韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 1호, 2009. 2. 85-108
J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 1, Feb. 2009. 85-108

Freudenthal의 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안에 대한 연구

한 혜 숙 (고려대학교 교과교육연구소)
문 수 진 (동광중학교)

본 연구에서는 전통적인 증명 지도 방안의 대안으로 Freudenthal의 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안을 개발·적용하여 안내된 재발명 원리에 토대를 둔 증명 지도 방안이 중학교 2학년 학생들의 증명 능력 및 증명 학습 태도에 어떤 영향을 미치는지를 조사하였다. 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도는 다양한 활동을 통해 학생들 스스로 명제를 만들어 보고 증명해 보는 경험을 제공하는데 주안점을 두었다. 본 연구 결과, 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안으로 학습한 실험반과 교사의 설명에 의존하는 전통적인 증명 지도 방안으로 학습한 비교반이 사후 증명 능력 검사에서 통계적으로 유의미한 차이를 보여주었다. 특히, 사후 증명 능력 검사 문항 중 그림이 제시되지 않고 완전한 증명 과정을 요구하는 문항에서 두 집단 사이에 큰 차이가 발견되었고 비교반의 무응답 비율이 실험반보다 현저히 높게 나타났다. 또한, 증명 학습 태도 검사에서는 실험반 학생들이 비교반 학생들보다 증명 학습에 대해서 상대적으로 더 긍정적인 태도를 갖고 있음을 알 수 있었다.

I. 서 론

21세기는 어느 때보다 급격한 변화가 일어나고 있는 정보화 시대로 많은 양의 지식과 정보가 우리 주변에 범람하고 있다. 이러한 시대에 필요한 능력으로 황희숙(2001)은 정보를 합리적으로 선택하고 새로운 정보를 창출하여 문제를 창의적이고 비판적으로 해결할 수 있는 능력과 자질이 필요하다고 보았다. 우리나라 제 7차 및 개정 수학과 교육과정에서는 지식 기반 정보화 사회에서 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재 양성에 주안점을 두어 학교 교육에서 학생들의 수학적 사고력, 의사소통 능력, 문제 해결력 등의 신장을 강조하고 있다. 이러한 능력의 신장을 활성화 시킬 수 있는 대표적인 영역이 바로 기하 영역일 것이다. 기하 영역은 어떤 다른 영역보다도 학생들의 추론 능력을 함양시키기에 적절하며, 다양한 해결방법을 가진 기하문제는 학생들의 탐구력과 창의적 사고력 배양에 좋은 소재가 될 수 있다(교육부, 1999). 특히 기하 영역에서 큰 부분을 차지하는 증명은 학생들의 추론 능력 및 논리적 사고력을 향상시키는데 중요한 역할을 할 수 있

* 접수일(2009년 1월 7일), 심사(수정)일(2009년 1월 19일), 게재확정일자(2009년 1월 30일)
* ZDM 분류 : E53
* MSC2000 분류 : 97D10
* 주제어 : 증명 지도, 증명 능력, 증명 학습 태도, Freudenthal의 안내된 재발명 원리

다. 현재 우리나라 수학과 교육과정에서는 <8-나>의 기하 단원에서 처음으로 형식적인 증명을 다루고 있다. 그러나 학교 현장에서 이루어지고 있는 기하 단원의 증명 지도가 본연의 목적대로 잘 이행되고 있지 못 하는 경우를 쉽게 발견할 수 있다. 류희찬과 조완영(1999)은 학교수학에서 증명 지도는 증명 절차에 대한 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 과정으로 피상적으로 행해지고 있다고 지적하였다. 이런 피상적인 증명 지도 방식이 결국 학생들의 학습 결손이나 부정적인 학습 태도로 연결될 수 있을 것이다. 실제로 여러 연구에서 (예. 박은조, 2004; 홍인선, 현진오 2003; 서지현, 2005) 많은 학생들이 증명 학습에 어려움을 겪고 있으며, 학생들의 증명 학습에 대한 성향 및 태도도 부정적임이 보고되었다. 수학적 사고 활동의 핵심이며 수학의 본질인 증명에 대한 교육이 실제 학교 수학에서 피상적이고 형식적인 수준에 머물러있고, 많은 학생들이 증명 학습에 서 어려움과 부정적인 인식을 갖고 있다는 연구 결과들을 볼 때, 증명 지도의 대안적 방법에 대한 개발이 필요함을 알 수 있다.

따라서 본 연구는 교사의 주도하에 진행되는 전통적인 증명 지도 방안의 대안으로 Freudenthal이 제시한 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안을 개발·적용하여 그 대안적인 지도 방안의 효과를 알아보고자 한다.

본 연구의 목적을 달성하기 위해서 다음과 같은 세 가지 연구 문제를 설정하였다.

1. 안내된 재발명 방법을 적용한 지도 방안으로 학습한 실험반과 전통적인 방법으로 학습한 비교반 학생들 간에 증명 능력에 있어서 유의미한 차이가 있는가?

2. 만약, 두 집단 간에 차이가 존재한다면, 학생들의 증명 과정에 어떤 차이점들이 있는가?

3. 안내된 재발명 방법을 적용한 지도방안으로 학습한 실험반과 전통적인 방법으로 학습한 비교반간에 증명 학습 태도에 있어서 유의미한 차이가 있는가?

II. 이론적 배경 및 선행 연구의 고찰

1. Freudenthal의 안내된 재발명 방법

Freudenthal이 제시하는 수학 지도 방법으로서의 재발명 방법은 아동의 현실 안에서 조직되어야 할 현상으로부터 시작해서, 점진적인 수학화 과정을 거침으로써 추상적인 수학적 지식으로 나아가는 것을 의미한다(강흥규, 2005). Freudenthal(1991)은 수학적 사고 활동의 본질은 수학화인바, 수학 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이 아니라 수학의 발생과정, 수학화 과정을 학습자의 현재의 상황에서 재발명하도록 안내하는 안내된 재발명 과정이어야 한다고 주장하였다(우정호, 2007).

> 아이들은 인류의 학습 과정을 그것이 실제적으로 일어났던 그대로가 아니라 만약 과거의 사람들이 우리가 지금 알고 있는 것에 대해 조금 더 알고 있었다면 일어났었을 그런 과정을 반복해야 한다(Freudenthal, 1991/2008, pp. 67-68).

즉, 학생들에게 수학화 과정을 통해 재발명 시켜야하는 것은 발명가의 역사적인 발자국이 아니라 개선되고 더 잘 인도된 역사의 과정이어야 한다(Freudenthal, 1973). Freudenthal은 학습자가 수학보다는 수학화를, 추상보다는 추상화를, 도식보다는 도식화를, 형식보다는 형식화를, 알고리즘보다는 알고리즘화를, 언어보다는 언어화를 재발명하도록 안내되어야 한다고 주장하며, 이 때, 가치 있는 지식과 여러 가지 능력은 부과되는 것보다 더 쉽게 학습되고, 파지되고, 전이될 것이라고 하였다(Freudenthal, 1991/2008).

Freudenthal은 재발명 방법을 통한 지도를 하기 위해서는 지도에 앞서 '사고 실험'이 필요하다고 제안하였다. 사고 실험이라는 것은 한 학생 또는 한 그룹의 학생들을 생각하면서 머릿속으로 학생들의 가능한 반응을 생각하고, 그에 대응하면서 가르치는 교사나 교과서 저자들의 태도를 의미한다(김연식, 정영옥, 1997). 사고실험은 두 가지 측면에서 고려해 볼 수 있는데, 첫 번째는 수업 장면과 관련된 것으로 교사나 교과서 저자가 학생들의 반응을 생각하면서 가르치거나 저술하는 태도를 의미하고, 두 번째는 수업 내용과 관련된 것으로 수학의 역사를 통해 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해서 추측해 보는 것을 의미한다 (황혜정 외, 2007).

강흥규(2005)는 Freudenthal이 말하는 재발명 방법을 보다 정확히 파악하기 위해서 그것과 대비되는 전통적인 수학 지도 방법과 비교해서 설명하였다. 간략하게 살펴보면, 전통적인 지도 방법의 주된 특징은 개념과 원리를 빠르고 강하게 형식화 한다는 점이라고 하였다. 즉, 전통적인 교재에서는 "개념과 원리의 이해는 그것이 형식적인 공식으로 제시되기 이전의 생활에서 알아보기와 사례 들기를 통해서가 아니라 그 이후의 다양한 연습과 응용을 통해서라고"(p. 36) 하였다. 그는 비록 이러한 지도 방법을 통해서 학생들은 효율적이고 경제적으로 지식을 습득할 수 있지만, 그 지식을 사용하고 만들어낸 과정에 대해서는 간과하여 학생들이 탐구 방법을 배우게 하지는 못 한다고 하였다. 반면, 재발명 방법의 가장 큰 특징은 개념, 원리 지도의 출발점이 형식화되고 공식화된 기성의 완성물이 아니라 개념과 원리가 암묵적으로 녹아있는 풍부한 의미 구조를 가지고 있는 현실맥락이라는 점이다. 아동은 현실 상황이 함유하고 있는 풍부한 의미구조를 바탕으로 비형식적인 방법과 전략을 개발하여 문제를 해결하고, 그런 방법을 다양한 현실 상황에서 반복적으로 적용시킴으로써 개념・원리에 대한 심상을 구성하고, 점진적으로 형식화시킴으로써 완성된 수학적 개념・원리에 도달하게 된다.

2. 증명 학습에 대한 선행 연구 고찰

가. 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움

여러 연구 결과(예. 박은조, 2004; 홍인선, 2002; 서지현, 2005)에 의하면 많은 중학교 학생들이 증명 학습에서 어려움을 겪고 있는 것으로 나타났다. 김남희 외(2008)와 나귀수(1997)는 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움을 크게 다섯 가지로 제시하였는데 첫째, 증명 방법을 찾는 어려움, 둘째, 명제 해석의 어려움, 셋째, 정당화 수단으로서의 증명의 한계, 넷째, 증명 과정에 필요한 수학적 기호 사용

의 어려움, 다섯째, 증명 방법 탐색 시간의 부족이다.

이 밖에도 증명 과정에 필요한 수학적 성질, 명제, 정리, 정의 등을 암기하고 적절하게 사용하는 것, 교사가 제시한 증명 과정을 암기하는 것, 증명 절차를 빠뜨리지 않고 완벽하게 쓰는 것 등이 학생들이 증명 학습에서 느끼는 어려움이었다(한혜숙, 신현성, 2008). 이와 같은 학습상의 어려움으로 인해서 많은 학생들이 증명 학습에 대해서 부정적인 태도를 갖고 있는 것으로 나타났다. 예를 들면, 홍인선(2002)의 연구에서 연구에 참여한 학생들의 64%가 증명 학습에 대해서 부정적인 반응을 보인 반면에, 단지 15%만이 긍정적인 반응을 보여주었다.

나. 증명 지도의 방향

Freudenthal은 증명 교육의 실패를 학교 기하가 충분히 연역적이지 않은 데서 그 원인을 찾는 것은 잘못된 발상이라고 비판하면서, 학생들에게 연역을 재발명으로 지도하지 않고 강제적으로 부과했기 때문이라고 주장하였다(나귀수, 1998). 류희찬과 조완영 (1999)도 학교수학에서 증명 지도가 증명 절차에 대한 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 과정으로 피상적으로 행해지고 있다고 비판하였다. 나귀수(1997)와 박은조(2004)는 증명 지도 방법의 문제점으로 수학 교사들이 주로 종합적 방법만으로 증명을 지도하는 점을 들었다. 나귀수(1997)에 의하면, 증명의 종합적 제시 방식은 학생들에게 증명 방법이 구성되는 심층적인 과정을 보여주지 못한 채, "수학적 사고 활동으로서의 증명이 아닌 증명의 기록에 불과한 기성의 수학을 학생들에게 강제로 부과하는 결과를 초래한다" (p. 300).

증명 교수·학습을 향상시키기 위한 다양한 연구들이 꾸준히 진행되었다. Fawcett(1938)의 연구에 의하면, 비수학적인 일상적 상황의 예를 이용하여 개념에 대한 명확한 정의의 필요성을 인식시키고, 학생 자신이 공리와 정의에 대한 추측을 스스로 만들고, 토론을 통해 추측을 조사하고 논쟁을 정당화 하도록 하는 활동을 통해서 학생들의 연역적 사고가 개선되었다고 하였다(우정호, 1998, 재인용). 박인희(2005)는 증명 지도에 있어서 증명 이전에 귀납 활동 즉, 관찰하기-추측하기 등의 활동을 제시한 후에 연역적인 증명을 하는 지도하는 방법이 전통적인 설명식 증명 지도 방법보다 학생들의 증명 능력 및 증명 학습에 대한 태도에서 더 긍정적인 결과를 얻을 수 있었다고 보고하였다. 학생들의 직관과 적절한 경험적 정당화 활동이 증명 학습과 밀접한 관련이 있음은 여러 연구(예. 서동엽, 1992; 나귀수, 1998; 류희찬, 조완영, 1999; Tall, 1991; Galindo, 1998)에서도 밝혀졌다. 역동적인 기하 프로그램의 사용도 학생들의 증명 학습에 긍정적인 역할을 할 수 있다는 연구 결과도 보고되었다(예. 류희찬, 조완영, 1999; 한혜숙, 신현성, 2008; Scher, 1996; Edwards, 1997; Galindo, 1998; Marrades & Gutie'rrez, 2000).

나귀수(1997)는 바람직한 증명 지도 방향에 대해서 다음과 같이 제안하였다.

첫째, 분석적 방식과 종합적 방식이 통합된 역동적인 수학적 사고 활동으로 증명을 지도할 필요가 있다.

둘째, 학생에게 가정만을 제시하여 가정으로부터 성립될 수 있는 여러 가지 결론을 스스로 추측하

게 하는 재발견의 맥락과 학생 스스로 자신의 추측이 옳은지 틀린지를 조사하는 정당화의 맥락을 통합하여 증명을 지도할 필요가 있다.

셋째, ‘A이면 B이다’ 형태의 문장을 점진적으로 의식화시켜 학생들이 가정과 결론이 갖는 의미를 오해하지 않도록 지도할 필요가 있다.

넷째, 학생들 스스로 증명할 명제에 대해서 오랫동안 숙고해 봄으로써 증명 과정을 실제로 경험하도록 지도할 필요가 있다.

본 연구에서는 Freudenthal이 제시한 안내된 재발명 원리를 토대로 학습자의 ‘증명하기’ 과정을 강조한 증명 지도 방안의 효과에 대해서 탐구하였다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 연구자가 근무하고 있는 강원도 고성군에 소재하고 있는 D중학교의 2학년 학생들을 대상으로 실시되었다. 선정된 중학교 2학년 학생들의 전반적인 수학 학업성취도는 강원도에서 중・하 수준에 해당되고, 학생들의 학습 태도와 분위기는 대체로 양호하였다. 2학년 총 3개 학급 중에서 전 단계의(수학 8-가 단계의) 수학 학업 성취도가 비슷한 2개 학급이 실험반 (31명)과 비교반 (31명)으로 선정되었다.

2. 연구 설계

본 연구의 연구 문제를 해결하기 위해서 실험 설계는 준 실험 설계 (Quasi-Experimental Design)의 이질 통제 집단 설계(Nonequivalent control group design)(Campbell & Stanley, 1963)가 적용되었고, 구체적인 설계모형은 <표 1>과 같다.

<표 1> 연구 설계

집단	사전검사	실험처치	사후검사	
실험반	O_1	X_1	O_2	A_1
비교반	O_1	X_2	O_2	A_1

O_1 , O_2 : 증명 능력 검사
X_1 : 안내된 재발명 원리를 적용한 증명수업
X_2 : 전통적인 교사 중심의 설명식 증명수업
A_1 : 증명 태도 검사

3. 검사도구

본 연구에서는 사전, 사후 증명 능력 검사, 사후 증명 태도 검사가 실시되었다.

가. 사전 증명 능력 검사

사전 증명 능력 검사는 실험처치 이전에 실험반과 비교반 학생들의 학습 능력에 대한 동질성 여부를 알아보기 위해서 실시되었다. 학생들이 증명을 학습하기 이전이기 때문에 사전 증명 능력 검사는 증명에 관한 두 집단의 선행 지식을 알아보는 수준에서 진행되었다. 서동엽(1999)이 개발한 '추론의 구성과 관련된 요소에 대한 조사문항'을 사전 증명 능력 검사도구로 활용하였다.

사전 증명 능력 검사는 연구 대상으로 선정된 2개 학급을 대상으로 연구의 첫 날에 45분 동안 실시하였으며, 검사 목적, 검사 내용 등을 상세히 설명하여 두 집단의 검사 환경을 동일하게 만들었다.

나. 사후 증명 능력 검사

사후 증명 능력 검사는 실험처치 후 두 집단에 있는 학생들의 증명 능력에서 유의미한 차이가 있는지를 알아보기 위해서 실시되었다. 검사 도구는 서동엽(1999)이 개발한 증명 수행의 기본요소를 측정하는 '증명의 의미와 관련된 요소에 대한 조사문항'을 사용하였다.

사후 증명 능력 검사는 실험처치 후 수업 시간에 45분 동안 실시되었다.

다. 사후 증명 태도 검사

사후 증명 태도 검사는 김응태 등 (1985), 이용민(2000)의 신념과 태도 조사 설문지를 박인희(2005)가 재구성한 '증명 신념과 태도 조사 설문지'를 활용하여 실시하였다. 설문지에 사용된 문항은 5단계 Likert-type문항이었다(4점: 매우 그렇다, 3점: 대체로 그렇다, 2점: 보통이다, 1점: 대체로 아니다, 0점: 매우 아니다).

설문지의 구성 항목을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 증명의 중요도와 그 이유
(2) 증명의 선호도와 그 이유
(3) 증명의 학습 동기와 그 이유
(4) 증명의 난이도와 그 이유
(5) 증명의 이해도와 그 이유

사후 증명 태도 검사는 사후 증명 능력 검사를 실시한 다음날 20분 동안 수업 시간에 시행되었다.

4. 실험처치

실험처치는 1주일에 4시간씩 4주 동안 본 수업 시간에 이루어졌다. 실험반은 MIC 교과서 ('삼

각형을 넘어서' 한국어 번역판)및 다양한 학습 자료를 토대로 연구자가 개발한 10차시 분량의 학습 활동지를 중심으로 학습하였다. 학습 활동지는 동료 교사와 수학교육 전문가의 도움을 받아 여러 차례 수정과 검증의 절차를 거쳤다. 학습 활동지 1개가 <부록 1>에 첨부되어 있다.

비교반은 교과서에 제시된 증명 단원을 중심으로 전통적인 설명식 수업 방식으로 학습하였다.

5. 자료 분석 방법

실험반과 비교반의 사전, 사후 증명 능력 검사와 사후 증명태도 검사 결과의 분석은 SPSS 통계 프로그램을 사용하여 각각 평균 차를 유의수준 0.05에서 t-검증하였다.

두 집단의 학생들이 증명 과정에서 어떤 차이를 보이는지를 분석하기 위해서 증명 과정에서 학생들이 범하게 되는 오류에 대해서 살펴보았고, 분석 과정은 사후 증명 능력 검사 문항 중 완전한 증명 과정을 요구하는 12-(1), 13-(3), 14번 문항<부록 2 참조>에 대한 학생들의 답안을 토대로 실시되었다. 학생들의 답안 중에서 옳은 답을 제시한 경우(4점)와 아무 것도 기술하지 않은 경우(0점)는 오류 분석의 대상에서 제외시켰다. 또, 같은 문제를 증명하는 과정에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 제일 먼저 발생한 오류만을 분석의 대상으로 삼았고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다. 구체적인 오류 분석 과정은 류성림 (1993)의 오류 분석 모델을 토대로 진행되었다. 학생들이 범하는 오류는 다음과 같은 9종류로 분류되었다.

(1) 가정을 잘 이용하지 못한 오류(A)
(2) 도형에 집착하여 생기는 오류(B)
(3) 연산자의 잘못된 적용(C)
(4) 연산자의 잘못된 실행(D)
(5) 증명 과정의 일부 생략(E)
(6) 결론을 바르게 내리지 못함(F)
(7) 기술적인 오류(G)
(8) 논리적 추론의 결여(H)
(9) 오류의 애매 모호함(I)

IV. 연구 결과

1. 사전 증명 능력 검사의 결과

실험처치 전에 실험반과 비교반의 학습 능력을 비교하기 위하여 사전 증명 능력 검사를 t-검정으로 분석한 결과 <표 2 참조>, 유의수준 0.05를 기준으로 유의확률 $p=0.988$ 로서 $p>0.05$이므로 사전 증명 능력에 관해서 두 집단 간에는 유의미한 차이가 없었다. 즉, 실험반과 비교반은 사전 증명 능력에 있어서 동질집단임을 확인할 수 있었다.

<표 2> 사전 증명 능력 검사 결과

	N	M(100점)	SD	t	p
실험반	31	53.9	18.81	0.015	0.988
비교반	31	54.0	14.74		

2. 사후 증명 능력 검사 결과

실험처치 후 사후 증명 능력 검사에서 실험반의 평균은 40점 만점에 22.5 점, 비교반의 평균은 17.7점으로 실험반의 평균이 비교반의 평균보다 4.8점 높았다. 실험반과 비교반의 평균의 차이가 통계적으로 유의미한지를 판단하기 위해서 독립표본 t-검정을 실시하였다. 그 결과 <표 3 참조>, 유의수준 0.05를 기준으로 유의확률 $p=0.039$로서 $p<0.05$이므로 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

<표 3> 사후 증명 능력 검사 결과

	N	M(40점)	SD	t	p
실험반	31	22.5	9.48	-2.113	0.039
비교반	31	17.7	8.27		

3. 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류 분석

<표 4>는 실험반과 비교반에서 각 문항별로 오류가 발생한 학생, 4점 받은 학생, 무응답 한 학생 수와 그 비율을 나타낸다.

<표 4> 오류 발생 빈도표

문항	12 - (1)		13 - (3)		14	
	실험반	비교반	실험반	비교반	실험반	비교반
오류발생(%)	7(25)	14(45)	8(29)	13(42)	15(48)	10(32)
4점(%)	16(52)	6(19)	15(48)	8(26)	9(29)	3(10)
무응답(%)	8(26)	11(36)	8(26)	10(32)	7(23)	18(58)
계	31	31	31	31	31	31

각 문항에서(12-(1), 13-(3), 14) 4점을 받은 학생의 비율을 살펴보면, 실험반이 비교반보다 더 높았고, 각 문항에서 무응답을 한 학생의 비율을 보면 비교반이 실험반보다 더 높음을 알 수 있었다. 실험반의 경우 교사가 증명 과정을 제시하기 이전에 학생 스스로 증명 과정을 써보고, 자신의 증명

과정을 스스로 수정 보완하는 과정을 거쳐 증명의 완성도를 높여가는 경험이 학생들의 증명 능력의 발달 및 주어진 증명 과제를 포기하지 않고 스스로 해보려는 태도에 긍정적인 역할을 한 것으로 보인다. 그러나 비교반의 경우 교사가 증명 과정을 제시하기 전에 학생들 스스로 증명을 써 보는 경험이 상대적으로 부족하여 증명을 시도조차 못 하는 학생들이 많았던 것 같다. 특히, 14번 문항의 경우, 비교반 학생들의 무응답 비율이 다른 문항에서 보다 현저하게 높게 나타났는데, 그 이유로 14번 문항이 증명 과정에 핵심적인 힌트를 제공할 수 있는 그림을 포함하고 있지 않다는 것으로 분석되었다. 비교반 학생들은 수업 시간에 가정과 결론이 주어지지 않은 상태에서 직접 증명을 써 보는 활동이 거의 없었고, 교과서에서 제시되는 문제에는 보조선이 그려진 그림이 항상 있었기 때문에 이 문항에 더 많은 어려움을 느낀 것 같다.

다음은 비교반의 한 학생이 증명 학습이 어려운지를 묻는 연구자의 질문에 대답한 내용이다.

학생 A : 선생님이 증명하실 때는 이해가 되는데요, 다시 제가 쓰려면 어떻게 해야 할지 모르겠어요. 그리고 문제를 증명하라고 하면 전혀 감이 잡히지 않아요.

위 학생은 평소 수학 수업을 아주 열심히 듣고 성실하며 수학을 좋아하는 학생인데 교사가 제시하는 증명 과정을 이해할 수는 있었지만 스스로 증명을 쓰는데 어려움을 갖고 있음을 알 수 있었다. 반면 같은 질문에 실험반에 있는 한 학생은 다음과 같이 대답하였다.

학생 B: 처음엔 어려웠는데요, 지금은 아니예요. 그래도 증명을 시작하는 아이디어를 찾는 것은 아직 어려워요. 그렇지만 그것만 찾아내면 증명 쓰는 것은 쉬운 것 같아요.

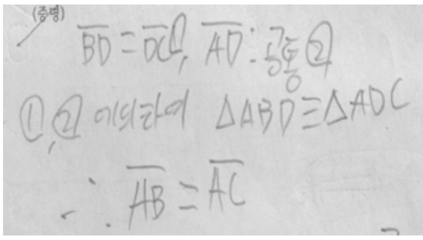
실험반 학생 B는 비교반 학생 A 보다 증명을 쓰는데 자신감과 보다 긍정적인 태도를 보여주었다.

각 집단에서 나타나는 오류의 유형 및 유형별 빈도를 살펴보면 <표 5>과 같다.

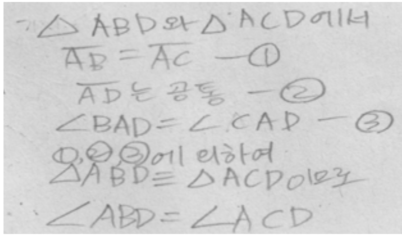
<표 5> 오류 유형별 빈도표

	12-(1)		13-(3)		14		계(%)	
	실험반	비교반	실험반	비교반	실험반	비교반	실험반	비교반
A	1	3	2	2	5	7	9 (29)	12 (32)
B	4	6	0	3	1	0	5 (16)	9 (24)
C	0	2	2	4	3	2	5 (16)	8 (22)
D	0	0	0	0	0	0	0 (0)	0 (0)
E	0	0	0	0	0	0	0 (0)	0 (0)
F	2	2	1	1	0	0	3 (10)	3 (8)
G	0	1	1	1	1	0	2 (6)	2 (5)
H	0	0	2	1	4	0	6 (19)	1 (3)
I	0	0	0	1	1	1	1 (3)	2 (5)

두 집단에서 오류의 빈도가 가장 높은 유형은 오류 유형 A로 학생들이 가정을 잘 이해하지 못해서 발생하는 오류였다. 예를 들면, 12-(1) 문항에서 가정하지 않은 $\overline{BD}=\overline{DC}$를 가정으로 이용하는 경우<그림1>, 14번에서는 결론 $\overline{AB}=\overline{AC}$을 가정으로 이용한 경우<그림2>가 발견되었다.

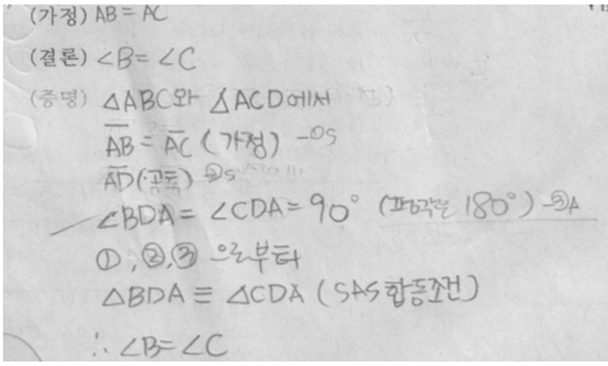


<그림 1> 12-(1)번 문항에서 나타나는 오류 유형 A (가정하지 않은 가정의 사용)



<그림 2> 14번 문항에서 나타나는 오류 유형 A (결론을 가정으로 이용한 경우)

특히, 비교반의 경우 결론을 이용한 오류가 실험반보다 상대적으로 높게 나타났다. 도형에 집착하여 생기는 오류(유형 B)는 실험반과 비교반 모두에서 12-(1)문항에서 가장 많이 나타났다. 특히 학생들이 많이 범하게 되는 실수는 <그림 3>과 같이 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$을 이용하는 오류였다. 이유는 보조선 그림은 각 A의 이등분선으로 제시되었지만 학생들은 그림에서 직관적으로 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$인 것에 집착하여 오류를 범하게 되는 것으로 보인다.



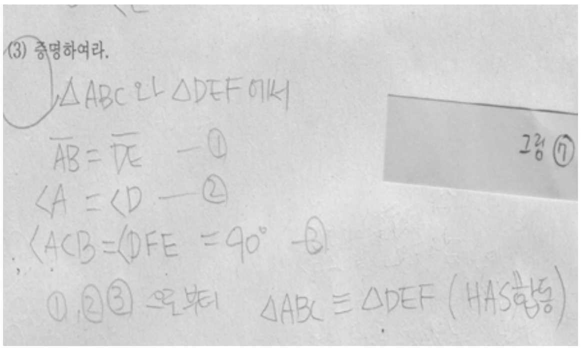
<그림 3> 12-(1)번 문항에서 도형에 집착하여 생기는 오류 유형 B

위와 같이 도형에 집착하여 생기는 오류는 수업 중에도 자주 볼 수 있었다. 학생들은 제시된 글을 먼저 읽는 것이 아니라 주어진 그림을 먼저 보고 문제를 이해하려는 경향이 있기 때문에 이런 경향이 증명 과정에 오류를 초래하는 것으로 보인다. 다음은 연구자가 수업 관찰지에 기록한 내용의 일부를 발췌하였다.

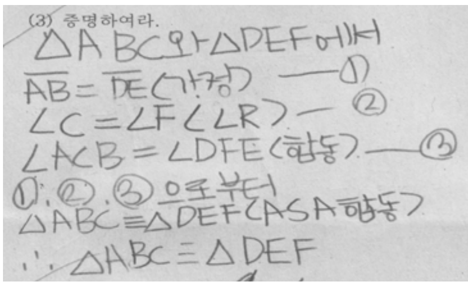
6차시, 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180도임을 증명하는 수업 중에서:

증명의 시작으로 학생은 삼각형을 그리고, 평행선을 그리고, 그 다음에 평각이 180도임을 이용하려 한다. 기호를 표시한다(엇각을 표시하는데 ○, ☆로). 같다는 것 표시하고 각의 이름을 쓴다. 고 대답하였다. 덧붙여서 다시 기호로 나타난 것을 수학적 기호로 다시 나타내도록 지도한 후에 각자 증명을 완성하도록 하였다. 그런데 그림을 그리는 것이 이해되지 않는다는 학생이 있었는데 ○, ☆로 다시 그림을 설명하면서 엇각의 크기가 같음을 설명하였더니 이해하였다. **그 아이는 설명의 시작을 듣지 않고 그려져 있는 그림만을 보고 이해하려고 시도했으나** 수학적 기호의 생소함으로 어렵게 느끼고 있음을 알 수 있다.

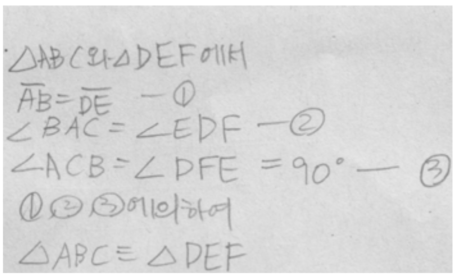
연산자의 잘못된 적용으로 인한 오류(유형 C)는 특히 13-(3)문항에서 비교반의 학생들에게서 많이 발견되었다. 그와 같은 오류를 범하는 경우로는 <그림 4>에서처럼 'HAS합동'과 같이 실제로 존재하지 않는 합동조건을 적용하는 경우와 <그림 5>와 같이 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우, <그림 6>과 같이 정리나 정의 또는 성질을 밝히지 않은 경우도 있었다.



<그림 4> 실제로 존재하지 않는 합동조건을 적용하는 경우 (오류 유형 C)



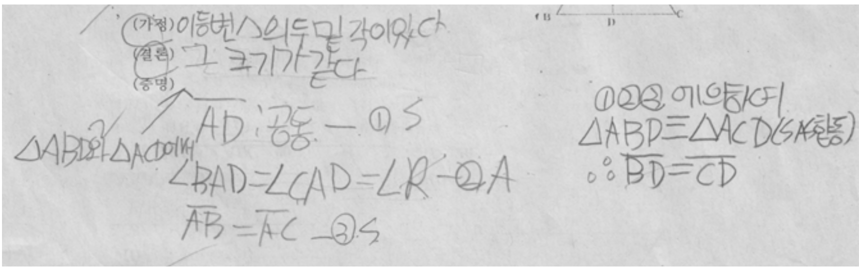
<그림 5> 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우 (오류 유형 C)



<그림 6> 정리나 정의 또는 성질을 밝히지 않은 경우(오류 유형 C)

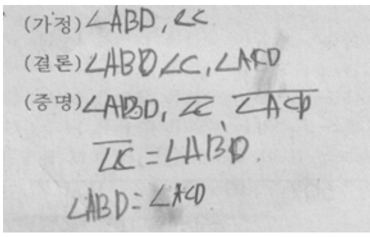
연산자의 잘못된 실행에 의한 오류(유형 D)와 증명 과정의 일부 생략으로 인한 오류(유형 E)는 두 집단 모두에서 나타나지 않았다.

결론을 바르게 내리지 못하는 오류(유형 F)로는 <그림 7>과 같이 결론 전 단계까지는 잘 연역해 내었으나 문제가 요구한 결론을 틀리게 기술한 경우가 있었다. 실험반의 한 학생의 경우는 12-(1)번과 14번 문항 모두에서 같은 오류를 범했다. 인터뷰를 통해 알아본 결과 명제의 결론을 구분할 수 있었으나 왜 그런 실수를 범했는지는 자신도 모르겠다고 하였다. 아마도 그 학생은 증명을 하면서 어떤 결론을 내려야 하는지 잊어버린 것 같았다.



<그림 7> 12번 문항에서 결론을 잘못 기술한 경우(오류 유형 F)

기술적인 오류(유형 G)는 학생들이 기호를 잘못 쓰는 실수를 하거나 선분과 각의 기호를 구분하지 못 하거나 기호에 대한 이해의 부족으로 기인된 오류가 있었다<그림 8>.



<그림 8>기호에 대한 이해가 부족한 경우(오류 유형 G)

논리적 추론의 결여에 의한 오류(유형 H)는 주로 실험반의 학생들에게서 많이 나타났는데 학생들이 보조선을 그어 그림을 정확히 그렸으나 증명 과정을 전혀 적지 못한 경우가 대부분이었다. 비교반의 경우에는 그림을 그린 학생들이 있었으나 대부분 잘못 그려서 무응답으로 처리되었다.

4. 사후 증명 태도 검사

두 집단의 사후 증명 태도 검사의 결과는 <표 6>과 같다. 실험반의 평균(10.4)이 비교반의 평균

(7.3)보다 높게 나타났고, t-검정 결과, 유의수준 0.05를 기준으로 유의확률 $p=0.010$로서 $p<0.05$이므로 두 집단 간의 평균 차는 통계적으로 유의미하다는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 실험반 학생들의 증명 학습에 대한 태도가 비교반 학생들의 태도보다 더 긍정적임을 알 수 있었다.

<표 6> 사후 증명 태도 검사 결과

	N	M(20점)	SD	t	p
실험반	31	10.4	4.49	-2.659	0.010
비교반	31	7.3	4.68		

이 결과는 안내된 재발명 방법을 적용한 증명 지도 방안이 전통적인 증명 지도 방안보다 학생들의 증명 학습 태도에 더 긍정적인 효과가 있음을 보여주고 있다.

증명 학습 태도 점수를 하위 영역별로 <표 7>와 같이 정리하였다. 모든 영역에서 실험반 학생들이 비교반 학생들보다 더 긍정적인 반응을 보여주었다. 그러나 두 집단의 각 영역별 평균 점수가 낮은 것으로 보아 증명 지도의 대안적인 방법에 대한 후속 연구가 필요함 알 수 있다. 특히, 증명의 난이도 영역에서 두 집단 모두 척도 점수의 평균이 2점 이하로 나타났는데, 이는 학생들이 전반적으로 증명에 대해서 어렵게 느끼는 것으로 해석되어, 증명 지도 시 학생의 논리적 사고 수준 등을 고려하여 그에 적절한 증명 지도가 이루어져야 함을 시사한다.

<표 7> 사후 증명 학습 태도 영역별 분석 결과

영역별 증명 학습 태도	집단	N	M(4점)	SD
증명의 중요도	실험반	31	2.45	1.12
	비교반	31	2.03	1.22
증명의 선호도	실험반	31	2.16	1.19
	비교반	31	1.39	1.20
증명의 학습동기	실험반	31	2.03	1.08
	비교반	31	1.45	1.29
증명의 난이도	실험반	31	1.77	0.99
	비교반	31	1.06	1.18
증명의 이해도	실험반	31	2.00	0.95
	비교반	31	1.32	1.14

증명 학습 태도 검사의 영역별 대표 문항에 대한 반응을 구체적으로 살펴보면, 증명의 중요도 영역에서 증명 학습이 왜 중요한지를 묻는 문항에서 실험반에서는 합리적이고 논리적인 사고 방법을 배울 수 있기 때문이라는 응답이 45%로 가장 높은 비율을 차지하였고, 그 다음으로는 수학과목 안의 다른 단원을 공부하는데 필요하기 때문이라는 응답이 20%를 차지하였다. 비교반에서는 합리적이고

논리적인 사고방법을 배울 수 있기 때문이라는 응답과 수학과목 안의 다른 단원을 공부하는데 필요하기 때문이라는 응답, 시험에 나오기 때문이라는 응답이 각각 27%로 같게 나타났다.

증명의 선호도 영역의 문항 중 증명이 재미있는 이유에 대해서 묻는 문항에는 실험반(57%)과 비교반(33%) 모두에서 증명자체가 새롭고 신기하기 때문이라는 응답이 가장 높은 비율을 차지하였다. 반면, 증명이 재미없는 이유로는 두 집단 모두 과정이 복잡하기 때문이라는 응답이 가장 많았다(실험반: 62%, 비교반 71%).

증명의 학습동기 영역의 문항 중 증명을 계속 공부하고 싶은 이유가 무엇인지를 묻는 문항에서는 두 집단에 있는 학생들의 응답에 큰 차이가 있었다. 실험반의 경우 합리적이고 논리적인 사고를 할 수 있어서라는 응답의 비율이 46%로 가장 높았고, 비교반의 경우에는 시험에서 좋은 성적을 얻기 위함이라는 응답의 비율이 67%로 가장 높았다. 증명을 공부하고 싶지 않은 이유가 무엇인지를 묻는 문항에서는 실험반의 경우 증명 학습이 어렵고 머리가 아프다는 응답(46%)이 가장 높게 나타났고, 재미가 없다는 응답(23%)이 그 뒤를 따랐다. 그러나 비교반의 경우 재미가 없다는 응답(53%)이 가장 높은 비율을 차지했고, 어렵고 머리가 아프다는 응답(27%)이 그 뒤를 따랐다.

증명의 난이도 영역의 문항 중 증명이 어렵다고 느낀 이유가 무엇인지 묻는 문항에서는 실험반의 경우 열심히 공부하지 않았기 때문이라는 응답과 그림을 그려서 설명하면 쉽지만 글로 쓰는 것이 어렵기 때문이라는 응답의 비율(각 33%)이 가장 높게 나타났고, 비교반에서는 그림을 그려서 설명하면 쉽지만 글로 쓰는 것이 어렵기 때문이라는 응답(27%)이 가장 높게 나왔고, 외워야 할 용어나 규칙이 많아서라는 응답(23%)의 비율이 그 뒤를 따랐다.

증명의 이해도 영역 중 증명을 잘 이해하지 못한 이유가 무엇인지를 묻는 문항에 실험반에서는 증명 수업에 열심히 참여하지 않았기 때문이라는 응답이 56%로 가장 높은 비율을 차지하였고, 반면 비교반에서는 내용 자체가 너무 어렵다는 응답이 41%로 가장 높게 나타났고, 증명 수업에 열심히 참여하지 않았기 때문이라는 응답은 35%로 그 뒤를 따랐다.

각각의 문항에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과, 두 집단의 학생들이 증명 학습을 바라보는 태도 또는 증명 학습에 대한 견해에 있어서 비슷한 부분도 있었지만 상이한 면도 많이 발견되었다. 증명 지도 방식이 학생들의 증명 학습에 대한 신념 또는 태도에 큰 영향을 미칠 수 있음을 알 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 학생들의 증명 능력 및 태도를 개선시키고자 Freudenthal이 제시한 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안을 개발·적용한 후 증명 능력 검사 및 증명 학습 태도 검사의 분석을 통해서 그 효과를 알아보고자 하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안이 전통적인 증명 지도 방안보다 학생들의 증

명 학습에 더 효과적이었다. 사전 증명 능력 검사에서 동질집단이었던 두 집단이 사후 증명 능력 검사에서는 통계적으로 유의미한 차이가 발견되었다.

둘째, 완전한 증명 과정을 요구하는 세 문항(12-(1), 13-(3), 14)에 대한 학생들의 증명 과정을 면밀히 분석한 결과, 각 문항에서 완벽한 증명(4점)을 제시한 학생의 비율은 실험반이 비교반 보다 높게 나타났고, 반면 각 문항에 무응답을 한 학생의 비율을 살펴보면, 실험반이 비교반보다 더 낮게 나타났다. 이는 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안이, 즉, 교사가 증명 과정을 직접적으로 제시하기 이전에 학생 스스로 증명 과정을 써보고, 자신의 증명 과정을 스스로 수정・보완하는 과정을 거쳐 증명의 완성도를 높여가는 경험이 학생들의 증명 능력의 발달 및 주어진 증명 과제를 포기하지 않고 스스로 해보려는 태도에 더 긍정적인 역할을 한 것으로 보인다. 특히 14번 문항의 경우, 실험반의 무응답 비율은 다른 문항과 비교했을 때, 큰 차이가 없었으나, 비교반에서 이 문항에 대한 무응답의 비율이 다른 문항에서보다 현저히 높게 나타났다. 그 이유로 14번 문항이 증명 과정에 핵심적인 힌트를 제공할 수 있는 그림을 포함하고 있지 않다는 것으로 분석되었다. 비교반 학생들은 증명 학습 동안 교과서에 제시된 증명 과제를 토대로 학습이 이루어졌는데, 교과서에서 제시된 문제에는 보조선이 그려진 그림이 항상 있었기 때문에 학생들이 그림이 제시되지 않은 문항에 더 많은 어려움을 느낀 것 같다.

두 집단의 학생들이 증명 과정에서 범하게 되는 오류의 유형 및 발생 빈도를 살펴보면, 가정을 잘 이용하지 못하는 오류(유형 A)가 실험반에서는 29%, 비교반에서는 32%의 비율로 두 집단 모두에서 가장 높게 나타났고, 그 다음으로 실험반에서는 논리적 추론의 결여(유형 H)가 19%로, 비교반에서는 도형에 집착하여 생기는 오류(유형 B)가 24%의 비율로 높게 나타났다.

셋째, 안내된 재발명 원리를 적용한 증명 지도 방안이 학생들의 증명 학습에 대한 태도를 더 긍정적으로 만드는데 효과가 있음을 알 수 있었다. 사후 증명 학습 태도 검사 결과에 의하면, 실험반의 평균이 비교반의 평균보다 높았고, 두 집단 간의 평균 차는 통계적으로 유의미하게 나타났다. 실험반의 경우 증명 학습 태도 검사의 5개 하위 영역 중 증명의 난이도에 관한 1개 영역을 제외한 4개 영역에서 주로 척도 점수의 평균이 2점대(보통)로 나타났고, 비교반의 경우 증명의 중요도에 관한 1개 영역을 제외한 4개 영역에서 척도 점수의 평균이 1점대(대체로 아니다)로 나타났다. 증명의 난이도 영역의 척도 점수의 평균이 두 집단 모두 1점대로 많은 학생들이 증명에 대해서 어렵게 생각하고 있음을 알 수 있었다.

본 연구 결과를 토대로 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, 본 연구자는 교육과정에서 제시하고 있는 삼각형의 성질 단원에 대한 기준 차시(10차시)를 참고로 안내된 재발명 원리를 적용한 10차시 분량의 활동지를 개발하여 사용했으나, 실질적으로는 15차시로 진행되었다. 학생들이 문제 상황을 받아들이고 그에 대하여 생각하고 명제를 찾아내는데 많은 시간이 필요함을 알 수 있었다. 따라서 증명 지도가 학생들의 관찰이나 실험을 통해서 보다 의

미있게 이루어지기 위해서는 충분한 시간이 확보되어야 한다고 본다.

둘째, 본 연구 중 많은 학생들이 증명과정에서 사용되는 수학적 기호들을 처음 접하는 것은 아니지만 완전히 이해하지 못하는 경우가 많아서 말로는 증명을 설명할 수 있지만 글로 쓰지 못하는 경우가 있었다. 중학교 2학년 이전에 학생들은 기하를 배우면서 수학적 기호에 대해서도 배우지만 학생들이 수학적 기호를 충분히 익히거나 수학적 기호를 사용해서 자신의 생각을 표현해 보는 기회가 적었던 것 같다. 학생들이 수학적 기호나 용어를 적절하게 사용할 수 있는 능력은 증명 학습에서 뿐만 아니라 수학 학습 전반에 걸쳐서 중요하게 여겨지며, 학생들의 수학적 의사소통 능력의 신장에도 중요한 역할을 한다. 따라서 증명 지도 이전에 학생들이 수학적 기호나 용어 등의 사용에 익숙해질 수 있는 기회가 꾸준히 제공되어야 한다.

셋째, 본 연구를 실시하면서 수업을 진행한 교사는 Freudenthal의 교수 방법에 대한 교사 연수를 2회 받았고 Freudenthal의 교수 방법을 적용하여 연립방정식의 내용을 지도한 경험이 있었다. 그러나 학생들의 경우에는 수업 방법이 기존의 학습 방법과 달라서 새로운 수업 방식에 적응하는데 어려움을 토로하는 학생들이 발견되었다. 그들의 대부분은 문제 상황을 해결하기 위해 노력을 하기 보다는 교사의 답을 요구하는 경우가 많아서 교사가 수업을 진행하는데 어려움을 겪기도 했었다. 그러나 교사의 적절한 발문 활동이나 안내에 따라 차츰 학생들은 새로운 수업 방식에 적응하게 되었고 오히려 보다 적극적으로 증명 학습에 참여하려는 학습 분위기가 조성되는 것을 볼 수 있었다. 따라서 안내된 재발명 원리를 적용한 지도 방안이 보다 효과적으로 사용되기 위해서는 안내된 재발명 원리에 대한 교사의 충분한 이해와 철저한 '사고실험'이 요구된다.

참 고 문 헌

강흥규 (2005). Freudenthal의 재발명 방법에 근거한 초등 수학영재 지도 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 9(1), pp.31-41, 서울: 한국수학교육학회.

교육부 (1999). 중학교 수학과 교육과정 해설, 교육부 고시 제 1997-15호.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2008). 수학교육과정과 교재연구, 서울: 경문사.

김연식 · 정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 수학교육학연구 7(2), pp.1-23, 서울: 대한수학교육학회.

김응태 · 박한식 · 우정호 (1985). 증보 수학교육학개론, 서울: 서울대학교 출판부.

나귀수 (1997). 중학교 2학년 기하 증명 수업 분석, 수학교육연구 7(2), pp.293-302, 서울: 대한수학교육학회.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로, 서울대학교 박사학위 논문.

류성림 (1993). 중학생들의 기하증명 능력과 오류에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논

문.

류희찬・조완영 (1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어의 활용, 수학교육학연구 9(2), pp.419-438, 서울: 대한수학교육학회.

박은조 (2004). 수학 교사들의 증명에 대한 인식 조사, 한국교원대학교 석사학위 논문.

박인희 (2005). 증명이전의 귀납활동이 증명능력 및 증명학습태도에 미치는 영향 : 중학교 2학년 기하 단원에서, 한국교원대학교 석사학위 논문.

서동엽(1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문.

서동엽(1992). 증명 지도에서 직관의 역할에 관한 연구, 수학교육학연구, 2(2), pp.105-115, 서울: 대한수학교육학회.

서지현(2005). 기하 증명의 학습에서 중학생들이 겪는 어려움에 관하여, 건국대학교 석사학위논문.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호(2007). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이용민(2000). 중학교 기하영역 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명방법에 관한 연구-중학교 2학년을 중심으로-, 한국교원대학교 석사학위 논문

한혜숙・신현성 (2008). 증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습, 한국학교수학회논문집 11(2), pp.299-314, 충남: 한국학교수학회.

홍인선・현진오 (2003). 기하 증명에 관한 의식과 증명 과정의 오류 경향 연구-중3 학생을 중심으로, 백록논총 5(1), pp.149-165, 제주도: 제주대학교 사범대학 교육과학연구소.

황혜정・나귀수・최승현・박경미・임재훈・서동엽 (2007). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

황희숙 (2001). 비판적 사고력 증진을 위한 교과 통합적 사고력 훈련의 효과, 교육학연구 39(3), pp.187-214, 서울: 한국교육학회.

Campbell, D., & Stanley, J. (1963). *Experimental and quasi-experimental designs for research,* Boston: Houghton Mifflin.

Edwards, L. (1997). Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, pp.187-215.

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof,* New York, NY: Teachers of college.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (2008). 프로이덴탈의 수학교육론 (우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화 역). 서울: 경문사(원저는 1991에 출판).

Galindo, E. (1998). Assessing justification and proof in geometry classes taught using dynamic software. *The Mathematics Teacher*, 91(1), pp.76-81.

Marrades, R., & Gutie´rrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp.87-125.

Roodhardt, A., de Jong, J. A., Brinker, L. J., & Middleton, J. A. (1997). Triangles and Beyond. In T. A. Romberg (Ed.), *Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5 - 8*. Chicago, IL: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Scher, D. (1996). Folded paper, dynamic geometry, and proof: A three-tier approach to the conics. *The Mathematics Teacher*, 89(3), pp.188-193.

Tall, D. O. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham(Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.105-119). MAA Notes Series #19.

A study on the teaching of proofs based on Freudenthal's guided reinvention principle

Han, Hyesook
Korea University Center for Curriculum and Instruction Studies, Anam-dong Seongbuk-Gu, Seoul, 136-701 Korea.
E-mail : hanhyesook@korea.ac.kr

Moon, Su-jin
Donggwang Middle School187 Baekchonri Toseong-myeon Goseong-gun Kangwondo, 220-831 Korea.
E-mail : 0125sujin@hanmail.net

The purposes of the study were to develop instructional materials based on Freudenthal's guided reinvention principle for teaching proofs and to investigate how the teaching method based on guided reinvention principle affects on 8th grade students' ability to write proofs and learning attitude toward proofs. Teaching based on guided reinvention principle placed emphasis on providing students opportunities to make a mathematical statement and prove the statement by themselves throughout various activities such as exploring, conjecturing, and testing the conjectures. The study found that students who studied proving with instructional materials developed by guided reinvention principle showed statistically higher mean scores on the posttest than students who studied by a traditional teaching method depending on teacher's explanation. Especially, on the posttest item which requested to prove a whole statement without presenting a picture corresponding to the statement, a big difference among students' responses was found. Many more students in the traditional group did not provide any response on the item. According to the results of the questionnaire regarding students' learning attitudes, the group who studied proving by guided reinvention principle indicated relatively more positive attitudes toward learning proofs than the counterparts.

---

* ZDM classification : E53
* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97D10
* Key Words : proof teaching, ability to write proofs, learning attitude toward proofs, Freudenthal's guided reinvention principle

<부 록 1>

Ⅱ. 도형의 성질	학습지 8	2학년 반 번	이름
학습주제	직각삼각형의 합동조건		교과서 p.

♡ 철우는 탁자를 만들고 있습니다. 그런데 다리부분이 약한 것 같아서 지지대를 덧붙이려고 한다. 왼쪽 부분을 붙이고 나서 다시 오른쪽을 붙이려고 합니다.

1. 어떻게 하면 네 개를 모두 똑같이 만들 수 있을까요?
여러분이 직접 지지대를 위의 그림에 그려보세요.

- 내 생각 -	- 선생님 또는 친구 생각 -

♡ 철우는 먼저 붙인 지지대의 길이를 측정하여 똑같은 길이의 지지대를 3개 더 만들었습니다. 그리고 다리에 지지대가 붙어있는 곳의 길이를 측정하였습니다. 그리고 다리와 지지대가 이루고 있는 각을 측정하였습니다.

2. 위에서의 활동으로 알 수 있는 사실을 써 보세요.

- 내 생각 -	- 선생님 또는 친구 생각 -

3. 위에서 발견한 성질이 항상 성립한다고 말할 수 있을까요? 그렇다면 그 이유를 설명해보세요. 혹시 성립되지 않는 경우가 있는지 생각해 보세요.

- 내 생각 -	- 선생님 또는 친구 생각 -

4. 내가 찾은 성질이 참인 명제인지 증명을 시작해봅시다.

1) 명제 :

① 명제를 가정과 결론으로 나누고, 수학적 기호로 나타내어 보세요.

가정 : ____________________ -> ____________________

결론 : ____________________ -> ____________________

② 가정을 그림으로 그려보세요. (물론 기호를 써야죠.)

③ 결론을 다른 색으로 표시해 보세요.

④ 앞에서 위의 성질을 참이라고 밝히기 위한 활동을 그림으로 그려 보세요.

⑤ 결론으로 가기 위한 중요한 사실을 쓰세요.

(그림그리기)

⑥ 증명과정에서 쓰면 안 되는 사실이 있나요?

⑦ 증명해 봅시다.

- 나의 증명 -	- 선생님 또는 친구의 증명 -

2) 명제 :

① 명제를 가정과 결론으로 나누고, 수학적 기호로 나타내어 보세요.

가정 : ______________ -> ______________

결론 : ______________ -> ______________

② 가정을 그림으로 그려보세요. (물론 기호를 써야죠.)

③ 결론을 다른 색으로 표시해 보세요.

④ 앞에서 위의 성질을 참이라고 밝히기 위한 활동을 그림으로 그려 보세요.

(그림그리기)

⑤ 결론으로 가기 위한 중요한 사실을 쓰세요.

⑥ 증명과정에서 쓰면 안 되는 사실이 있나요?

⑦ 증명해 봅시다.

- 나의 증명 -	- 선생님 또는 친구의 증명 -

5. 직각삼각형의 합동조건과 삼각형의 합동조건은 어떻게 다르다고 생각하는지 써보세요.

<부록 2> 사후검사 문항 중 오류 분석 과정에 사용된 문항*

12. 다음 성질에 대하여 아래 물음에 답하여라.

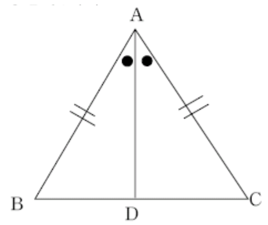
성질 : 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

(1) 가정과 결론을 기호로 나타내고 증명을 하여라.

(가정)

(결론)

(증명)



13. 오른쪽 그림의 두 직각삼각형 ABC, DEF에서

$\overline{AB} = \overline{DE}, \angle A = \angle D$ 이면

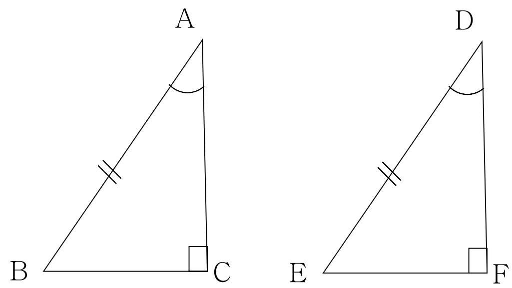
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

임을 다음 순서에 따라 증명하여라.

(1) 가정을 기호로 나타내어라.

(2) 결론을 기호로 나타내어라.

(3) 증명하여라.



14. 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형임을 증명하여라.

---

* 서동엽(1999)이 개발한 증명 수행의 기본요소를 측정하는 '증명의 의미와 관련된 요소에 대한 조사문항' 중 일부이다.