험을 제공할 수 있다.

본 연구에서는 영재의 특성에 맞는 교육 자료 개발에 대해 알아보고, 영재교육에서 가장 널리 사용되고 있는 교수매체로써 조작교구 중 칠교판의 특징과 조각의 선택에 따른 조합을 구하는 방법에 대해 탐구하고, 영재 학생들에게 제공할 수 있는 새로운 문제 상황에 따른 칠교판의 활용의 예를 소개함으로써 영재를 위한 교육 자료 개발에 대한 시사점을 찾고자 한다.

II. 영재를 위한 교육자료 개발

일반적으로 수업지도나 교육과정, 교육프로그램 개발에서 가장 먼저 수행되고 제일 신경을 많이 쓰는 부분이 내용의 선택이다. 즉 어떤 내용을 가르칠 것인가 하는 것이다. 내용이 먼저 결정된 후에 신장해야 할 사고 능력과 태도, 그리고 산출물이 결정되게 된다. 산출물을 거창하게 하는 것보다 영재 학생들에게 적합한 내용을 찾는데 보다 신경을 쓰고, 내용이 먼저 결정된 후에 고차적 사고 능력

의 함양에 신경을 써야 한다. 내용은 일반 교육과정이 기본이 되어 이로부터 아이디어를 얻어서 구성된다. 영재 학생을 위한 내용은 일반 학생을 위한 내용보다 다음과 같은 점이 차이가 있어야 한다(김홍원, 2003).

① 보다 추상적(abstractness)이어야 한다. 학습 내용은 추상적인 수준에 따라 데이터 수준, 개념 수준, 일반화 수준으로 나눌 수 있다. 영재교육과정에서는 보다 상위 수준의 것을 다루어야 한다.

② 보다 복잡해야(complexity) 한다. 영재를 위한 내용에 포함되는 개념의 수와 영역의 수는 일반 교육과정에서보다 많아야 한다.

③ 영재를 위한 교육과정은 그 내용에서 간학문적 개념이나 주제, 다양한 학문분야, 한 교과 내에서는 서로 다른 영역의 내용을 함께 다루어야 한다. 즉 보다 통합적(integration)이어야 한다.

영재를 위한 교육내용은 '깊이'와 '복잡성'에서 일반 학생을 위한 내용과 차이가 있어야 한다. 즉 쉬운 것에서 어려운 것으로, 구체적인 것에서 추상적인 것으로, 특정한 것에서 일반적인 것으로 나가야 한다.

수학영재의 지적, 정의적 특성을 반영하여 창의성을 신장시키기 위한 프로그램 개발의 기본 방향과 준거를 설정하였다. 프로그램 개발의 기본 방향을 주제 중심, 활동 중심, 개방적 교육과정, 학습자 중심으로 정하였으며, 프로그램 개발의 준거는 다음과 같다(신현용, 한인기, 이종욱, 2000).

첫째, 학습자에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있는 주제를 선정한다. 영재에게 호기심과 자발성을 가지면서 과제에 대한 강한 집착성을 가지게 하는 주제들은 감각적으로 조작하는 활동, 다양한 작품 만들기, 퍼즐 활동, 여러 가지 게임 활동, 실생활과 관련되는 문제들, 그리고 컴퓨터 활동 등을 들 수 있다. 영재의 행동 특성 중 동기적 특성에서 영재는 사물의 인과 관계를 규명하고자 하는 욕구가 강하며, 주어진 문제에 의문을 제기하며, 호기심이 많다. 그러나 일상적인 일에는 쉽게 싫증을 내는 경향이 있기 때문에 학습 내용은 내적 동기를 자극할 수 있는 내용이어야 한다.

내적 동기를 자극하기 위해서는 적당히 어려운 과제를 제시하거나, 보다 높은 포부 수준의 목표를 강조하며, 다소의 장애와 곤란을 극복하는 과제를 제시하여 수학 학습은 재미있는 것, 즐겁게 할 수 있는 것, 관심과 의욕을 가지고 해 볼만한 것, 나도 해결할 수 있다는 자신감과 성취의 희열을 가질 수 있는 과제를 선정하는 것이 가장 중요하다.

둘째, 다양한 전략이나 해결 방법을 가지는 학습 문제를 선정한다. 정답이 하나 뿐인 문제에 대해서 학생들은 문제에 대한 답을 발견하고 나면 더 이상 그 문제를 생각하지 않게 된다. 그러나 여러 가지의 전략이 가능하며 해결 방법이 다양할 때 학생들은 문제에 대해서 더 깊이 생각하게 되고 결론을 더욱 정교화 하도록 노력할 것이다. 그래서 학습과제는 많은 양을 제시하기 보다는 한 가지 문제라도 핵심적인 문제를 제시하여 충분히 사고할 수 있도록 해야 한다.

수학영재는 문제의 구조를 파악하는 분석 종합하는 능력이 우수하고, 문제해결에 필요한 많은 아

이디어를 창출할 수 있는 능력이 있는 아동이다. 따라서 영재를 위한 학습 문제는 가능한 많은 해결 방법을 가지는 학습내용으로 구성되어야 한다.

셋째, 자기 주도적 학습이 이루어지는 학습 문제를 선정해야 한다. 창의성의 정의적 특성 이론에서 창의적인 학습자는 독립심과 자기표현 의욕이 강하다. 정신적으로 건강한 인간의 자기실현을 위해서는 흥미로운 과제를 선정하여 학습자에게 내적 동기를 유발시켜, 결국에는 자기 주도적인 학습이 이루어지도록 해야 할 것이다.

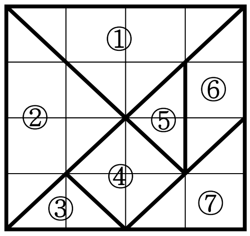
넷째, 학습 문제는 단계적으로 구성되어야 한다. 창의성을 신장시킬 수 있는 자료를 개발하기 위해서는 먼저 창의성을 구성하고 있는 각종 요소들을 추출하고 이들을 학생들의 수준에 따라 계열을 선정하는 작업을 해야 한다.

다섯째, 다양한 활동으로 이루어진 학습 문제를 선정한다. 여기서 주의할 것은 단순한 게임이나 퍼즐, 실험, 탐구 등이 서로 이질적이고 단편적인 내용으로 구성되어서는 안 된다는 것이다. 이러한 활동들은 하나의 주제를 향하여 일관성을 가지면서 종합적으로 재구성되어야 한다.

III. 칠교판 활동에서 해를 찾기 위한 조각의 선택에 따른 조합

영재를 위한 교육 자료의 개발을 위해 주제 선정에서 학습자에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있고, 다양한 전략이나 해결 방법을 가지는 학습 문제를 선정(신현용, 한인기, 이종욱, 2000)하기에 적합한 교수매체로써 가장 널리 사용되고 있는 칠교판의 활용에 대해 살펴보도록 하겠다. 기존의 연구(이경화, 1999; 한국교육개발원, 1999)에서 칠교판의 활용은 일반적으로 주어진 모양을 채우거나 일부 또는 전부를 사용하여 다각형 만들기, 조각들 사이의 기본 관계, 패턴, 논리, 넓이 등 탐구, 합동과 닮은 도형 만들기 등 다양한 주제를 소개하고 있다. 본 연구에서 내용면에서 보다 추상적이고, 복잡하고, 서로 다른 영역의 내용을 함께 다루기(김홍원, 2003) 위해 주어진 도형을 채우거나 조건에 맞는 다각형을 만드는 것이 아니라 칠교판 조각들의 특징을 파악하고 조각들의 선택에 따른 조합을 탐구하여 서로 다른 해답을 찾는 활동에 대해 다루도록 하겠다.

우선, 칠교판을 활용한 활동에서 조각들의 특징을 파악하기 편리하도록 넓이가 같은 작은 정사각형 16개로 분할한 격자 위에 칠교판의 각 조각들을 표시하고, 조각들의 이름을 부르기 편리하도록 <그림 1>과 같이 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦번 조각으로 이름을 붙이도록 하겠다(심상길, 조정길, 2008).



<그림 1> 칠교판의 구성

칠교판 조각 중 가장 작은 ③, ⑤번 조각의 넓이를 1이라고 하면, ④, ⑥, ⑦번 조각의 넓이는 2이고, ①, ②번 조각의 넓이는 4가 된다. 따라서 넓이가 4인 조각 두 개, 넓이가 2인 조각 세 개, 넓이가 1인 조각 두 개이므로 모든 조각을 사용할 경우 넓이가 16인 도형을 만들 수 있다. 또, 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 도형들의 넓이는 1부터 16까지이며 각 넓이마다 사용가능한 조각들의 조합을 찾기 위해 다음의 부정방정식을 생각할 수 있다.

$$x = a + 2b + 4c$$

여기서, x는 칠교판으로 만들 수 있는 도형의 넓이이고, a는 넓이가 1인 조각의 개수, b는 넓이가 2인 조각의 개수, c는 넓이가 4인 조각의 개수이다. 또, x, a, b, c 의 범위를 구하면 다음과 같다.

$$0 \le x \le 16,\ \ 0 \le a \le 2,\ 0 \le b \le 3,\ 0 \le c \le 2$$

따라서 x가 1인 경우 $(a=1,\ b=0,\ c=0)$이고, x가 16인 경우 $(a=2,\ b=3,\ c=2)$이다. 또, x에 따라 여러 가지 경우가 존재하는 경우도 있다. 예를 들어, x가 4인 경우 $(a=2,\ b=1,\ c=0)$, $(a=0,\ b=2,\ c=0)$, $(a=0,\ b=0,\ c=1)$과 같이 세 가지 경우가 있다.

칠교판 조각 중 가장 작은 조각인 넓이가 1인 두 조각은 합동이므로 a가 1일 때 조각을 선택하는 경우는 한 가지이고, a가 2일 때도 한 가지이다. 넓이가 2인 조각은 모양이 서로 다른 세 조각으로 구성되어 있으므로 b가 1일 때 조각을 선택하는 경우는 세 가지이고, b가 2일 때도 세 가지이고, b가 3일 때는 한 가지이다. 가장 큰 조각인 넓이가 4인 두 조각도 a와 같이 합동이므로 c가 1 또는 2일 때 조각을 선택하는 경우는 한 가지이다.

예를 들어, 넓이가 4인 도형을 만들기 위해 서로 다른 조각들을 선택하는 경우는 다음과 같다.

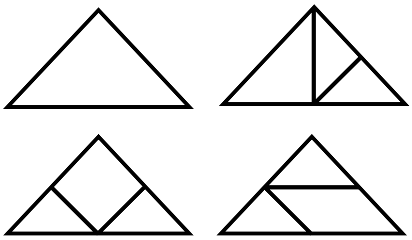
$(a=2,\ b=1,\ c=0)$인 경우: (③, ⑤, ④), (③, ⑤, ⑥), (③, ⑤, ⑦) - 세 가지
$(a=0,\ b=2,\ c=0)$인 경우: (④, ⑥), (④, ⑦), (⑥, ⑦) - 세 가지
$(a=0,\ b=0,\ c=1)$인 경우: (① 또는 ②) - 한 가지

따라서 넓이가 4인 도형을 만드는데 사용 가능한 조각들의 조합은 모두 일곱 가지가 된다. 이와 같은 사실을 이용하여 다양한 답이 존재하는 도형을 찾을 수 있다.

IV. 영재교육에서 교수매체로써 칠교판 활용의 예

칠교판을 사용하여 학습 문제는 단계적으로 구성하고, 다양한 활동으로 이루어진 학습 문제를 선정(김홍원, 2003)하기 위해 다음과 같은 활동의 예를 소개하도록 하겠다. 여기서 칠교판을 교수매체로 소개하는 이유는 앞에서 언급한 바와 같이 조작교구로써 칠교판뿐만 아니라 이를 이용한 교수자료, 교사의 발문, 학생의 문제제기 활동 등을 모두 포함하는 의미로 보다 넓은 의미의 교수매체라는 표현을 사용하였다.

칠교판의 조각의 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 모양을 만들 때, <그림 2>와 같이 한 개 이상의 답이 가능한 모양을 만들 수 있다.



<그림 2> 칠교판을 사용하여 여러 가지 방법으로 삼각형 만들기

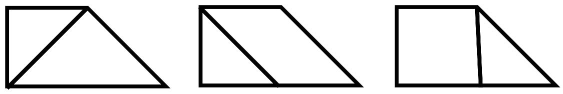
<그림 2>는 넓이가 4인 도형으로 사용가능한 조각들의 조합은 모두 일곱 가지이고, 이중에서 넓이가 2인 조각 두 개를 선택하는 세 가지 경우를 제외하고 모두 답이 된다. 이는 넓이가 2인 조각 세 개 중 두 개를 선택하여 넓이가 4인 큰 삼각형을 만들 수 없기 때문이다. 이와 같이 칠교판을 사용하여 주어진 도형을 만들 때, 사용가능한 조각들의 조합이 모두 답이 되는 것은 아니다.

그럼 여기에서 학생들에게 다음과 같은 문제를 제기할 수 있다.

(문제 1) 칠교판 조각을 사용하여 답이 두 개 이상인 도형을 만들려고 한다. 조각을 선택하는 모든 경우가 답이 되는 도형을 찾을 수 있는가?

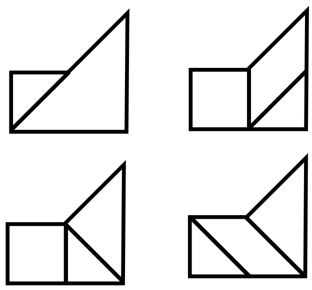
먼저 답이 두 개 이상이기 위해서는 답이 한 개인 경우를 먼저 제외하면 된다. 예를 들어, 넓이가

1, 15, 16인 경우는 제외된다. 또, <그림 2>에서 살펴본 넓이가 4인 경우도 답이 되지 않는다. 그럼 넓이가 3인 경우를 생각하자. 넓이가 3인 경우 ($a=1$, $b=1$, $c=0$)로 (③, ④), (③, ⑥), (③, ⑦)을 사용할 수 있고, <그림 3>과 같이 모든 경우가 답이 되는 도형을 찾을 수 있다.



<그림 3> 넓이가 3이고 모든 경우가 답이 되는 도형 만들기

또, 넓이가 5인 도형을 생각하자. 넓이가 5인 경우 ($a=1$, $b=2$, $c=0$), ($a=1$, $b=0$, $c=1$)로 (③, ④, ⑥), (③, ④, ⑦), (③, ⑥, ⑦), (③, ①)을 사용할 수 있고, <그림 4>와 같이 모든 경우가 답이 되는 도형을 찾을 수 있다.



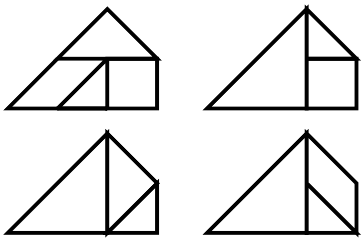
<그림 4> 넓이가 5이고 모든 경우가 답이 되는 도형 만들기

그럼 여기에서 학생들에게 다음과 같은 문제를 제기할 수 있다.

(문제 2) 칠교판 조각을 사용하여 답이 두 개 이상인 도형을 만들려고 한다. 조각을 선택하는 모든 경우가 답이 되는 도형을 찾을 때, 만든 도형의 넓이가 가능한 경우와 가능하지 않은 경우를 모두 찾을 수 있는가?

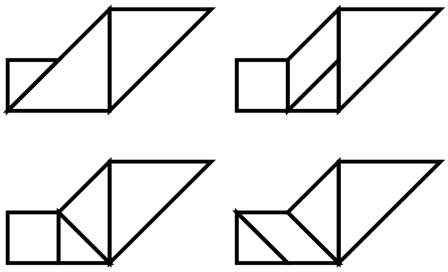
<그림 3>과 <그림 4>에서 넓이가 3, 5인 경우는 답이 된다. 그럼 넓이가 6인 도형을 만드는 경우를 생각하자. 넓이가 6인 도형은 ($a=2$, $b=2$, $c=0$), ($a=2$, $b=0$, $c=1$), ($a=0$, $b=3$, $c=0$), ($a=0$, $b=1$, $c=1$)로 (③, ⑤, ④, ⑥), (③, ⑤, ④, ⑦), (③, ⑤, ⑥, ⑦), (③, ⑤, ①), (④, ⑥, ⑦), (④, ①), (⑥, ①), (⑦, ①)이다. 그러나 이 경우 ④, ⑥, ⑦번 조각의 모양이 모두 다르기 때문에 (④, ①), (⑥, ①), (⑦, ①)로 같은 모양을 만들 수 없다.

넓이가 7인 경우는 ($a=1,\ b=3,\ c=0$), ($a=1,\ b=1,\ c=1$)로 (③, ④, ⑥, ⑦), (③, ④, ①), (③, ⑥, ①), (③, ⑦, ①)를 사용할 수 있고, <그림 5>와 같이 모든 경우가 답이 되는 도형을 찾을 수 있다.



<그림 5> 넓이가 7이고 모든 경우가 답이 되는 도형 만들기

넓이가 7인 경우는 <그림 3>의 넓이가 3인 경우에 넓이가 4인 조각을 추가하여 만든 후 나머지 한 경우인 ($a=1,\ b=3,\ c=0$)이 되는 경우만 찾으면 된다. 같은 방법으로 넓이가 9인 경우 <그림 4>의 넓이가 5인 경우에 넓이가 4인 조각을 추가하여 <그림 6>과 같이 만들면 된다.



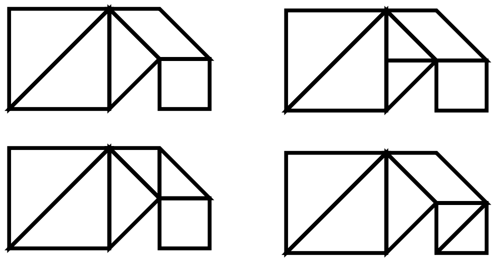
<그림 6> 넓이가 9이고 모든 경우가 답이 되는 도형 만들기

같은 방법으로 넓이가 11인 경우는 넓이가 7인 <그림 5>에 넓이가 4인 조각을 추가하고, 넓이가 13인 경우는 넓이가 9인 <그림 6>에서 넓이가 4인 조각을 두 개 사용한 경우를 제외하고 넓이가 4인 조각을 추가하여 답을 찾을 수 있다.

넓이가 8 이상이고 넓이가 짝수인 경우를 생각하자. 넓이가 8일 때 ($a=0,\ b=2,\ c=1$), ($a=0,\ b=0,\ c=2$)인 경우 넓이가 2인 조각 두 개와 넓이가 4인 조각 한 개를 사용하여 모양을 만들면 넓이가 4인 조각 두 개로 만든 모양과 같은 모양을 만들 수 없으므로 답이 되지 않고, 넓이가 10일 때 ($a=0,\ b=1,\ c=2$)인 경우 넓이가 2인 세 조각 중 한 개와 넓이가 4인 조각 두 개로 각각 같은 모양을 만들 수 없으므로 답이 되지 않고, 넓이가 12일 때 ($a=0,\ b=2,\ c=2$)인 경우

도 같은 모양을 만들 수 없으므로 답이 되지 않는다.

넓이가 14인 도형을 생각하자. 넓이가 14인 경우 ($a=2,\ b=2,\ c=2$), ($a=0,\ b=3,\ c=2$)로 (③, ⑤, ④, ⑥, ①, ②), (③, ⑤, ④, ⑦, ①, ②), (③, ⑤, ⑥, ⑦, ①, ②), (④, ⑥, ⑦, ①, ②)을 사용할 수 있고, <그림 7>의 경우 모든 경우가 답이 되는 도형을 만든 것이다.



<그림 7> 넓이가 14이고 모든 경우가 답이 되는 도형 만들기

<그림 7>의 경우 넓이가 짝수이지만 넓이가 1인 조각 두 개를 사용하여 넓이가 2인 세 가지 모양의 조각을 모두 만들 수 있으므로 가능하다. 따라서 조각을 선택하는 모든 경우가 답이 되는 도형은 넓이가 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14인 경우에 만들 수 있고, 넓이가 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12인 경우에는 만들 수 없다.

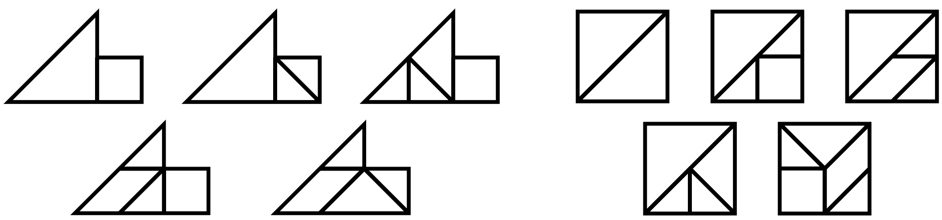
여기서 학생들에게 다음과 같은 문제를 제기할 수 있다.

(문제 3) 칠교판을 사용하여 모양을 만들 때, 가장 많은 답을 갖는 도형을 찾을 수 있는가? 단, 사용하는 조각은 같고 위치만 바꾼 방법은 하나로 본다.

앞에서 언급한 바와 같이 넓이가 4인 도형을 만들기 위한 서로 다른 조각들의 조합은 일곱 가지였다. 그러면 가장 많은 조합을 가진 도형은 넓이가 얼마인 도형일까? 먼저, 사용가능한 조각들의 조합이 많이 만들어지기 위해서는 모양이 서로 다른 넓이가 2인 조각을 사용하는 것이 유리하다. 넓이가 2인 조각을 한 개 또는 두 개를 사용하면 각각 세 가지의 경우가 생긴다. 또, 넓이가 1인 조각 두 개는 넓이가 2인 조각 한 개로 대신할 수 있고, 넓이가 2인 조각 두 개는 넓이가 4인 조각 한 개로 대신할 수 있다. 그러므로 a가 2이고, b가 1 또는 2 이상이면 사용가능한 조합이 많이 나오게 된다. 또, a가 2이므로 넓이는 짝수여야 하고, 넓이가 4인 도형은 앞에서 일곱 가지가 나온다고 했으므로 최소한 넓이가 6 이상인 도형을 생각하자. 앞에서 넓이가 14인 경우는 사용가능한 조각의 조합이 네 가지이므로 가장 많은 조합은 아니다. 따라서 넓이가 6, 8, 10, 12인 경우를 생각하자.

넓이가 6인 도형은 ($a=2$, $b=2$, $c=0$), ($a=2$, $b=0$, $c=1$), ($a=0$, $b=3$, $c=0$), ($a=0$, $b=1$, $c=1$)로 (③, ⑤, ④, ⑥), (③, ⑤, ④, ⑦), (③, ⑤, ⑥, ⑦), (③, ⑤, ①), (④, ⑥, ⑦), (④, ①), (⑥, ①), (①, ⑦) 여덟 가지이다. 넓이가 8인 도형은 ($a=2$, $b=3$, $c=0$), ($a=2$, $b=1$, $c=1$), ($a=0$, $b=2$, $c=1$), ($a=0$, $b=0$, $c=2$)로 (③, ⑤, ④, ⑥, ⑦), (③, ⑤, ④, ①), (③, ⑤, ⑥, ①), (③, ⑤, ⑦, ①), (④, ⑥, ①), (④, ⑦, ①), (⑥, ⑦, ①), (①, ②) 여덟 가지이다. 넓이가 10인 도형은 ($a=2$, $b=2$, $c=1$), ($a=2$, $b=0$, $c=2$), ($a=0$, $b=3$, $c=1$), ($a=0$, $b=1$, $c=2$)로 (③, ⑤, ④, ⑥, ①), (③, ⑤, ④, ⑦, ①), (③, ⑤, ⑥, ⑦, ①), (③, ⑤, ①, ②), (④, ⑥, ⑦, ①), (④, ①, ②), (⑥, ①, ②), (⑦, ①, ②) 여덟 가지이다. 그러나 넓이가 12인 경우는 ($a=2$, $b=1$, $c=2$), ($a=2$, $b=3$, $c=1$), ($a=0$, $b=2$, $c=2$)로 일곱 가지이다. 따라서 가장 많은 조합이 있는 경우는 넓이가 6, 8, 10이고 모두 여덟 가지이다.

넓이가 6인 도형을 만들 때, (①, ④), (①, ⑥), (①, ⑦), (④, ⑥, ⑦)을 가지고 서로 같은 모양을 만들 수 없다. 따라서 가장 많은 답을 찾으면 <그림 8>의 첫 번째 그림과 같이 다섯 가지 방법뿐이다. 넓이가 8인 도형을 만들 때, (①, ②), (①, ④, ⑥), (①, ④, ⑦), (①, ⑥, ⑦)을 가지고 서로 같은 모양을 만들 수 없다. 따라서 가장 많은 답을 찾으면 <그림 8>의 두 번째 그림과 같이 다섯 가지 방법뿐이다. 같은 방법으로 넓이가 10인 도형을 만들 때, (①, ②, ④), (①, ②, ⑥), (①, ②, ⑦), (①, ④, ⑥, ⑦)을 가지고 서로 같은 모양을 만들 수 없으므로 만들 수 있는 답은 최대 다섯 가지이다. 따라서 칠교판의 조각들을 사용하여 서로 다른 답은 최대 다섯 가지 방법밖에는 없다.



<그림 8> 해답이 5개인 도형

사용 가능한 조각의 조합이 일곱 가지인 넓이가 4인 도형과 넓이가 12인 도형도 같은 방법으로 다섯 가지 이상의 답은 나오질 않는다.

앞에서 제시한 활동의 예를 이용하여 영재들에게 제공할 수 있는 학습 자료와 교사의 발문, 그리고 학생들 사이에서 제기할 수 있는 문제 등을 수업의 목표나 목적에 따라 단계적으로 계획하여 수업에 활용할 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 영재를 위한 교육 자료의 개발을 위해 주제 선정에서는 학습자에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있고, 다양한 전략이나 해결 방법을 가지는 학습 문제를 선정하고, 내용면에서는 보다 추상적이고, 복잡하고, 서로 다른 영역의 내용을 함께 다루기 위해 교수매체로써 가장 널리 알려진 칠교판을 사용한 활동의 예를 제시하였다. 이는 칠교판의 조각들의 특징과 조각의 선택에 따른 조합을 이용하여 가능한 모든 경우가 답이 되는 도형 찾기, 가장 많은 답이 있는 모양 찾기 등을 문제제기와 제기된 새로운 문제 상황에서 추측하고 추론하는 활동의 예를 통해 수학적 힘과 창의성 및 분석력과 종합력 등 고차원적인 사고력을 길러주는 교육 자료 개발에 대한 시사점을 찾기 위함이다.

본 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 칠교판을 사용하여 만들 수 있는 도형들의 넓이는 1부터 16까지이며 각 넓이마다 사용가능한 조각들의 조합을 찾기 위해 부정방정식 $x=a+2b+4c$을 사용할 수 있다. 여기서, x는 칠교판으로 만들 수 있는 도형의 넓이이고, a는 넓이가 1인 조각의 개수, b는 넓이가 2인 조각의 개수, c는 넓이가 4인 조각의 개수이다.

둘째, 칠교판을 사용하여 주어진 도형을 만들 때, 사용가능한 조각들의 조합이 모두 답이 되는 것은 아니다. 그러나 일부 넓이에서는 사용가능한 조각들의 조합 모두가 답이 되는 경우도 있다. 따라서 교사의 발문이나 문제 제기를 통해 학생들이 스스로 조각들의 조합 모두가 답이 되는 도형을 찾고, 더 나아가 모든 조합이 답이 되는 넓이도 찾을 수 있도록 문제를 제시할 수 있다. 예를 들어, 사용가능한 조각들의 조합이 모두 답이 되는 도형을 찾으면 그 넓이는 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14이다.

셋째, 칠교판을 사용하여 만든 도형 중 가장 많은 답을 갖는 도형을 찾기 위해 사용가능한 조합이 가장 많은 넓이를 찾고, 조각들의 모양을 특징을 이용한 탐구 활동을 통해 가장 많은 답을 갖는 도형을 찾을 수 있다. 실제로, 사용한 조각은 같고 위치만 바꾼 방법을 하나로 볼 때, 해답이 가장 많은 도형은 다섯 가지의 답을 갖는 도형이다.

넷째, 본 연구에서 제시한 활동의 예를 이용하여 영재들에게 제공할 수 있는 학습 자료와 교사의 발문, 그리고 학생들 사이에 제기할 수 있는 문제 등을 조직할 수 있고, 이를 바탕으로 학생들의 수준이나 요구, 수업의 목표나 목적 등에 따라 단계적으로 계획을 수립하여 수업에 활용할 수 있다.

이 연구의 결과로부터 다음과 같은 점이 고려되어야 함을 제안한다.

첫째, 이 연구에서 제시한 활동의 예는 칠교판을 사용하는 활동의 일부에 지나지 않는다. 영재들을 위한 더 효과적인 활동에 대한 연구와 더 효율적으로 문제를 해결하는 방법에 대한 추가적인 연구가 필요하다. 또, 칠교판이외의 다른 조작교구를 교수매체로 활용할 때, 본 연구와 같이 다양한 유형의

문항 개발에 대한 기초 연구도 필요하다.

둘째, 이 연구에서 제안한 활동의 예를 이용하여 교육 자료를 만들어 학생들에게 직접 적용했을 때 나타나는 학습 효과와 학생들의 구체적인 반응 및 해답을 찾는 과정에 대한 실제적인 연구가 추가적으로 필요하다. 이러한 연구를 통해 교육 자료를 수정하고 보완하여 영재교육에서 더 효과적으로 활용할 수 있는 교육 자료를 만들 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

김홍원 (2003). 영재 교수-학습의 성격과 영재 교수-학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 17, pp.1-16.

남승인 (2003). 수학 퍼즐을 이용한 영재학습 자료의 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 17, pp.97-114.

박영희 (1999). 수학영재캠프 활동 사례: 소마큐브, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 4, pp.89-95.

신현용・한인기・이종욱 (2000). 초등학교 고학년 수학영재의 창의성 신장을 위한 프로그램, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 10, pp.19-30.

심상길・조정길 (2008). 칠교판(七巧板)의 기하학적 특징을 이용한 교육자료 개발에 대한 연구, 한국수학사학회지, 21(4), pp.169-182.

이경화 (1999). 칠교판을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 4, pp.77-87.

이영자・박미라・최경애 (1999). 유아교육 교수매체, 서울: 교문사.

한국교육개발원 (1999). 수학과 영재교육과정 시안; 초・중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구, 한국교육개발원 수탁연구 CR 99-20-3.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Development of Gifted Educational Materials Using Tangram as Instructional Media

Shim, Sang Kil
Accreditation Center for Educational Development, Dankook University
E-mail : skshim22@dankook.ac.kr

The purpose of this article is to study characteristics of tangram as instructional media in combinatorial-geometric point of view, and to present basic materials and direction for efficient tangram activities in gifted education upon systematical analysis of methods of finding solutions.

We can apply $x = a + 2b + 4c$ to find all possible combination of solutions in tangram activities not as trial-and-error method but as analytical method. Through teacher's questions and problem posing in activities using tangram, we systematically came up with most solution and case of all possible combinations be solution in classifying properties of pieces and combining selected pieces.

* ZDM Classification : U63
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60
* Key Words : instructional media, tangram, development of gifted educational materials