韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 1호, 2009. 2. 109-128

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 1, Feb. 2009. 109-128

방정식의 문제 만들기 활동에서 문제구조를 중심으로 문제해결에 관한 연구

고 상 숙 (단국대학교)
전 성 훈 (단국대학교 교육대학원)

2006년에 발표된 7차 수학과 개정시안의 교수학습활동에서는 더욱 확장된 문제해결능력과 창의적 사고로 나아가도록 문제 만들기 활동을 포함하였다. 본 연구는 Polya의 문제 만들기 전략에 따른 문제 만들기 수업을 통해 학생의 문제해결 과정을 이해하고 효과적인 교수 학습을 논의하고자 하였다. 학생의 학습과정을 조사하는 것이므로 정성연구방법을 선택하여 중학교 방정식 내용을 중심으로 5차시에 걸친 문제 만들기 활동을 구성하여 중학교 2명의 협력학습과정을 관찰ㆍ면담을 실시하였다. 연구결과로는 첫째, 문제해결에서 주어진 것과 구하려는 것을 알고 관계식을 세워서 알고 있는 수학적 지식을 바탕으로 풀이하는 과정에서 수학성적이 우수한 학생은 문제구조를 잘 파악하고 유사한 문제 또는 새로운 문제를 만들 때 자유롭게 변인을 구성하였는데 이렇게 문제의 외적구조를 정확히 파악한 배경에는 문제의 내적구조와 관련깊은 대수적 사고가 잘 형성된 결과임을 알 수 있었다. 둘째, 문제를 해결할 때 주어진 것과 구하려는 것의 각각의 변인을 바꾸거나 첨가하여 새로운 문제를 구성할 때 학생들은 자신이 해결한 문제를 다시 보게 되어서 반성적 사고를 이끌어 낼 수 있는 기회가 되었다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

제 7차 교육과정은 21세기 정보화 세계에 살아갈 능동적이고 창의적인 인간을 양성하기 위해서는, 지식과 기능을 종합하여 새로운 상황에서 문제를 효과적으로 해결하는 능력, 즉 문제해결력을 신장시켜야한다고 강조하고 있다. 2006년에 발표된 7차 수학과 개정시안의 교수ㆍ학습활동에서는 그 동안 강조해왔던 문제해결 능력을 기르는 것에 그치지 않고 더욱 확장된 문제해결능력과 창의적 사고로 나아가도록 문제만들기 활동을 포함하였다(cf. 교육인적자원부, 2006). 1980년이래 문제해결에 관한 연구가 많은 진전을 이루었음에도 불구하고, 학교 수학교육의 현장에서는 문제해결 교육이 차지하는 비중이 거의 없고 올바른 문제해결 교육이 이루어지지 못하는 실정이다(최지숙 2005). 진도를

* 접수일(2009년 1월 27일), 심사(수정)일(2009년 1월 31일), 게재확정일자(2009년 2월 5일)
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 문제해결, 문제만들기, 문제구조, 외적구조와 내적구조, 대수적 사고, 정성적 연구.

우선시하는 전통적 학교에서는 여전히 학생 스스로 문제를 재구성하고 문제의 구조를 파악하는 기회가 주어지지 않고 교사의 풀이를 받아들일 뿐이다. 이러한 수동적인 입장이 아닌 학생들이 학습에 직접 참여하여 활동하는 적극적인 자세를 가져야 하는데 이를 해결하기 위하여 문제 만들기 활동이 필요하다. 문제 만들기 활동은 흥미와 관심을 이끌어내어 창의력과 사고력의 육성의 가능성을 제시하고 있기 때문에 문제 만들기 활동 수업은 문제 해결력 신장에 효과적인 수학 수업 지도 방안이다(교육인적자원부, 2006).

오래 전에 Brown & Walter(1983)는 학생들이 문제를 받아들이기만 하는 소극적인 자세가 아니라 그들이 그들 학습에 직접 참여하여 활동하는 적극적인 자세를 가져야 한다고 했으며 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 문제 만들기 활동이 필요하다. Polya(1957)는 문제 만들기를 문제를 해결하는 과정에서 이용되는 하나의 전략으로 보고, 문제 만들기는 문제를 새롭게 재구성하는 것이고, 문제를 해결하고 난 다음, 반성 검토 단계에서 그 문제의 의미와 이해를 심화하기 위한 중요한 수단이라고 보았다. 문제 만들기 활동은 학생들이 직접 문제를 만들어서 동료들과 서로 비교해보고, 토론을 통하여 수학적 지식을 구성하는 수업형태가 권장되기 때문에 기존의 수학적 지식을 습득하는 방법에 비하여 학습자의 자율성이 보장되고 능동적인 참여를 이끌어 낼 수 있다는 점에서 문제해결력 향상에 많은 도움을 준다. Kilpatrick(1987)은 문제 만들기를 학교 수학 교육과정의 중요한 일부분으로 파악하고 학생들 스스로 수학문제를 발견하고 만들어가는 경험이 모든 학생을 위한 일부분이어야 한다고 주장하였다.

또한, 문제 만들기를 경험한 학생들이 문제 만들기를 경험하지 않은 학생들보다 문제해결력과 수학 학습 태도가 긍정적으로 변화된다고 여러 연구들이 보고되었다(예를 들어, 나철영, 2001; 이지혜, 2005; 우경희, 2006; 문현정, 2006). 나철영(2001)에 따르면 학생들은 자기가 만든 문제를 다른 사람과 의논하면서 이미 형성된 잘못된 개념을 파악하여 치유할 수 있게 된다. 즉 문제를 수동적으로 해결하는 것이 아니라 학생들이 새로운 관점에서 다양한 방법을 이용하여 문제를 만들어 가는 활동을 통해 수학을 재발견하여 자신감을 갖게 된다고 한다. 이 처럼 문제 만들기 활동은 주어진 문제에 대한 깊은 이해를 돕고, 수학문제 해결에 대한 지식을 확장시키며, 학생들의 흥미와 관심을 이끌어내어 창의력과 사고력의 육성의 가능성을 제시하고 있기 때문에 문제 만들기 활동 수업은 문제해결력 신장에 효과적인 수학 수업 지도방안이 될 수 있음을 보고하였다.

본 연구에서는 연구 대상을 서로 다른 수학적 능력을 보이는 중학교 3학년 2명의 학생의 협력 수업으로 문제 만들기 수업을 진행과정에서 학생들이 문제의 구조파악하는 과정을 조사하고자 하였다. 특히 방정식의 활용 부분은 분석력, 수식표현능력, 문제해결능력 등이 동시에 요구되어 학생들의 대수적 사고 능력을 종합적으로 발휘하는데 도움을 주며 학생들의 창의력 향상과 논리적 사고의 향상에 도움을 준다(이상희 2005)고 밝힌 바 있다. 이에 연구에 사용할 학습 내용은 7-(가)와 9-(가)에서 학습하는 방정식단원을 적용하였다.

따라서 중학교 방정식을 중심으로 Polya의 문제 만들기 전략에 따른 문제 만들기 수업이 주어졌

을 때 학생들의 문제구조인식과정을 조사하고 그 발달과정을 이해함으로써 학생들의 문제 해결력 향상을 위한 효과적인 지도방안을 모색하고자 하였다.

2. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 제한점을 가지고 있다. 본 연구는 서울특별시 OO중학교 3학년 학생 2명을 대상으로 관찰, 면담에 의한 학생들의 학습과정을 이해하기 위한 사례연구이므로 다른 연구자나 다른 대상을 통한 연구에서 동일한 결과를 도출 하는데 한계가 있다.

3. 용어의 정의

(1) 문제 만들기

문제 만들기란 problem posing(Brown & Walter, 1983)을 번역한 것인데 학자에 따라 problem generation, problem formulation 등으로 다양하게 쓰인다. 이것은 두 가지 관점으로 생각할 수 있는데 하나는 '문제 만들기'로서 주어진 수학적 문제를 보고 새로운 문제를 바꾸어 나가는 활동이고, 다른 하나는 '문제 꾸미기'로서 현실적 상황을 수학적 문제로 바꾸는 활동, 즉 상황을 수학적으로 해결하는 활동이라 할 수 있다(주정언, 2002).

본 연구에서는 이 두 가지 관점을 모두 종합하여 수학적인 문제나 상황으로부터 조건의 일부 혹은 전부를 바꾸어 문제를 다르게 구성하거나, 재진술하여 새로운 문제를 만드는 것으로 정의한다.

(2) 문제의 구조

수학 문제의 구조는 외적 구조와 내적 구조로 나눌 수 있는데 외형적인 특징을 나타낼 수 있는 변인으로는 주어진 것 들(가정), 구하는 것(결론), 문제 풀이의 근거가 되는 지식들(정리들, 개념들, 공리들), 그리고 문제풀이의 절차(알고리즘)로 나눌 수 있다. 내적 구조는 주어진 것, 구하는 것, 해결과정에서 얻어진 성질들 각각을 문제 해결 과정의 요소로 규정을 하고, 이 요소들 사이의 관계가 내적 구조에 해당한다(한인기 2001).

Ⅱ. 이론적 배경

1. Polya의 문제해결 과정과 문제 만들기

Polya는 문제 만들기에 대하여 특별히 언급하고 있지는 않으나 그의 문제 해결 단계에 문제만들기의 방법이 소개 되어 있다. Polya(1957)의 문제 해결 단계는 '문제의 이해', '계획', '실행', '반성의 4 단계로 나누고 있다. 본 연구에서는 이 Polya의 문제해결과정에 문제구조를 고려한 문제 만들기 활

동을 구체적으로 부각하여 재설명하였다.

(1) 문제의 이해

문제의 이해 단계에서는 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제를 분석하는 것이 이 단계에 해당한다.

(2) 계획

문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로서 여러 가지 문제해결 전략을 이용하게 된다. 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조문제를 고려해야 한다. 문제의 조건이나 자료, 가정이나 결론을 변형하여 보조문제로 작성하여 해결해봄으로써 원래의 문제를 해결할 수 있는 단서를 찾는 방법이다. 문제를 풀기 전에 이루어지는 문제제기 활동, 문제 만들기 활동을 의미한다. 보다 문제 해결에 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 내는 것뿐만 아니라 관련된 문제를 만들어 내야 한다.

(3) 실행

실행단계에서는 풀이에 대한 계획을 실행하고 매 단계를 점검하고 각 단계가 정확한지를 분명히 확인해보며 정당화하는 활동을 한다.

(4) 반성

문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 본다. 여기에서 원문제에 없는 새로운 개념을 부가하여 만드는 것과 원문제에서 미지인 것을 주어진 것으로 생각하고 원래의 자료 중의 하나를 미지인 것으로 보는 것, 즉 주어진 것과 미지인 것의 역할을 바꾸어 새로운 문제를 이끌어 내는 방식을 제시하였다. 또 다른 한 가지는 제시된 문제로부터, 미지인 것을 그대로 두고 그 나머지 부분(자료와 조건)을 바꾸거나, 자료를 그대로 두고 그 나머지(미지의 것과 조건)를 바꾸거나, 미지인 것과 자료를 모두 바꾸는 방법을 제시하였다(이석희 1996).

2. 문제의 구조

한인기(2001)는 그의 연구에서 다음과 같이 수학문제의 구조를 설명하였다. 모든 독립된 개체들이 외형적인 특징과 내면적인 특징을 가지고 있듯이 수학문제도 객관화된 대상으로써 외형적인 특성과 내적인 특성들을 가지고 있다. 예를 들어, Polya(1970)는 수학 문제를 작도 문제, 증명 문제, 계산 문제 등으로 분류했는데, 이것은 수학 문제 자체의 외적인 특성에 근거한 분류라고 할 수 있다. 임의의 대상들은 무수히 많은 내적인, 그리고 외적인 특성들을 가지고 있으며, 연구의 목적에 따라 필요한 특성들을 추상하여 문제를 분류하기도 하고, 문제의 특질을 기술하기도 한다. 특히, 어떤 대상의 내적인, 그리고 외적인 특성들은 개별적으로 존재하는 것이 아니라 서로 긴밀한 관련성을 가지고 있기

때문에, 내적인 특성이나 외적인 특성들은 가각 개별적인 구조를 이룬다고 할 수 있다. 이로부터, 우리는 수학 문제의 내적 구조와 외적 구조라는 개념을 추출할 수 있다. 수학 문제의 외적 구조의 특성은 주어진 것(가정), 구하는 것(결론)을 포함하고 있고 이 두 가지 요소는 수학문제의 중요한 외형적 특성들 중의 일부가 된다. 또한 문제해결의 근거가 되는 정리나 원리들 그리고 문제 풀이에는 문제 해결의 근거가 되는 지식이 중요한 요인으로 포함되어 있다. 한편 문제 풀이 자체에서 문제 해결의 근거가 되는 지식과 함께 중요한 것이 문제해결을 위한 절차, 알고리즘이다. 관련된 수학적 개념이나 정리들을 정확히 안다고 하여, 문제의 풀이를 구성할 수 있는 것은 아니다. 살펴본 바와 같이, 수학 문제의 외형적인 특성을 나타낼 수 있는 변인으로 주어진 것들(가정), 구하는 것(결론), 문제 풀이의 근거가 되는 지식들(정리들, 개념들, 공리들), 그리고 문제풀이의 절차(알고리즘)이다. 네 가지 변인들을 중심으로 문제의 외적 구조를 다음과 같이 기호화하여 규명할 수 있고 이는 러시안 학자 깔야긴(1977)의 접근과도 일치한다고 한인기는 언급하였다.

A: 수학 문제에서 주어진 것들, 가정들
B: 풀이에 대해 근거가 되는 개념들, 명제들, 공리들
C: 풀이에 포함된 결론을 유도하는 절차들, 알고리즘들
D: 결론들, 구하는 답들.

문제에서 알려지지 않은 변인들은 x, y, z등과 같은 문자를 나타내도록 하면 외적 구조를 ABCD와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 만약 C에 해당하는 절차나 알고리즘이 알려지지 않고 다른 변인들이 알려진 경우, 우리는 이 문제의 외적구조를 ABxD로 기술할 수 있다. 그러나 대부분의 방정식문제는 결론을 구하는 것이 필요하므로 본 연구에서 다루어지는 문제의 외적구조는 ABCx 유형이 주류를 이룸을 알 수 있다.

수학 문제의 내적 구조라면 가장 먼저 떠오르는 것이 문제의 풀이과정에서 나타난다. 주어진 것, 구하는 것, 해결 과정에서 얻어진 성질들 각각을 문제해결 과정의 요소로 규정을 하고 얻어진 요소들과 이들 사이의 관계가 수학 문제의 내적 구조에 해당한다. 문제의 내적 구조는 문제의 풀이 방법에 의존하기 때문에, 그 내적 구조는 어떤 방식으로, 어떤 전략으로 문제를 푸는가에 의해 다른 내적 구조의 형태를 취할 수 있다. 즉, 한 문제가 다양한 내적인 구조를 가지고 있기 때문에, 서로 다른 교수-학습 상황에서 활용되었을 때, 다양한 의미를 띄게 된다(한인기 2001)고 묘사하였다.

한인기의 연구에서 내적구조는 주어진 문제의 변인간의 관계를 수형도를 통해 제시하였는데 본 연구에서는 내적구조는 이들 변인간의 관계를 파악하여 식을 세우는 것뿐만 아니라 더 나아가 새로운 문제를 만들어보는 과정이 필요하므로 이들의 관계만을 수형도로 나타내는 결과중심적인 것보다는 이들 관계를 이해하고 발전시키는 과정중심의 변화를 묘사하고자 하므로 이 과정에서 요구되는 대수적 사고에 초점을 두기로 하였다.

3. 방정식과 관련된 대수적 사고 요소

대수적 사고는 변수를 이해하여 양적인 관계를 파악하고 수학적으로 기호나 문자를 사용하여 표현하여 문제를 해결하는데 요구되는 사고인데 대수에서도 방정식의 학습에서 요구되는 사고요소를 우정호·김성준(2007)은 다음과 같이 기술하였다.

(1) 양을 비교하는 양적 추론

문제 상황에서 양이 어떻게 관련되어 있는가를 인식하여 방정식을 세우는 활동에서 같은 양을 등호를 이용해 나타내는 것이므로 양적 추론은 방정식 학습에서 중요한 사고 요소 가운데 하나이다.

(2) 대칭성 알아보기

Freudenthal(1983)은 대수에서 요구되는 사고 전략 가운데 하나로 대칭성을 강조하였는데, 방정식에서의 등호 해석과 동치 개념을 대칭성의 관점에서 해석하였다. 등호 해석은 방정식에서의 동치 개념과 연결된다. 방정식은 양변에 있는 서로 다른 형태의 문자식을 동치관계를 의미하는 등호를 사용하여 연결한 것으로, 이러한 동치관계를 파악하는 것은 방정식 풀이에서 중요한 역할을 하게 된다.

(3) 문제해결도구로 인식하기

문제 상황에 적합한 해결 전략을 선택하는 과정에서 방정식을 세워서 문제를 해결하는 전략이 보다 효과적인 전략이라는 것을 인식할 수 있어야 한다.

(4) 미지수

방정식에서 수와 문자를 연결하는 양으로 다루면서 문자의 변수측면을 인식하는 것이며 미지인 양은 미지수로 파악하는 것이다.

(5) 분석적 사고

분석적 사고는 방정식의 풀이에서 기본적인 사고로, 세운 방정식을 만족하는 값을 구하는 과정에서 요구되는 사고이다.

(6) 비례적 사고

방정식과 관련된 문제에서 사용된 비례관계를 이용하는 사고이다.

(7) 관계 파악 능력

미지인 양과 주어진 양을 파악하여 동치인 두 양으로 표현하고 비교하는 것은 방정식 풀이에서 기본이 된다. 방정식에서 이러한 관계를 적절히 파악하기 위해서는 식을 대상으로 보는 능력, 관계를 통해 양을 파악하는 능력, 문제 상황을 표현하기 위해 관점을 바꾸는 능력, 문제 결정 요소 간의 관계를 파악하는 능력이 요구되는 데 이러한 능력들은 모두 관계를 파악하는 능력에 따라 결정된다.

(8) 가역적 사고

방정식을 해결할 때 풀이과정뿐 아니라 해를 검산하는 과정 및 되돌아보면서 주어진 문제 상황을 반성적으로 종합하는 사고이다.

4. 선행연구의 고찰

지금까지 이루어진 문제 만들기에 관련된 선행연구들을 살펴보고자 한다. 백난영(2005)은 Polya의 문제 해결 과정과 임문규・정지호(1992)의 문제 만들기 단계, Brown & Walter의 'what if not' 전략으로 1) 문제 상황 제시→2) 문제 상황 이해→3) 조건 파악(조건 제시)→4) 조건 변경→5) 임시 문제 만들기→6) 추가 조건 변경→7) 문제 완성→8) 문제 해결→9) 학급 문제 선정 10) 학급 문제 해결→11) 문제 만들기 활동 반성으로 구성된 수업 모형을 구안 하였다. 박희진(2004)은 문제 만들기 활동은 문제 해결에 필요한 조건을 점검해 보고, 문제의 구성 요소 및 의미를 파악하는 문제 이해 능력과 문제해결을 위한 계획을 수립하고, 전략을 사용하는 실행 능력, 해결한 문제의 풀이 과정 및 답을 점검해 보는 풀이 반성 능력 향상에 긍정적인 영향을 미친다고 한다. 또 한 문제의 완성도 측면에서 볼 때, 문제 만들기 활동을 할수록 아동들이 만든 문제의 완성도가 비교적 높아지고 있음을 알 수 있었다고 하며 이는 문제 만들기 활동을 할수록 아동들의 문제 구성 요소에 대한 이해가 심화될 뿐만 아니라 만든 문제에 대한 정확한 확인 과정이 수반되었기 때문인 것이라고 주장한다. 송민정(2004)은 문제 만들기 활동을 한 학생들이 그 활동을 하지 않은 학생들보다 수학 학업 성취도에 있어 더욱 효과적임을 알 수 있고 수학 학습 태도면에서도 통계적으로 유의미한 차이가 있으며 흥미도면에서도 긍정적인 영향을 미치는 것으로 나타났다고 한다.

그러나 문제구조에 관한 연구는 한인기(2001)을 제외하고 거의 찾을 수가 없었고, 또한, 위에 언급된 문제해결 또는 문제 만들기, 수학화에 관한 선행연구의 대부분이 학습자료만을 개발하거나 이런 자료들의 효과의 유무를 알아보는 양적연구에 치중되어 있고 실제로 학생이 어떻게 문제해결 과정을 이루어 가며 이 과정에서 어떤 구체적인 교수학습 안내를 필요로 하는지 등을 파악할 수 있는 정성연구와 문제 만들기 수업의 모형에 관한 연구는 여전히 부족한 실정이다. 따라서 문제 만들기 수업을 통해 문제 해결력에 영향을 주는 문제의 구조 파악과 학생들의 수학화 과정을 분석하고 이해함으로써 현장의 문제 만들기 교수 학습을 안내하고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 문제 만들기 수업을 해나가는 과정에서 나타나는 학생들의 사고를 알아보기 위해 정성연구 방법을 사용하였다. 본 연구에서 정성 연구를 채택한 이유는 다음과 같다. 김선미(2006)는 정성연구가 행해져야 하는 목적을 세분화하였다. 첫째, 수학교육의 대상자가 다양한 학습 변인을 포함하고 있다면 단정적으로 가설을 세우거나 가정을 하기가 어렵다. 그렇기 때문에 이러한 다양성을 분석하기 위해서라도 정성 연구가 선행되어야 할 것이다. 둘째, 원인을 밝히고 해결하려는 데 있어서는 깊이 있는 분석이 필요하기 때문에 단순히 수학교육의 현장을 수치화해서 데이터를 산출하여 통계적으로 처리하는 양적 연구보다는 질적 연구가 적합하다. 셋째 , 학급에서 이루어지는 활동을 연구 내

용으로 할 경우 환경 변인을 포함해야 하기 때문에 정성연구가 타당하다. 넷째, 교사나 학생이 상호관계 측면에서 보면 숫자에 의한 결과 값으로 처리하는 것은 개별화 수업으로서의 보편성을 얻기에 무리가 있다. 따라서 개인적인 특성을 고려하고 상황과 환경을 변인으로 포함시킬 수 있는 정성 연구 방법이 효율적이라고 말할 수 있다(임명희 2007 재인용). 또한 질적 연구가 흥미롭고, 도전적이며, 중요하다는 것을 인식하고, 연구의 과정 각 시점에서 '왜', '어떻게', '그 결과가 무엇인가?' 등의 질문을 던져나가면서 기존의 연구에서 추구하던 '일반화' 대신에 일어나는 현상을 깊숙이 들여다보며 자료들을 해석하려고 하였다(고상숙·고호경, 2001).

1. 연구 대상

본 연구는 서울특별시 소재 OO중학교 3학년 학생 2명으로 제한하였다. 연구 대상 학생들의 특징은 다음과 같다. A학생은 컨설팅회사에 다니시는 아버지, 전업주부이신 어머니, 여동생이 있으며 컴퓨터에 관심이 많고 자유스런 분위기에서 공부하는 것을 좋아 한다. 전 교과 성적이 상위권에 속하며 특히 수학과 과학의 성적이 우수하고 활달하며 자신의 의사표현이 분명하고 수학문제풀이에 있어서 남과 다른 풀이방법을 쓰는 학생이다. B학생은 회사에 다니시는 아버지, 전업주부이신 어머니, 남동생과 살며 게임을 좋아하고 여럿이 어울리는 것을 좋아한다. 주의 집중을 잘못하며, 성적이 중위권에 속하고 매사에 긍정적이며 수학에서는 문장제 문제를 어려워하며 독창적인 사고보다는 배운 문제풀이법을 그대로 적용하는 편이다.

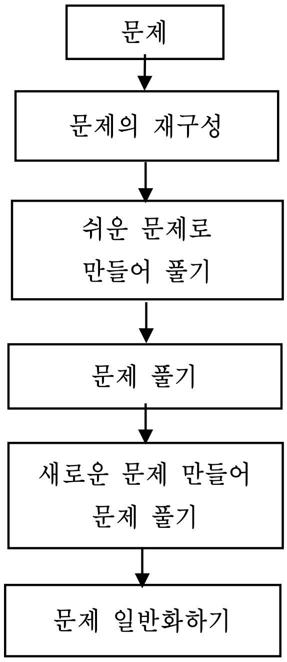
2. 연구의 도구

7-가의 방정식부분부터 9-가의 이차방정식 부분에 이르는 내용을 Polya의 문제 만들기 전략을 적용하여 문제 만들기 수업으로 구성 하였다. 수업은 5차시로 구성하였고, 각 차시에 문장제 문제 2문제씩 수업시간은 40분으로 충분하게 새로운 문제를 만들 수 있는 시간을 주었다. 수업 형태는 자유스러운 분위기에서 학생들이 문제를 풀고 만들 수 있도록 발문을 하며 진행하였다. 수업에 쓰인 지도안의 구성은 Polya의 문제해결과정을 바탕으로 1)문제→2)문제의 재구성→3)쉬운 문제로 만들어 풀기→4)문제 풀기→5)새로운 문제 만들어 문제 풀기→6)문제 일반화하기로 구성하였다. Polya의 '문제이해'단계를 '문제의 재구성' 단계로 '계획의 작성'단계에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때 사용하는 보조 문제를 고려하는 부분의 내용을 '쉬운 문제로 만들어 풀기'로 '계획의 실행'단계는 '문제 풀기'로 '반성'의 단계는 '새로운 문제 만들어 문제 풀기'와 '문제 일반화하기'로 구성하였다. '문제 일반화하기'단계를 반성적 사고를 위해 마지막에 구성하였다. '문제의 재구성' 단계는 학생들이 문제의 이해를 돕기 위해 구성하였고 '쉬운 문제로 만들어' 풀기 단계에서는 문제가 어려울 때 문제의 구조를 이해하는데 도움이 되는 문제 만들기를 하도록 기회를 제공하기 위해서 고안되었다.

또한 우정호(2000)는 내용과 관계가 풍부한 상황으로부터 구조를 발견하고 이로부터 점차적으로 비약한 구조로 나아가야 하며 수학이 상식적인 현실에 기초를 두어 구성되지 않고 부과되면 일상경험과 학교경험을 분리시키는 투과성 없는 막이 형성된다고 주장하였다. 따라서 학생들에게 친밀감을 주기위해 역사 속에서 다루어졌던 방정식문제를 포함하였다. '문제 일반화하기' 단계로 반성적 사고를 통해 수학적 사고수준 이루어지도록 구성하였고 이 과정을 통해 학생들의 변화를 살펴보았다. 아래 표는 본 연구에서 사용할 문제 만들기 활동의 차시별 구성에서 문제 만들기 활동의 과정을 간략하게 요약한 것이다.

<표 III-1> 문제 만들기 활동 수업의 차시별 구성

차시	학습내용	문제내용(역사발생학적 원리)
1	일차방정식	첫 번째 문제는 간단한 일차방정식을 작성할 수 있는지를 묻는 문제이고 두 번째 문제는 1700년경에 쓰여 진 고대 이집트의 '린드 파피루스'에 실린 것으로 '아하'문제로 불려 지기도 하는 가장 오래된 방정식 문제를 변형하여 만들었다.
2	일차방정식 연립방정식	첫 번째 문제는 유클리드의 '그리스 시화집'에 있는 사과를 나누어주는 문제를 이용해서 만든 문제이고 두 번째 문제는 '구장산술'의 제7장 영부족에 있는 문제를 이용해서 만든 문제이다.
3	이차방정식	일상생활에서 일어날 수 있는 간단한 이차방정식을 작성하는 문제이다.
4	이차방정식	첫 번째 문제는 도형의 넓이와 관련된 이차방정식 문제이고 두 번째는 '린드 파피루스'에 나와 있는 이차방정식 문제의 변형이다.
5	이차방정식	첫 번째 문제는 고대 바빌로니아인들의 문제를 이용해서 만든 문제이고 두 번째 문제는 도형의 부피와 관련된 이차방정식 문제이다.



<그림 III-2> 문제 만들기 활동의 과정

3. 연구 절차 및 분석

(1) 연구의 설계 : 2008. 07. 02 - 2008. 08. 30
(2) 사례연구 대상자 선정 : 2008. 09. 12
(3) 사례연구 : 2008. 09. 20 - 2008. 10. 19.
(4) 사후 면담 : 2008. 10. 19.
(5) 논문 작성 ; 2008. 09. 02 - 2008. 11. 18.

중학교 학생 2명의 협동수업으로 방과 후 이루어진 수업의 전 과정은 오디오 녹음을 하였고 수업 진행 후 녹음된 내용을 차시별로 전사하였고 분석을 위해 전사한 내용은 코드를 부여하여 정리하였다. 차시는 1에서5로 교사는 T, 학생은 각각 A, B로 각자의 발언은 번호로 정리하였다. 이 때 교사는 연구자 및 참여자로서 연구를 수행하였는데 학생의 반응에 대한 의도를 이해하기위해 노력하며 진행을 안내하였다. 또한 연구자는 연구를 시작하기 한 달 전부터 이 학생들과 주기적으로 만나 서로에 대한 친밀감을 형성하였다.

연구목적에 대한 결과를 얻기 위해 먼저 문제 만들기 활동에서 문제구조파악을 중심으로 학생들의 반응과 교사의 안내에 초점을 두었다. 문제구조 파악을 위해서는 한인기(2001)의 연구에서 인용된 외적구조를 기술하고 문제를 해결하기 위해 학생들이 이 구조의 어떠한 변인의 변화를 시도하고 교사는 학생을 돕기 위해 어떠한 발문을 하였는가 그리고 그 결과 어떤 결과가 나타냈는가를 관찰하고 서술하였다.

이렇게 수집된 자료에 대한 분석의 근거는 일정비교분석법에 의해 두 학생 간 반응의 차이점을 주목하고 학생들의 반응을 이론적 배경의 분석틀을 바탕으로 전체적인 흐름과 과정에 초점을 두고 그 배경을 이해하는데 주력하였다. 그 결과 제 4장의 연구결과에서 제시되었듯이 학생들은 문제를 자신의 학습수준에 따라 서로 다르게 재구성하였으며, 새로운 문제를 만들고 일반화하는 과정도 서로 다르게 나타났다.

Ⅳ. 연구의 결과[1)]

1. 쉬운 문제로 바꿀 때 문제 구조(출처: 제 2차시 두 번째 문제)

학생들이 남긴 스캔자료를 연구결과에 대한 분석에 의미있는 부분을 발췌하였고 이해를 돕고자 수업의 담론 내용을 중간에 삽입하여 제시하였다.

◎ 문제

친구의 생일을 축하해주기 위해 선물을 사려고 한다. 9천원씩 내면 만천원이 남고, 6천원씩 내면 만6천원이 부족하다. 사람 수와 선물의 값은 각각 얼마인가?

① 문제 구조 파악 분석

문제의 구조-ABxy구조, 9천원씩 냈을 때의 상황을 하나의 식으로, 6천원씩 냈을 때 다른 하나의 식으로 된 연립방정식을 만들어 구하려는 것을 구함.

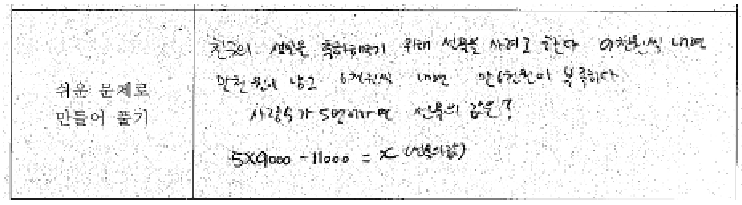
·주어진 것: 선물을 사는데 9천원씩 내면 만천원이 남고 6천원씩 내면 만 6천원이 남는다.

1) A, B 학생의 5차시 전체 학습과정은 전성훈(2008)에 수록되어있다.

·구하는 것: 사람 수와 선물의 값

·문제 해결에 필요한 방법: 연립일차방정식의 풀이법.

·문제 해결에 필요한 대수적 사고: 주어진 것들과 구하는 것의 관계 파악 능력.
미지수, 분석적 사고, 문제해결도구로 인식하기.



<그림 Ⅳ-1> 학생 B의 풀이

A학생은 문제의 구조를 이해하고 본 문제 풀이를 하였고 B학생은 관계 파악 능력에 어려움을 느껴서 주어진 문제(ABxy구조)에서 미지의 것 중 하나를 주어진 것으로 바꾸어 쉬운 문제(ABCx구조)를 만들어서 문제를 이해하였다. 다음은 학생, B가 쉬운 문제 만들기를 통해서 본 문제를 이해하는 담론이다.

2T015: 찬우야 이 문제가 어렵게 느껴지면 똑같은 유형의 쉬운 문제로 만들어봐.
2B010: 대충 다섯 명으로.
2T016: 그렇지 그렇게 단순화 하는 거야.
2A007: 나는 그냥 문제로 가볼까
2B011: 이렇게 해도 되요?
2T017: 간단해지네. 5곱하기9를 표현해봐. 4만5천원 쓰지 말고 그러면 만천원이 남는다고 그랬잖니. 그럼 어떻게 표현해야하지. 그게 선물 값이 되는 거지. 그러면 이렇게 쉬운 문제로 바꿨잖아. 이제 문제가 어떤 구조인지 알겠지? 풀 수 있겠어?
2B012: 오 이제 알겠어요.

② 새로운 문제 만들기 분석

본 문제가 연립 일차방정식의 문제라서 두 가지 경우가 제시되어 새로운 문제 만들기가 쉽지 않았는지 두 학생 모두 새로운 문제 만들기에 어려움을 느꼈던 것 같다. A학생은 본 문제와 같은 상황에 ‘한 명을 더 끼워서’라는 표현으로 바꾸어 문제를 구성하였고 풀이의 식에서 +1로 표현 하였다. 학생, B는 ‘쉬운 문제 만들어 풀기’ 보다 더 쉽게 문제를 만들었다. 문제만 읽어도 답이 나올 정도로 쉽게 문제를 만드는 경우가 발생하였다. 쉽게 문제구조가 파악되지 않았음을 알 수 있다. 문제구조에 2개의 미지수를 구해야하므로 미지수에 대한 개념을 재방문할 필요가 있음을 시사한다.

2. 창의성에서 문제구조 1 (출처: 제 4차시 첫 번째 문제)

◎ 문제

성찬이는 피자를 만들기 위해서 반죽하다가 반지름의 길이를 3cm 늘렸더니 넓이가 처음 피자의 2배가 되었다. 처음 피자의 지름의 길이는 얼마인가?

① 문제 구조 파악 분석

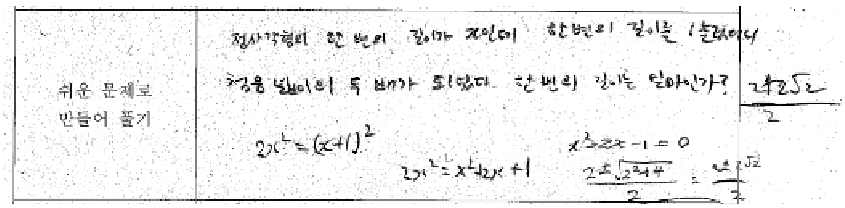
문제의 구조-ABxy구조, 주어진 내용으로 처음 피자의 반지름의 길이와 나중 피자의 반지름의 관계를 이용하여 두 피자의 넓이관계를 이차방정식으로 세워 푼다.

·주어진 것: 반지름의 길이를 3cm 늘렸더니 처음 피자의 2배가 되었다.

·구하는 것: 처음 피자의 반지름의 길이

·문제해결에 필요한 방법: 이차방정식 풀이법.

·문제해결에 필요한 대수적 사고: 주어진 것들과 구하는 것의 관계 파악 능력, 미지수, 분석적 사고, 문제해결도구로 인식하기.



<그림 IV-2> 학생 B의 풀이

A학생은 문제의 구조를 이해하고 바로 문제 풀이를 진행하였고 B학생은 처음 피자와 나중 피자의 관계식을 세우는 데 어려움을 느껴서 본 문제의 원의 문제(ABxy구조)를 간단한 정사각형으로 바꾸어 쉬운 문제(A′B′Cx′구조)를 만들어서 문제의 구조를 이해하였다. 다음 담론은 학생, B가 쉬운 문제로 바꾸는 과정이다. 역시 쉬운 문제로 바꿀 때 변인을 줄이는 방식이 사용되었다. 그러나 새로운 문제를 만들 때는 학생 B 나름대로 창의적인 아이디어를 제시하였다.

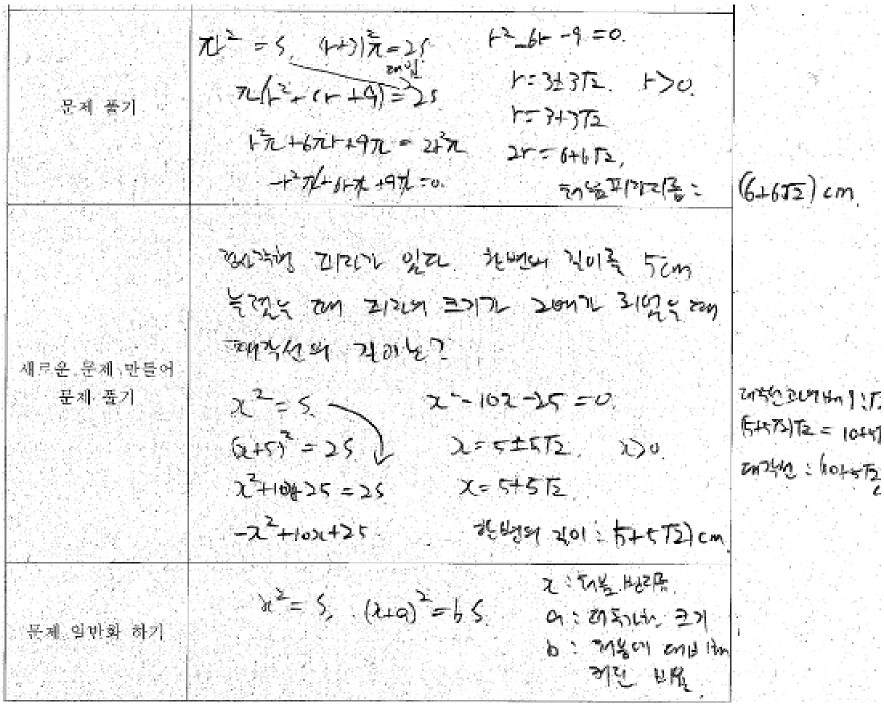
> 4T006: 찬우야 이 문제가 어려우면 문제를 단순하게 만들어봐. 원이 어려우면 다른 도형으로 해봐.
> 4B002: (한참 생각한 후에) 쉬운 문제로 만들면 정사각형의 한 변의 길이를 일만큼 늘렸더니 처음 넓이의 두 배가 되었다. 한 변의 길이는 얼마인가...이렇게 하면 어때요?
> 4T007: 좋은데.

② 새로운 문제 만들기 분석

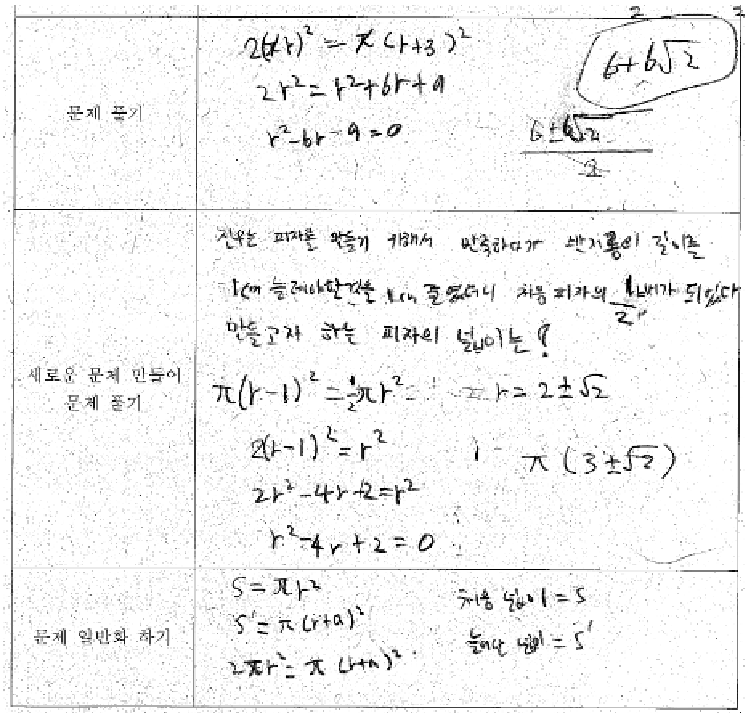
두 학생 모두 네모난 피자에 관한 문제를 만들었다. 처음 아이디어는 학생, A가 제시하였지만 학생, B는 좀 더 창의적인 문제를 만들었다. ‘1cm 늘려야 할 것을 1cm 줄였더니’라는 내용을 넣어서

문제를 만들었다. 그러나 학생, B는 문제의 답을 구하는 과정에서 반지름의 길이를 잘 구했으나 넓이를 구할 때 계산 실수로 틀린 답을 적었다. A학생은 한 변의 길이가 아닌 대각선의 길이로 바꾸어 문제를 만들었다. 여기서 학생, B는 알고리즘에서 계산처리가 미숙함을 알 수 있고 대신 학생 A는 제곱근의 알고리즘 처리가 매우 능숙하여 대조를 이룬다. 즉, 무리수를 포함한 수에 대한 계산처리 기술은 대수적 사고에서 기본 능력이 됨을 알 수 있다.

학생 A는 '문제 일반화하기'를 통해 정사각형일 때를 가정하여 일반화된 식을 세웠고 학생 B는 새로운 문제 풀이과정에 실수를 했을지라도 원이라는 가정하여 일반화된 식을 세워 제시하였다.



<그림 Ⅳ-3> 학생 A의 풀이



<그림 Ⅳ-4> 학생 B의 풀이

3. 창의성에서 문제구조 2 (출처: 제 3차시 두 번째 문제)

◎ 문제

혜린이네 학교에서 기말고사를 치르기 위하여 직사각형 모양으로 좌석을 배열하려고 한다. 가로 세로의 줄 수를 합하여 11줄로 하고, 30명이 앉을 수 있도록 좌석을 배열하려고 할 때, 가로의 줄 수는 몇 줄이어야 하는가? (세로의 줄수가 가로의 줄수보다 많다.)

① 문제 구조 파악 분석

문제의 구조-ABCx구조, 가로의 줄 수와 세로의 줄 수합과의 관계를 이용하여 이차방정식을 세우거나 근과 계수와의 관계를 이용하여 이차방정식을 세워 가로의 줄 수를 구함.

·주어진 것: 가로 세로의 줄 수의 합은 11, 30명이 앉을 수 있게 배열해야함.

·구하는 것: 가로의 줄 수.

·문제해결에 필요한 방법: 이차방정식 풀이법.

·문제해결에 필요한 대수적 사고: 주어진 것들과 구하는 것의 관계 파악 능력. 미지수, 분석적 사고, 문제해결도구로 인식하기.

문제가 합과 곱이 명확히 보여서 쉽게 느껴졌는지 두 학생 모두 쉬운 문제로 만들지 않고 문제를 풀었다. 합과 곱이 주어졌을 때 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 생각하여 풀었고 학생, B는 답을 예상하여 문제를 풀었다. 연구자의 의도는 가로와 세로의 합에서 하나에 대하여 이차방정식을 만들어 풀기를 기대 했는데 예상과 달리 두 학생이 다르게 문제에 접근하였다. 학생, A는 근과 계수와의 관계에 관한 문제를 많이 풀어 본 듯 보였다.

② 새로운 문제 만들기 분석

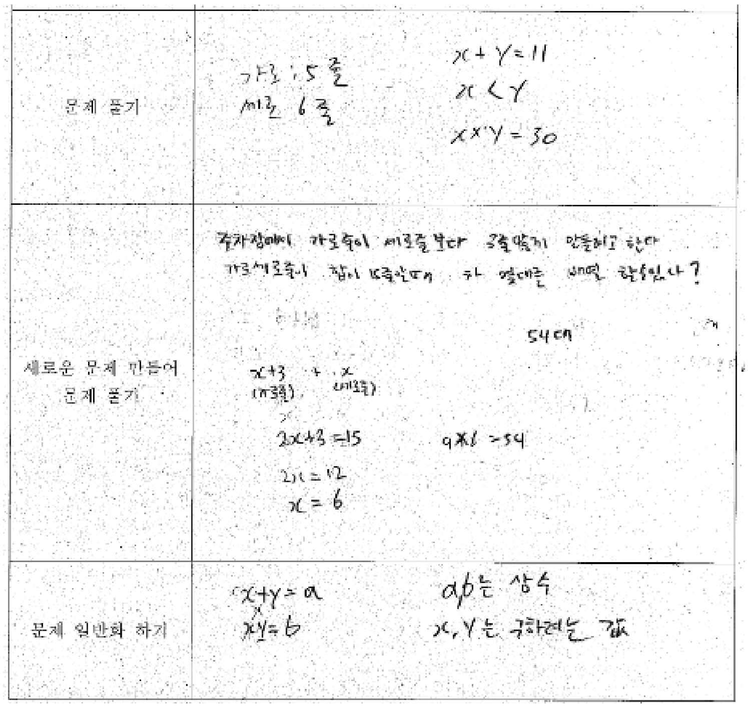
문제 풀기	근과 계수의 관계를 이용한다. $\beta>\alpha$. $x^2-11x+30=0$ $\alpha=5$, $\beta=6$. $(x-5)(x-6)=0$. 1) $\alpha=5$, $\beta=6$. 2) $\alpha=6$, $\beta=5$ 가로줄는 5줄이다.
새로운 문제 만들어 문제 풀기	교회에서 의자를 배치하는데 가로줄이 세로보다 3줄 많다. 총 70명이 앉도록 할때 가로줄는 몇줄인가? $x(x+3)=70$. 가로줄는 7줄. $x^2+3x-70=0$. $(x+10)(x-7)=0$. $x=7$.
문제 일반화 하기	$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ $\alpha+\beta$ = 줄의 합 $\alpha>\beta$. $\alpha\beta$ = 줄수의 곱.

<그림 Ⅳ-5> 학생 A의 풀이

A학생은 본 문제에서 가로줄과 세로줄의 합이 주어진 내용을 새로운 문제에서는 가로와 세로줄의 차를 주어진 내용으로 바꾸어 새로운 문제를 만들었다. B학생도 가로줄과 세로줄이 차를 주어진 내용으로 했지만 가로줄과 세로줄을 합을 주어진 내용으로 하여 일차방정식으로 새롭게 문제를 만들었다.

이 두 학생이 각자 만든 새로운 문제는 학생의 학습능력의 수준을 나타내고 있다. 학생, A는 주어진 문제와 같은 문제구조에서도 좀 더 복잡한 문제로 진행하고 있는 반면 학생 B는 좀 더 단순한 일차 방정식으로 구하고자하는 미지수를 줄여가고 있음을 알 수 있다. 따라서 학생, A는 상위수준으로 진행할 수 있는 준비가 되어가고 있음을 알 수 있고 학생 B는 이차방정식에서 분석적 사고와 미

지수에 대한 개념이 더욱 형성될 필요가 있다. 이러한 과정은 학생의 현재 수준을 이해하고 부족한 부분이 무엇인지를 파악할 수 있는 좋은 기회를 제공하므로 특히 교사에게 중요함을 알 수 있다.



문제 풀기	가로 : 5줄 세로 6줄 $x+y=11$ $x<y$ $x \times y=30$
새로운 문제 만들어 문제 풀기	주차장에 가로줄이 세로줄보다 3줄 많게 만들려고 한다 가로세로줄의 합이 15줄일때 차 몇대를 세워 할수있나? 54대 $x+3$ + x (가로줄) (세로줄) $2x+3=15$ $9 \times 6=54$ $2x=12$ $x=6$
문제 일반화 하기	$x+y=a$ $xy=b$ a, b는 상수 x, y는 구하려는 값

<그림 Ⅳ-6> 학생 B의 풀이

Ⅴ. 결 론

본 연구는 문제 만들기 활동을 통해서 나타나는 학생들의 반응과 교사의 안내를 중심으로 문제구조의 변화를 중심으로 문제해결과정을 조사하고자 하였다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 문제 만들기 활동 수업에서 문제 만들기와 문제 구조 파악의 관계를 살펴보면, 문제를 해결하는 데 있어서 주어진 것과 구하려는 것을 알아야 하는데 이것은 문제의 외적구조를 파악하는 과정이라 할 수 있다. 그 다음에 주어진 것과 구하는 것의 관계를 방정식으로 세워 알고 있는 수학적 지식을 바탕으로 문제를 해결해 나가는 과정은 문제 내적구조와 관련된다. 수학성적이 우수하지 못한 학생, B는 똑같은 구조의 문제(상황과 숫자만 바뀐 문제)를 보고 전혀 다른 문제라고 질문하는 경우를 볼 수 있는데 이는 문제의 구조를 정확히 파악하고 있지 못하고 있기 때문이다. 문제를 보고 바로 식을 세울 수 있을 만큼 쉬운 문제가 아니고 복잡해 보이거나 문제가 길면 수학학습이 부진한 학

생은 문제를 보고 어렵다고 생각하였다. 이러한 복잡하고 어려운 문제를 접근할 때 문제를 재구성(구하려는 것과 주어진 것을 정리) 해보고 단순하고 쉬운 문제로 바꾸어 문제를 만들어보는 과정이 문제의 구조를 파악하는데 도움을 주었는데 이 때 문제구조가 예를 들어 주어진 ABCx에서 A′BCx′의 변화를 통해 내적구조의 어려움을 극복하였다.

둘째, 문제 만들기 활동은 주어진 것과 구하려는 것의 각각의 변인을 바꾸거나 첨가하여 새로운 문제를 구성하는 과정에서 학생들은 풀어 본 문제를 다시 보게 되어서 반성적 사고를 이끌어 낼 수 있는 기회가 되어 문제의 구조가 더욱 확실하게 재인지할 수 있는 과정이 되었고, 마지막 단계인 '문제 일반화하기'에서 본 문제를 해결한 식을 일반적인 식으로 표현하여 좀 더 확장된 수학화로 안내됨을 알 수 있다.

마지막으로 문제 만들기 활동은 학생들에게 적극적인 참여를 이끌어 내는 것이 가장 중요하며 적절한 발문을 통해서 학생들의 창의적인 문제 만들기를 할 수 있도록 학습자 중심의 교수 학습 환경이 선행되어야 함을 알 수 있다. 또한, 주어진 문제에서 벗어나서 새로운 문제를 구성할 수 있는 기회를 제공할 때 협력학습을 통한 동료의 도움은 매우 효과적임을 알 수 있었다. 이러한 학습과정은 대수적 사고의 발달과정에서 학생이 무엇을 더 형성해야하는지 또는 학생이 충분히 준비된 것은 무엇인지를 알 수 있는 계기가 되어 교사에게 매우 중요한 정보를 제공한다.

결론적으로, 문제가 만들어지는 과정은 문제의 구조를 확실하게 이해하는 과정이 필요하며 이를 바탕으로 문제가 만들어지는 요소와 원리를 알게 되는 기회가 되고, 이를 해결하는 과정은 내적 구조가 확고해지도록 교사가 이해하고 안내하는 것으로써 그 과정을 학생의 창의성의 발달로도 안내할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 교사가 접근할 수 있는 전략으로는 문제의 외적구조를 단순화하고 또 내적구조에 필요한 대수적 사고를 학생의 수준에 따라 파악해서 이를 재인지할 수 있는 기회로 삼을 수 있도록 학습 환경을 제공해야한다. 본 연구를 통해 진정한 문제해결은 문제구조를 모르고 이루어 질 수 없으며 또한, 문제구조만으로는 진정한 문제해결을 기대하기는 어렵다. 따라서 문제구조는 문제해결과정에서 서로 별개의 것이 아니라 세부적으로 구분할 수 있을 뿐 서로 보완하는 필요충분조건이 됨을 알 수 있다. 따라서 앞으로 수학의 여러 다른 내용에서도 문제 만들기 활동은 꾸준히 연구되어야하며 문제구조의 내적구조를 더욱 견고히 할 수 있는 교수학습 방법과 학습자료가 함께 제시되어 현장의 교수학습을 도울 수 있길 기대한다.

참 고 문 헌

고상숙 · 고호경 (2001). 질적 연구자의 자세, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12(8), pp.423-450.

교육인적자원부 (2006). 제 7차 교육과정 개정안. 서울: 교육인적자원부.

김미은 (2002). 문제 만들기를 적용한 수업이 학생의 문제 해결력에 미치는 영향, 동아대학교 대학원

석사학위논문.

김선미 (2006). 영재 교사의 신념과 교수 학습 실제에 대한 정성연구, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

나철영 (2001). 수학 문제 만들기 활동이 문제 해결력 및 학습태도에 미치는 효과, 서울교육대학교 대학원 석사학위논문.

문현정 (2006). '문제변형하기'전략을 활용한 수학학습의 효과 분석, 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박정수 (1998). 초등학교 수학교실에서 문제 만들기 활동이 문제 해결력 신장에 미치는 영향, 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박희진 (2004). 문제 만들기 활동이 문제해결력에 미치는 영향, 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

백난영 (2006). 문제 만들기를 활용한 수학과 교수-학습에 관한 연구, 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

송민정 (2004). 문제 만들기 프로그램 개발·적용이 수학 학업 성취도 및 태도・흥미도에 미치는 영향, 진주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이상희 (2005). 연립방정식에서 특별보충과정 학생들의 문제해결전략에 대한 사례연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

이석희 (1996). 문제설정 방법이 문제해결력과 창의력에 미치는 효과 분석, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이연미 (2006). 「문자와 식」단원의 오개념과 Freudenthal의 수학화를 통한 지도: 중학교 학년을 중심으로, 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문.

이지혜 (2005). 문제 만들기 활동을 통한 학생들의 수학적 태도 변화에 대한 연구, 공주대학교 대학원 석사학위논문.

임명희 (2007). 개방형 문제를 완성하는 과정에서 문제 해결력에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

임문규・정지호 (1992). 문제설정의 교수학습에 관하여. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 31(3), pp.55-62.

우경희 (2006). 수학 문제만들기가 문제해결력에 미치는 영향(중학교 1학년 중심으로), 공주대학교 대학원 석사학위논문.

우정호・김성준 (2007). 대수적 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색, 대한수학교육학회지 수학교육연구, 17(4), pp.453-475.

우정호 (2000). 수학 학습 지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

전성훈 (2008). 방정식의 문제 만들기 활동을 통해 나타나는 중학생들의 문제해결과정에 관한 연구,

단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

주정언 (2002). 수학 문제 만들기 학습이 문제 발견 능력에 미치는 영향, 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

최지숙 (2005). 수학 문제 만들기 활동이 문제해결력에 미치는 영향, 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.

한인기 (2001). 수학 문제의 구조 규명에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 11(1), pp.279-290.

Brown, A. I., & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*, Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel Publishing Company.

Kilpatrick, J. (1987). *Problem formulating: where do good problems come from?* In A H. Shoenfeld (ED), Cognitive science and mathematics education, Lawrence Erlbaum Associates.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd Ed.). Garden City, NY: Doubleday.

Polya, G. (1970). 수학적 발견. 모스크바: 과학출판사.

Yu. M. (깔야긴, 1977). 중등학교 학생의 개발과 교육의 도구로써 수학문제. 박사학위논문.

A Case Study on Students' Problem Solving in process of Problem Posing for Equation at the Middle School Level

Choi-Koh, Sang Sook
Dept. of Mathematics Education, Dankook University, Jukjeon-Dong, Gyeonggi, Korea
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

Sunghoon Jeon
Graduate School of Education, Dankook University, Jukjeon-Dong, Gyeonggi, Korea
E-mail : c0521@hanmail.net

This study aimed to investigate students' learning process by examining their perception process of problem structure and mathematization, and further to suggest an effective teaching and learning of mathematics to improve students' problem-solving ability. Using the qualitative research method, the researcher observed the collaborative learning of two middle school students by providing problem-posing activities of five lessons and interviewed the students during their performance. The results indicated the student with a high achievement tended to make a similar problem and a new problem where a problem structure should be found first, had a flexible approach in changing its variability of the problem because he had advanced algebraic thinking of quantitative reasoning and reversibility in dealing with making a formula, which related to developing creativity. In conclusion, it was observed that the process of problem posing required accurate understanding of problem structures, providing students an opportunity to understand elements and principles of the problem to find the relation of the problem. Teachers may use a strategy of simplifying external structure of the problem and analyzing algebraical thinking necessary to internal structure according to students' level so that students are able to recognize the problem.

---

* ZDM classification : D53
* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97D50
* Key Words: Problem solving, Problem posing, Problem structure, Internal structure and external structure, Algebraic thinking, Qualitative research.