

Lesh 표상 변환(translation) 모델을 적용한 3학년 학생들의 분수개념 학습

한 혜 숙 (고려대학교 교과교육연구소)

본 연구에서는 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재의 사용이 분수에 대한 아동의 개념 이해와 문제 해결력에 어떤 영향을 미치는지를 알아보았다. RNP 교재의 사용은 아동들의 분수에 대한 개념적 이해를 향상시켰을 뿐 아니라 그들의 문제해결 능력 또한 향상시켰다. RNP 교재가 제공하는 다양한 구체적 조작 활동 및 표상 변환 활동을 통해서 아동들은 등분할로서의 분수의 개념에 대한 이해를 더욱 명확히 하였고, 개념적 이해를 토대로 다양한 문제 상황에서 적절한 문제 해결 전략을 사용하여 문제를 해결하였다. 특히, 후속 학습 내용인 분수의 크기 비교에 관한 문제 상황에서 아동들은 선행 학습 과정에서 만들어진 심상이나 수학적 경험을 토대로 올바른 추론 과정을 보여주었다.

I. 서론

분수 학습은 아동들이 기존의 수 체계(자연수 체계)를 더욱 복잡하고 정교한 상위 단계의 체계(유리수 체계)로 확장해 나가기 위한 첫 단계인 동시에 분수는 아동들이 어렵게 느끼는 수학적 개념 중의 하나이다. 여러 연구(권성룡, 2003; Kouba, Zawojewski, & Strutchens, 1997; Kieren, 1988; Moss & Case, 1999)에서도 많은 아동들이 분수를 이해하는데 어려움을 갖고 있음이 보고되었다. 아동들이 분수 학습에 어려움을 느끼게 하는 원인은 여러 가지가 있을 것이다. 그 중에서 분수 학습에서 개념적 이해 보다 절차적 지식이나 계산법에 중점을 둔 교수·학습 방법이 아동들이 분수 학습에 어려움을 느끼게 하는 주된 요인 중의 하나로 지적된다 (권성룡, 2003; 선춘화, 진평국, 2005; Cramer, Post, & delMas, 2002; Moss & Case, 1999; Post, Behr, & Lesh, 1982).

국·내외적으로 아동들의 분수개념에 대한 개념적 이해를 향상시키기 위한 많은 노력들이 있었다. 미국의 경우 NCTM의 기준집(1989, 2000)에 의하면 아동들의 분수개념에 대한 이해를 돕기 위해서 다양한 구체물, 그림, 실생활과 관련된 문제 상황의 사용을 적극 권장하며, 그런 학습 경험을 언어와 수학적 기호로 나타낼 수 있는 능력을 강조한다. 한국의 제 7차 수학과 교육과정에서도 아동들의 분수개념에 대한 개념적 이해를 돕기 위해서 구체물을 사용한 조작활동이나 실생활과 관련된 문제 상

* 접수일(2008년 12월 5일), 심사(수정)일(2008년 12월 19일), 게재확정일자(2008년 12월 23일)

* ZDM 분류: D32

* MSC2000 분류: 97U20

* 주제어: 분수개념 학습, RNP 교재, 문제 해결력, 개념적 이해, Lesh 표상 변환 모델

황의 사용을 강조하고 있다. 그러나 이강섭과 김규상(2004)은 한국 초등학교 수학 교과서에 제시된 분수 단원은 분수에 대한 양적 감각이나 기초 조작의 의미에 대한 이해보다는 아동들의 수학적 연산 능력 또는 절차적 지식을 숙달시키는데 초점이 맞추어져 있다고 지적하였다. Park, Hong, & Na (2001) 역시 한국의 수학과 교육과정이 분수 학습에 대한 아동들의 개념적 이해와 유연한 사고를 발달시키는데 중점을 둘 필요가 있다고 제안하였다.

Cramer, Behr, Post, Lesh 등은 아동들의 분수에 대한 이해 및 분수 교수·학습을 향상시키기 위하여 지속적인 연구를 실시하였고, 그 결과 1997년에 Lesh의 표상 변환 모델의 아이디어를 반영한 Rational Number Project Fraction Curriculum (이하, RNP 교재)이 개발되었다. Cramer, Post, delMas는 RNP 교재의 효과를 실험하기 위하여 대규모의 연구를 실시하였는데, 그 결과 RNP 교재로 학습한 실험 집단과 두 종류의 전통적인 교재로 학습한 비교 집단 사이에 통계적으로 유의미한 차이가 발견되었다. RNP 교재로 학습한 실험 집단의 학생들이 분수의 개념, 크기 비교, 전이, 어림의 영역에서 비교반 학생들보다 뛰어난 평균 성적을 보여주었고, 비록 비교 집단의 학생들은 분수의 연산에 중점을 두어서 학습하였지만 분수의 연산 영역에서 두 집단 간에 유의미한 차이는 발견되지 않았다. RNP 교재로 학습한 집단의 학생들은 크기 비교나 어림과 관련된 문제 상황이 제시되었을 때 개념적으로 접근하려는 성향을 보였고, 반면 비교 집단의 학생들은 암기한 공식이나 절차적 지식에 의존하여 해결하려는 성향을 보였다. 따라서 Cramer, Post, delMas의 연구를 통해서 RNP 교재의 사용이 두 종류의 전통적인 교재의 사용보다 아동들의 분수개념에 대한 이해를 향상시키는데 더 효과적임을 알 수 있었다.

본 연구의 목적은 현행 교육과정 및 교과서를 활용한 분수 지도의 대안으로 Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재의 사용이 한국 초등학교 3학년 아동들의 분수개념의 형성 및 이해와 문제 해결력에 어떤 영향을 주는지 알아보는 것이다.

본 연구의 목적을 달성하기 위해서 다음과 같은 두 가지 연구 문제가 설정되었다.

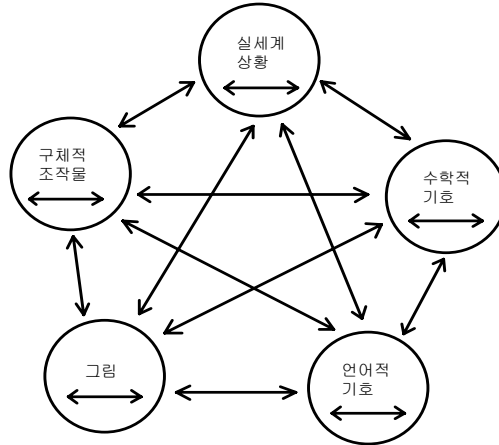
1. Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재의 사용이 초등학교 3학년 아동들의 분수 개념의 형성 및 이해에 어떤 영향을 주는가?
2. Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재의 사용이 분수를 포함하고 있는 문제 상황에서 아동들의 문제 해결력에 어떤 영향을 주는가?

II. 이론적 배경

1. Lesh의 표상 변환(translation) 모델

Lesh(1979)는 Bruner가 제시한 EIS 이론의 아이디어를 확장시켜 <그림 1>과 같은 교수학적 모델을 제시하였다. Lesh는 수학적 아이디어를 표현하는 방법으로 Bruner가 제시한 세 개의 표상 양식에

언어와 실세계 상황을 더하여 총 다섯 개의 표상 양식을 제시하였고, 각 표상 간의 변환 활동과 표상 내부에서의 변환 활동을 강조하였다.



<그림 1> Lesh 변환 모델

Lesh (1979)는 아동들이 수학적 아이디어를 다양한 방법으로 탐구하고 다양한 변환 활동을 경험할 수 있는 풍부한 기회가 제공될 때 아동들의 수학 학습이 향상된다고 주장하였고, 그러한 변환 활동은 아동들이 수학적 개념을 형성하는 과정에서 뿐 아니라 문제를 해결하는 과정에서도 중요한 역할을 한다고 제안하였다. 또한 Lesh (1982)는 학습자의 수학적 개념에 대한 이해를 표상 변환 활동의 가능 여부와 관련지어 설명하였다. 그러나 Post, Behr, & Lesh (1982)는 Lesh 모델이 의미하는 바가 주어진 학습 상황 또는 문제 상황에서 학습자가 모든 변환 과정을 모두 사용해야 한다는 것은 아니라고 덧붙였다.

2. RNP 교재

지난 몇 십 년 동안 미국에서는 유리수 학습 지도에 관한 연구가 활발히 진행되었다. 대표적인 연구로 1979년부터 현재까지 진행되고 있는 The Rational Number Project (RNP)가 있는데 연구자들은 분수, 비, 소수, 비율에 대한 아동들의 학습 과정을 지속적으로 탐구하여 아동들의 분수에 대한 개념적 이해를 발달시키기 위한 방안들을 모색하였다. 그들의 연구 결과 및 실제 학교 현장에서 학생들과 함께 한 교수·학습 활동을 바탕으로 1997년에 분수를 주로 다루는 RNP 분수 교재가 개발되었고, 그 교재는 다음과 같은 네 가지 교육적 믿음을 반영하였다(Cramer et al., 1997). 먼저, 아동들은 다양한 구체적 모델을 활용한 활동을 통하여 가장 잘 배울 수 있고, 두 번째는 물리적인 보조 도구는 개념 획득에 있어서 단지 하나의 요소일 뿐 언어적, 영상적, 기호적, 실세계 상황의 표상들도 역시 중요하다. 세 번째는 아동들에게 수학적 아이디어에 대해서 교사와 학급 친구들과 함께 이야기를

할 수 있는 기회가 제공되어야 한다. 마지막으로 교육과정은 기호와 알고리즘을 통한 절차적 지식의 학습에 앞서 개념적 지식의 발달에 초점을 두어야 한다는 것이다. 위에 제시된 믿음을 바탕으로 RNP 교재의 보다 구체적인 특징을 살펴보면 다음과 같다. 먼저, RNP 교재는 학생들의 분수에 대한 이해를 향상시키기 위해서 구체적인 조작물을 지속적으로 사용하도록 고안되었다. 아동들은 분수를 학습하는 동안에 꾸준히 다양한 구체물과 구체물을 활용한 활동이 제시된다. 대표적으로 사용되어지는 구체적 조작물로는 원형조각, 종이 막대, 타일 등이 있다. 두 번째 특징으로는 분수 개념을 표현하는데 있어서 다양한 표상의 사용을 강조하며 표상 간, 또는 표상 내부에서의 변환 활동도 적극 권장한다는 것이다. 예를 들면, 아동들은 $1/3$ 을 원형조각과 종이띠를 활용하여 그림을 그려서 또는 언어적으로 표현하여 $1/3$ 의 의미를 표현하도록 한다. 또한 $1/3$ 을 나타내는 원형 조각을 보고 다른 원형 조각을 사용해서 $1/3$ 을 나타내도록 요청하거나, 종이 막대 위에 $1/3$ 을 표현하도록 요구한다. 세 번째 특징은 학습 토론, 조별 토론, 구성원간의 상호 작용을 적극 권장한다는 것이다. RNP 교재에 제시되어 있는 학습 활동을 살펴보면 답뿐만 아니라 그 답을 구하게 되는 과정을 소집단 또는 전체 집단에서 서로 자신의 아이디어를 이야기 할 수 있는 활동들이 많이 제시되어 있다. Vygotsky (1978)는 다른 사람과의 상호 작용을 통해서 아동들은 그들이 학습한 내용을 강화시킬 수 있다고 제안하였고, Saxe, Taylor, McIntosh, & Gearhart (2005) 역시 부분과 전체의 관계에 대한 활발한 수학적 토론이 정적인 문제 풀이 수업보다 학생들의 분수에 대한 이해를 향상시키는데 더욱 효과적이라고 하였다.

III. 연구 방법

1. 연구대상

강원도 S 도시에 소재한 초등학교의 3학년 아동 9명이 본 연구에 참여하였다. 그들은 수학 학업 성취도에 따라(상: 3명, 중: 3명, 하:3명) 교사의 추천으로 선정되었고, 남학생은 4명, 여학생은 5명으로 구성되었다. 각 가정의 사회·경제적 수준은 중하위권에서 중상위권까지 고르게 분포되어 있었다. 연구의 시작 전에 9명의 아동을 미리 선정하여, 분수에 대한 선행 학습을 하지 못 하도록 학부모의 동의를 얻었다. 본 연구의 시작 당시 9명의 아동은 학교에서 연속량의 등분할로서의 분수의 의미만을 학습한 상태였으며, 이산량의 등분할로서의 분수의 의미와 분수의 대소비교, 분수의 연산 등은 전혀 학습하지 않은 상태였다.

2. 연구절차

본 연구를 시행하기 전에 연구자는 연구에 참여한 아동들에게 본 연구의 목적, 절차 등에 대하여 구두로 설명하였고, 연구 참여에 대한 아동 및 학부모 동의서가 수집되었다.

가. 사전 검사

사전 검사는 반 구조화된 면담법을 사용하여 아동들이 수업 시간에 학습한 분수에 대한 개념을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위하여 약 40-50분 동안 실시되었다. 모든 면담 내용은 아동들의 동의하에 기록 및 녹음되었다. 사전 검사 당시 아동들은 학교에서 연속량의 등분할로서의 분수의 의미에 대해서 이미 학습한 상태였고, 약 1주일 정도의 시간이 지난 후 사전 검사가 실시되었다.

연구자는 사전, 사후 면담 과정에서 크게 세 가지의 문제 상황을 설정하였다. 먼저, 연구에 참여한 아동들이 연속량의 등분할로서의 분수의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 확인하기 위하여 이와 관련된 두 가지 문제 상황을 설정하였고, 두 번째는 아동들이 연속량의 등분할로서의 분수에 대한 이해를 토대로 이산량의 등분할로서의 분수의 의미를 알 수 있는지를 확인하기 위하여 문제 상황을 제시하였고, 세 번째는 이미 학습한 내용을 토대로 새로운 문제 상황에서 아동들이 사용하는 문제 해결 전략 및 개념의 전이 과정을 살펴보기 위하여 크기 비교에 관한 문제 상황을 제시하였다.

나. 실험 처치

사전 면담 후 RNP 교재를 활용하여 연속량의 등분할로서의 분수의 의미에 대한 내용을 중심으로 방과 후에 연구자가 9명의 연구에 참여한 아동들을 대상으로 10차시의 수업을 실시하였다. 수업의 구체적인 내용은 <표 1>과 같다.

<표 1> 10차시의 실험처치 내용

수업	조작물	주제 및 학습 활동
연구자에 의한 1차시의 부가적인 수업	분수 원형 모델	전체를 똑같이 나누기: 아동들은 12개의 분수 원형들을 직접 가위로 등분할하는 활동을 한다.
1 (2차시)	분수 원형 모델	분수 원형 모델 탐구하기: 등분할 된 조각(부분)과 전체의 크기를 살펴본다. 예를 들면, 3개의 갈색 조각들이 한 개의 검은색 원(전체)을 덮을 수 있는지 알아보고, 갈색 한 조각이 빨강색 한 조각보다 크기가 큰지 살펴본다.
2 (3-4차시)	분수 원형 모델	전체가 2, 3, 4로 등분할 된 조각들(분모가 5보다 작은 단위분수)을 다양한 구체적 모델을 통해서 탐구하고 말로 표현하기, 단위의 융통성 이해: 예, 검은색이 전체일 경우 노란색 한 조각은 검은색 전체를 똑같이 둘(2)로 나눈 것 중의 하나(1)이다.
3 (5-6차시)	분수 원형 모델	전체가 5이상으로 등분할 된 조각들(분모가 4보다 큰 단위 분수들)을 다양한 모델을 통하여 알아보고, 각 조각(부분)을 또 다른 방법으로 읽는 법을 배우기: 예, 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중 1 조각을 전체의 “사분의 일”이라 한다.
4 (7-8차시)	종이 막대, 분수 원형 모델	종이 막대 접기 활동을 통하여 전체를 똑같은 부분들로 나누는 활동과 종이 막대와 분수 원형 모델을 비교하여 분수 개념의 이해를 확장하기, 단위 분수가 아닌 분수의 의미를 이해, 진분수를 단위 분수의 합으로 이해하기
5 (9-10차시)	분수원	분수의 표기법(a/b)이 소개

수업 1-5는 RNP 교재 Lesson 1-5를 한글로 번역한 후 그 내용을 중심으로 실시되었다. <그림 2>는 수업 4의 학습 지도안 일부를 나타낸다. 수업 1의 시작 전에 연구자에 의해서 실시된 1차시의 부가적인 수업 내용은 RNP 교재에서는 방과 후 학생 과제로 제시되어 있는 내용이었으나, 연구의 원활한 진행을 위하여 연구자와 함께 1차시 동안 학교에서 진행되었다. RNP 교재는 아동들의 구체적인 조작 활동, 소그룹 활동, 토론 활동을 중심으로 고안되었기 때문에 10차시의 수업 기간 동안에 연구자는 아동들의 구체적 조작 활동 및 구성원간의 상호 작용이 활발하게 일어날 수 있는 학습 환경을 만드는데 중점을 두었다.

유리수 프로젝트

수준 1 / 수업 4 / 개관	준비물
<p>학생들은 종이 막대 접기 활동을 통해서 직접 전체를 똑같은 부분들로 나누는 활동을 다시 경험하게 된다.</p> <p>학생들은 종이 접기와 분수 원형들을 비교하면서 개념의 이해를 확장한다. 학생들은 단위 분수가 아닌 분수들의 의미를 이해하고 그들을 읽는 법을 배운다. 이 수업에서는 학생들이 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 키울 수 있다.</p>	<p>학생: 종이 접기 용 막대</p> <p>교사: 분수 원형들</p> <p>학생 페이지 가</p>
<p>지도내용</p> <p>활동 1의 수업목표: 종이 막대를 2,3,4,6,8,12 등분으로 접는 활동을 통해서 똑같이 나눈다는 개념을 확고히 한다. 학생들은 이 활동을 통해서 수학적 추론능력과 의사소통능력을 키운다. 학생들은 자신의 종이 막대 접기 방법을 말로 잘 설명 할 수 있어야 한다.</p> <p>활동 1:</p> <p>1. 분수를 모형화 하기 위해서 종이 막대를 사용하기 전에 학생들은 종이 막대를 2,3,4,6,8,12 등분으로 접는 것을 연습하다.</p> <p>학생들에게 어떻게 종이 막대를 똑 같은 두개의 부분으로 나누는지를 보여주고 연습하도록 한다.</p> <div data-bbox="438 1568 861 1646" style="text-align: center;"> </div>	<p>참조</p> <p>수업 4를 끝마치기 위해서는 2시간이 걸릴겁니다.</p> <p>학생들 스스로 종이 막대를 똑같은 부분으로 나누는 활동을 함으로써 원형 모델로 이미 경험했던 똑같이 나눈다는 의미를 더 명확히 한다. 또한 학생들이 직접 종이 막대를 똑같이 등분하는 활동을 함으로써 문제 해결력을 증진시킬 수 있다.</p>

<그림 2> 수업 4의 학습 지도안 예시

다. 사후 검사

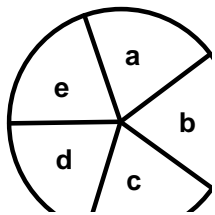
10차시의 수업 후 Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재의 사용이 분수에 대한 아동의 개념 형성 및 이해와 문제 해결력에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 사전 면담에 참여한 모든 아동들을 대상으로 사후 검사가 반 구조화된 면담으로 약 40-50분 동안 실시되었다. 환경적인 요인의 차이를 감소화하기 위하여 사전 검사 때와 마찬가지로 사후 검사도 실험 처치가 실시되고 1주 후에 사후 검사가 실시되었다. 또한, 사전 검사와 마찬가지로 모든 면담 내용은 학생들의 동의하에 기록 및 녹음되었다. 사후 면담 과정에서는 사전 검사와 같은 세 가지 문제 상황이 설정되었다.

IV. 연구 결과 및 분석

에피소드1.

연구의 시작 전에 아동들이 분수의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위하여 실시한 사전 면담 결과 <그림 3>과 같이 간단한 연속량의 등분할 문항에는 모든 아동이 정확한 답을 제시한 반면, <그림 4>와 같이 분수 개념(등분할 개념)에 대한 정확한 개념적 이해와 문제 해결력을 요구하는 문항에는 한 명의 아동도 정확한 답을 제시하지 못하였다. <그림 4>의 문항에서 9명의 아동 중 8명은 1/5이라고 응답하였고, 나머지 한 명은 1/7이라고 응답하였다. 1/5이라고 응답한 8명의 아동들은 등분할의 개념에 대한 이해가 약한 것 같았다. 그 아동들은 1/5을 전체를 다섯 개의 부분들로 나눈 것 중 하나로 인식하고 있었다. 그 아동들에게 전체가 5개로 등분할 되었는지 아닌지는 중요한 고려 사항이 아니었다. 전체가 무조건 5개로 나누어져 있으면 그 중 한 조각을 1/5로 인식하고 있었다.

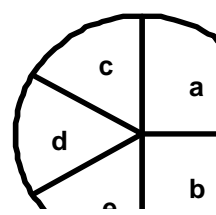
c부분을 분수로 나타내면 얼마일까요?



답 : _____
 왜 그렇게 생각하는지 설명하세요.

<그림 3> 문제 상황 1

c부분을 분수로 나타내면 얼마일까요?

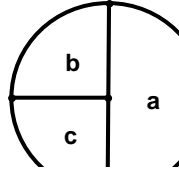


답 : _____
 왜 그렇게 생각하는지 설명하세요.

<그림 4> 문제 상황 2

이런 아동들에게 <그림 5>와 같은 <그림 4>와 유사한 문제 상황을 제시하였으나 5명의 아동들은 b를 1/3이라고 응답하였고, 나머지 아동들은 혼란을 느끼는 것 같았다. 그들은 b부분은 1/3이 아니라

고 대답하였고, b를 분수로 나타낼 수 없다고 하였다.



<그림 5> 문제 상황 3

<그림 4>의 문항에서 1/7이라고 대답한 한 명의 아동은 등분할의 개념에 대해서 인식하고 있는 것 같았다. 그 아동은 등분할을 시도하였으나 논리적인 전략 보다는 시각적인 효과에 의존하다보니 오류를 범하고 말았다. 다음은 그 아동과 연구자의 면담 내용의 일부이다.

연구자: 그림에서 제시된 c부분의 크기는 얼마일까요? c부분의 크기를 1/5이라고 해도 될까요?

학생 : 아니요. 1/5은 아닌 것 같아요. 조각의 크기가 다르니까요.

연구자: 네.. 그러면 그 부분을 분수로 나타내면 얼마일까요?

학생 : [잠시 생각한 후]음...1/7인 것 같아요.

연구자: 왜 그렇게 생각하는지 선생님에게 설명해 주겠어요?

학생 : 네. 먼저, [그림 4에 제시된 원의 오른쪽 반원(a+b) 부분을 가리키면서] 이 부분을 나누었어요[손가락으로 오른쪽 반원을 4 부분으로 나누는 행동을 계속 한다.]. 이제 모든 크기가 똑같아졌어요.

연구자: 좋아요. 그러면 지금 원이 총 몇 개의 조각으로 나누어졌지요?

학생 : 일곱 개요. 그리고 이걸[그림 4의 c부분을 가리키면서] 1/7이에요.

연구자: 모든 조각들이 다 똑같은 크기인지 다시 한 번 생각해 보겠어요?

각각의 부분의 크기가 정말로 똑같은가요?

학생 : 모르겠어요... 그런데 똑같아 보여요.

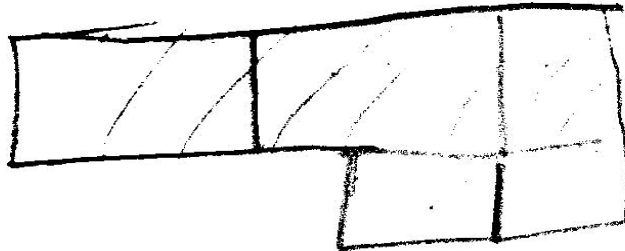
그러나 사후 면담에서 두 명의 아동을 제외한 7명의 아동들이 그 문항과 동형 문항에서 올바른 답과 이유를 제시하였는데 아동들이 제시한 이유는 크게 두 가지로 분류되었다.

먼저, 5명의 아동들은 RNP 교재로 학습하면서 경험한 구체적 조작 활동을 통해 형성된 분수에 대한 심상(mental image)을 사용하여 설명하였고, 2명의 아동들은 논리적인 추론 방법으로 이유를 설명하였다. 심상을 이용한 아동들의 경우, <그림 4>의 c의 크기는 분홍색 한 조각의 크기와 같으므로 1/6이라고 답하였다. c의 크기가 분홍색 한 조각의 크기와 같은지를 어떻게 알았는지 요청하는 질문에 그들은 분홍색 세 조각은 노랑색 한 조각(1/2)과 같으므로 c의 크기가 분홍색임을 알았다고 대답하였다. 논리적인 추론을 통하여 문제를 해결한 아동들은 먼저 전체가 등분할 되어있지 않다는 사실을 인지하여 등분할을 해야 한다고 말하면서, 왼쪽 반원이 세 부분으로 나누어졌으므로 오른쪽 반원도 세 부분으로 나누면 전체는 똑같은 조각들로 되므로 c는 1/6이 된다고 하였다.

등분할 활동 및 등분할 개념은 분수 개념을 학습하는데 기초가 되는 중요한 내용으로 고려되어진다. 실제 우리나라의 초등학교 3학년 수학 교과서에서도 분수 단원의 도입 부분 및 문제에 등분할 활동이 제시되어 있다. 그러나 그런 활동 후에 아동들은 주로 교과서에 제시되어 있는 등분할 된 그림을 통해서 분수의 개념을 학습하다 보니 등분할이 되어 있지 않은 상황에서 문제를 해결하는데 어려움을 겪는 것 같다. 반면, RNP 교재로 학습한 후에 아동들은 등분할이 되어 있지 않은 문제 상황에서도 적절한 문제 해결 전략을 모색하여 문제를 해결하였는데, 그들의 문제 해결 전략을 주로 구체적 조작 활동을 통해 형성된 심상으로부터 나온 것으로 보인다.

에피소드2.

연구자는 등분할로서의 분수의 개념에 대한 아동들의 이해를 좀 더 알아보기 위하여 아동에게 분수 원형 모델을 이용하여 $3/5$ 을 두 가지 방법으로 나타내보고, 아동이 나타낸 각 모델의 공통점과 차이점에 대하여 설명하도록 하였다. 사전 면담에서는 아동들이 분수 원형 모델에 대한 경험이 없었으므로 분수 원형 모델 대신 교과서에 제시되어 있는 반/구체물을 제공하였다. 그러나 9명 모두 반/구체물을 사용하여 $3/5$ 을 나타내는 모델을 제시하지 못하였다. 비록 교과서에 몇 가지의 반/구체물을 활용한 조작 활동이 제시되어 있으나, 아동들은 구체적 조작 활동보다는 주로 그림을 통해 분수를 학습한다는 교과서 분석 결과를 참고하여 아동들에게 구체물 대신 그림을 사용해서 나타내보도록 하였다. 그러나 단지 2명의 아동만이 두 종류의 그림을 그려서 $3/5$ 을 나타낼 수 있었고, 그들은 두 그림 모델의 공통점과 차이점에 대해서도 명확하게 설명할 수 있었다. 네 명의 아동들은 단지 하나의 그림으로 표현할 수 있었으나 그들이 제시한 그림에서 오류가 발견되었다. 그들은 전체를 똑같은 부분으로 나누지 못하였다. 두 명의 아동들은 자신의 그림에 문제가 있음을 발견하였으나 전체를 똑같은 부분으로 나누는 것이 어렵다고 하였다. 나머지 두 명은 자신의 실수를 전혀 인지하지 못하고 있었다. 그들에게 등분할로서의 분수의 개념이 확립되지 못한 것 같다. 그들에게 $3/5$ 은 단지 전체를 5개로 나눈 것 중의 3개였다. 전체가 등분할로 나누어져있는지 아닌지는 고려의 대상이 아닌 것 같았다. 그 아동 중 한 명은 <그림 6>과 같은 그림을 제시하였다.



<그림 6> $3/5$ 을 나타내는 한 아동의 그림

하나의 그림만을 제시한 아동들에게 그림을 하나 더 제시하도록 요청하였더니 한 아동이 다음과 같이 말하였다.

“저는 교과서에서 다섯 조각으로 나누어진 원을 봤어요, 그런데 그걸 그릴 수가 없어요. 모양이 기억이 잘 안나요.”

아동들에게 분수 $\frac{3}{5}$ 을 반/구체물을 사용하여 나타내도록 요청하였을 때 어떤 아동도 나타낼 수 없었다. 그러나 그림으로 표현해보도록 요청하였을 때 비록 정확한 그림을 그리기에는 어려움도 있었지만 대부분의 아동들이 그림 그리는 것을 시도할 수는 있었다. 이는 분수 학습이 주로 영상적 표상(그림)을 보는 것을 통해서 이루어지고 있음을 알 수 있었다. 비록 교육과정 및 교과서에서 구체적인 조작 활동에 대한 언급이 지속적으로 제시되고 있지만 여전히 아동들에게 보다 의미 있고 풍부한 구체적인 조작 활동이 필요하다고 보인다. 또한 단순히 교과서에 제시된 등분할 된 그림을 보는 것을 통하여 학습하기 보다는 아동 스스로 다양한 그림에 직접 등분할하는 경험도 아동들의 분수 개념에 대한 이해를 보다 향상시킬 수 있을 것 같다.

사후 면담 결과에 의하면, 그들은 이미 다양한 조작 활동을 통하여 분수의 개념을 학습한 상태라 $\frac{3}{5}$ 을 분수 원형 모델을 사용해서 표현하는 데 어려움이 없었다. 그러나 분수 원형 모델을 활용하여 하나의 모델을 더 제시하라고 요청하였을 때 3명의 아동들이 당황하였다. 그들은 전체의 크기를 바꾸어서 나타내보라는 힌트를 듣고는 모두 정확한 모델을 제시하였다. 또한 두 모델의 공통점과 차이점에 대해서도 명확하게 잘 설명하였다.

이 면담 결과에 의하면 비록 RNP 교재는 단위의 융통성에 대해서 중요하게 고려하고 있으나 몇몇 아동들은 전체 또는 단위에 대해서 유연한 사고를 하기 힘든 것 같았다. 한국의 교과서에서는 단위의 융통성에 대해서 거의 다루고 있지 못한 실정이다. 아동들이 등분할로서의 분수의 의미에 대해서 보다 개념적으로 이해하기 위해서는 단위의 융통성이 보다 중요하게 다루어야 할 것이다.

에피소드 3 (분수 의미 개념 전이: 연속량>이산량)

연구자는 아동들이 이미 학습한 연속량에서 등분할로서의 분수의 개념을 이산량에서 어떻게 적용하는지, 즉 개념의 전이 과정 및 문제 해결력을 알아보기 위해서 다음과 같은 문제 상황을 제시하였다. 먼저 아동들에게 15개의 타일을 제공하고 이 타일 중 자신이 원하는 개수만큼을 이용하여 $\frac{3}{5}$ 을 두 가지 방법으로 표현하도록 요청하였다. 또한 아동이 나타낸 각 모델의 공통점과 차이점 그리고 연속량을 사용하여 표현한 모델과 이산량을 사용하여 표현한 모델의 공통점과 차이점에 대해서도 설명하도록 요청하였다. 사전 면담에서는 단지 2명의 아동만이 두 개의 모델을 제시하여 설명할 수 있었다. 나머지 7명의 아동은 $\frac{3}{5}$ 이 의미하는 바를 5개 중의 3개로만 인식하여 또 다른 모델을 만드는 데 어려움을 나타냈다. 이런 문제 상황의 경우 그들에게 전체는 5개의 타일 밖에 될 수 없었다.

그러나 사후 면담에서는 9명 중 6명의 아동들이 이산량을 사용해서 $3/5$ 을 나타내는 두 가지의 모델을 제시할 수 있었다. 비록 연구 기간 동안 이산량은 전혀 다루어지지 않았지만, RNP 교재로 학습한 후 아동들은 분수 기호의 의미에 대해서 보다 개념적으로 이해하여 낯선 문제 상황도 올바르게 해결하였다. 사전 면담과는 달리 그들에게 $3/5$ 은 전체를 5개의 똑같은 집단으로 나눈 것 중 3개의 집단으로 인식되었다. 다음은 사후 면담에서 올바른 추론을 한 아동과 연구자의 면담 내용의 일부이다.

연구자: 여기에 있는 타일을 사용해서 $3/5$ 을 나타낼 수 있어요?

학생 : 15개가 있는데 그걸 5개로 나누면 각각에 3개씩 있어요. 나는 5개 중 3개가 필요하니까.. 이것이 $3/5$ 이에요[9개의 타일을 가리키면서].

연구자: 자, 그러면 $3/5$ 을 또 어떻게 다르게 나타낼 수 있을까?

학생 : 타일 5개만 더 주세요.

연구자: 20개의 타일을 이용할 거예요?

학생 : 네.. 5개로 나누었어요. 그러면 한 부분에는 4개씩 들어가요. 이만큼이 $3/5$ 이에요[12개를 가리키면서]

에피소드 4. (분수의 크기 비교)

분수의 크기 비교에는 동분모의 크기 비교, 이분모의 크기 비교, 진분수의 크기 비교가 포함되었다.

동분모 분수의 크기 비교의 경우 사전, 사후 면담에서 모든 아동들이 정답을 제시하였다. 그러나 아동들의 추론 방법을 다르게 나타냈다. 사전 면담의 경우 모든 아동들이 $1/3$ 과 $2/3$ 의 크기 비교 시 분수를 하나의 수로 인정하는 것이 아니라 2개의 자연수의 결합으로 인식하여 자연수의 크기 비교 방법을 분수의 크기 비교 전략으로 사용하였다. 따라서 모든 아동들은 두 분수의 아래에 있는 3의 크기는 같고 위에 있는 2가 1보다 더 크므로 $2/3$ 가 더 크다고 응답하였다. 그러나 사후 면담에서는 대부분의 아동들이 분수 원형 모델을 통한 조작 활동으로 형성된 심상을 활용하여 분수의 크기를 비교하였다. 예를 들면, $1/3$ 은 갈색 한 조각이고, $2/3$ 는 갈색 두 조각이므로 갈색 두 조각의 크기가 갈색 한 조각의 크기보다 크므로 $2/3$ 가 더 크다고 응답하였다. 그들은 분수 $1/3$ 을 두 자연수 1과 3의 결합으로 생각하는 것이 아니라 $1/3$ 에 대한 심상을 떠올렸고, 그런 심상들을 활용하여 문제를 해결하였다. 분수 원형 모델을 활용한 구체적 조작 활동이 아동들이 분수의 상대적인 크기에 대한 개념을 이해하고, 심상을 형성하는데 효과적으로 작용한 것 같다.

이분모 단위 분수의 크기를 비교하라고 요청하였을 때 사전 검사에서는 모든 아동들이 $1/5$ 보다 $1/6$ 이 더 크다고 응답하였다. 대부분의 아동들은 동분모 분수의 경우와 같은 이유로 $1/6$ 이 더 크다고 응답하였다. 즉, 위에 있는 1은 같으므로 아래에 있는 5와 6의 크기를 비교하여 6이 더 크므로 $1/6$ 이 $1/5$ 보다 더 크다고 응답하였다. 한편 한 아동은 분수의 (-)를 마이너스로 인식하고 있었다. 따라서 $1/6$ 은 $6-1$ 로 계산하고 $1/5$ 는 $5-1$ 로 계산하여 $1/6$ 이 더 크다고 응답하였다. 그러나 사후 면담에서 약

절반가량의 아동들이 여전이 자연수 크기 비교를 통한 실수를 범하고 있었고, 나머지 아동들은 구체적 조작 활동을 통해 형성된 심상을 활용하거나 수업 시간에 한 활동을 토대로 적절한 문제 해결 전략을 사용하여 올바른 답을 제시하였다. 다음은 두 아동이 이 문항에 응답한 내용이다.

학생 A: 1/5은 오렌지 조각 하나이고 1/6은 분홍색 조각 하나예요.

근데 오렌지 조각 하나가 분홍색 조각 하나보다 더 커요.

그래서 1/5이 1/6보다 더 커요.

학생 B: 1/5이 1/6보다 더 커요. 왜냐하면 개수가 많아지면 모양의 크기가 점점 작아져요. 그래서 1/6

에서 6이 6개로 나누는 거니까 한 조각의 크기는 더 작아요.

사전 면담에서 진분수 $2/3$ 와 $3/4$ 의 크기 비교를 묻는 질문에 단지 한 명의 아동만이 올바른 추론을 통해 정답을 제시하였다. 그 아동은 두 분수의 크기를 비교하기 위해서 그림을 그려서 비교하였고 그림 없이 생각해 보라고 요청했을 때 그림 없이는 설명할 수 없었다. 그 아동의 경우 아직 분수에 대한 심상이 형성되지 않은 것 같았다. 그 아동을 제외한 나머지 아동들은 자연수의 크기 비교를 포함한 다양한 잘못된 추론을 보여주었다. 그러나 사후 면담에서 5명의 아동들은 적절한 추론 과정을 통하여 크기 비교를 할 수 있었다. 아동들의 추론 과정은 아래와 같이 2가지 경우로 나눌 수 있었다.

학생 C: 파란색 조각 세 개가 갈색 조각 2개보다 더 크기 때문에 $3/4$ 이 $2/3$ 보다 더 커요.

학생 D: 원이 되려면 $3/4$ 은 파란색 조각 하나가 필요하고 $2/3$ 는 갈색 조각 하나가 필요해요. 그런데

갈색 조각 하나가 파란색 조각 하나보다 더 크니까 $3/4$ 이 $2/3$ 보다 더 커요.

학생 C의 경우는 각 분수가 나타내는 심상을 사용하여 두 분수의 크기 비교를 시도하였고, 학생 D의 경우는 학생 C와는 다른 해결 전략을 사용하였다. 즉, 문제를 해결하는 전략으로 전체의 크기를 사용하는 대신 남은 만큼의 크기를 사용하였다. 이러한 문제 해결 전략은 수업 시간에 제시되지 않았지만, 다양한 조작 활동을 통해서 학생 스스로 터득한 전략으로 보여진다. Cramer, Post, & delMas가 실시한 연구에서도 RNP 교재를 사용하는 집단에서 이와 같은 문제 해결 전략을 사용하는 학생들이 발견되었다. 사후 면담에서 한 명의 아동이 $2/3$ 와 $3/4$ 의 크기가 같다고 응답하였는데 그 이유는 $2/3$ 는 절반보다 크고 $3/4$ 도 절반보다 크기 때문에 결국 두 개의 분수가 같다는 것이었다. 이 아동은 문제 해결 전략으로 기준점을 $(1/2)$ 사용하였으나, 이 문항에서는 적절하지 않은 전략이었다.

분수의 크기 비교와 관련된 면담 결과 사전 면담에서는 대부분의 아동들이 논리적인 문제 해결 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 없었다. 크기 비교를 요청하였을 때 그들은 앞서 학습한 분수의 개념을 토대로 문제에 접근하기 보다는 자연수의 크기를 비교하는 상황으로 문제를 해석하였다. 즉, 아동들은 분수 $1/3$ 이 의미하는 바가 전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1임을 알고 있었으나, 두 분수의 크기를 비교하는 상황에서 분수 $1/3$ 은 더 이상 전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1이 아니었

다. $1/3$ 은 단지 두 개의 자연수 1과 3의 결합에 불과했다. 그러나 RNP 교재로 학습한 후에 비록 몇몇 아동들은 같은 실수를 반복하기도 하였지만, 어떤 특정 분수를 단순히 두 자연수의 결합으로 생각하는 비율이 현저히 줄었다. 그들에게 낯선 문제 상황이 제시되었을 때 그들은 앞서 학습한 분수의 개념에 대한 이해 및 심상을 활용하여 문제를 해결하였다. 즉, 문제 해결 전략으로 심상을 활용한다는 점이 사전, 사후 면담에서 가장 큰 차이점으로 나타났다. RNP 교재가 제시하는 다양한 구체적 조작 활동이 아동들이 분수에 대한 심상을 형성하는데 긍정적인 영향을 미친 것으로 보여진다. 분수에 대한 심상의 형성은 분수의 대소 비교와 분수의 사칙 연산을 보다 개념적으로 접근하는데 중요한 역할을 할 수 있다. 따라서 아동들이 분수에 대한 심상을 형성할 수 있도록 다양한 구체적 조작 활동을 통한 분수의 개념 학습이 필요하다고 보여진다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 Lesh 표상 변환 모델을 적용한 RNP 교재가 초등학교 3학년 아동들의 분수 개념의 형성과 이해 및 문제 해결력에 어떤 영향을 주는지를 알아보았다. 먼저 분수 개념의 형성 및 이해와 관련해서 자료 분석 결과를 살펴보면, RNP 교재가 포함하고 있는 다양한 조작 활동 및 표상 변환 활동이 아동들의 분수 개념에 대한 개념적 이해를 발달시키는데 긍정적인 영향을 준 것으로 보인다. 무엇보다 RNP 교재로 분수에 대해서 학습을 한 후 분수를 두 자연수의 결합(쌍)으로 보기 보다는 하나의 수로 인정하는 아동들이 수가 현저히 늘었다. 또한 RNP 교재와 지속적인 조작 활동은 아동들이 분수에 대한 심상을 형성하는데 중추적인 역할을 하였다. 이렇게 형성된 분수에 대한 심상들은 아동들이 문제를 해결하는데 유용하게 활용되었으며, 분수에 대한 수적 감각을 심어주는 데도 긍정적인 역할을 할 수 있었다. 제 7차 수학과 교육과정에 의하면 분수 단원의 목표 중 하나가 아동들이 주어진 분수를 반/구체물을 활용하여 나타내는 것이다. 그러나 사전 면담의 결과, 아동들이 구체물을 사용하여 분수를 나타내는데 어려움을 갖고 있음을 알 수 있었다. 구체물 보다는 교과서에서 자주 접하는 영상적 표현(그림)에 아동들이 더 익숙해져 있는 것도 발견할 수 있었다. 아동들이 수학적 기호로 제시된 분수를 그림으로 표현하거나 그림으로 표현되어 있는 분수를 수학적 기호로 나타내는 문제에서는 상대적으로 덜 어렵게 느끼고 있었다. 수학과 교육과정에서는 다양한 구체적 조작 활동을 할 것을 제안하며 교과서에서도 여러 가지 활동들이 제시되어 있다. 그러나 본 연구 결과를 토대로 추측해 봤을 때 학교 현장에서 이루어지고 있는 활동들이 단지 피상적인 수준에 머물러 있는 것은 아닌지에 대해 강한 의구심이 들었다. Ball (1992)은 아동들의 구체적 조작 경험 그 자체가 아동들의 수학적 지식을 저절로 발달시킬 수 없다고 주장하였다. 따라서 아동들이 구체적 조작 활동으로부터 분수에 대한 아이디어를 구성할 수 있도록 조작 활동이 체계적이고 기술적으로 사용되는 것이 중요하다.

아동들의 개념 전이와 문제 해결력에 대해서 살펴보면, RNP 교재를 사용한 후 아동들의 개념의

전이 보다 활발하게 이루어졌고, 아동들은 낯선 문제 상황을 해결하기 위하여 다양하고 논리적인 문제 해결 전략을 사용하였다. 특히, 아동들의 개념 전이 과정이나 문제 해결 과정에서 큰 부분을 차지하는 것이 분수에 대한 심상이었다. 비록 이산량에서 분수의 개념이나 분수의 크기 비교에 대해서는 전혀 학습이 이루어지지 않았지만, 아동들의 머릿속에 자리 잡고 있는 심상이 아동들이 문제를 해결하는데 핵심적인 역할을 할 수 있었다. 그러나 우리나라의 교과서에서는 아동들의 분수에 대한 심상의 형성 과정이 소홀하게 다루어지고 있다. 따라서 교사가 분수를 지도할 때 아동들이 분수에 대한 심상을 구성할 수 있도록 충분한 구체적 조작 활동을 제공하기를 제언한다. 그리고 마지막으로, 우리나라의 교과서에서는 분수를 지도할 때, 단위의 융통성에 대해서 아동들이 경험할 수 있는 기회가 거의 제공되지 않는다. 다양한 단위를 활용하여 분수를 학습하면 아동들은 분수의 상대적인 크기에 대한 이해가 더 쉬울 뿐 아니라 분수의 개념 이해 및 유연한 사고의 발달에도 도움이 된다. 그러므로 초등학교 교육과정 및 교과서에서 단위의 융통성에 대해서 좀 더 심도 깊게 다루기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 권성룡 (2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> **5(2)**, pp.259-273.
- 선춘화·전평국 (2004). 초등학교 6학년 학생의 수감각 실태 조사, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.587-602.
- 이강섭·김규상 (2004). 초등학교 5학년 학생들의 분수 연산능력 평가 문항에 대한 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> **8(2)**, pp.61-68.
- Ball, D. L (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. *American Educator*, **16 (Summer)**, pp. 14-18, 46-47.
- Cramer, K., Behr, M., Post T., & Lesh, R. (1997). *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1*, Kendall/Hunt Publishing Co., Dubuque Iowa.
- Cramer, K., Post, T., & delMas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. **33(2)**, pp.111-144.
- Kieren. T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kouba, V., Zawojewski, J., & Strutchens, M. (1997). What do students know about numbers and operations? In P. A. Kenney & E. A. Silver (Eds.), *Results from the sixth mathematics*

- assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 87-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis and remediation. In R. Lesh, D. Meierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving*. Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Lesh, R. (1982). Modeling Students' modelling behaviour. *Proceedings of the fourth annual meeting of the North American Chapter of PME* (pp.181-188), Athens, GA.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**, pp.122-147.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Park, J., Hong, M., & Na, G. (2001). *Korean 8th grade students' Achievement in Mathematics and Science in TIMSS-R International Benchmark*. Korea Institute of curriculum and evaluation.
- Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), *Mathematics for Grades 5-9, 1982 NCTM Yearbook* (pp.59-72). Reston, VA: NCTM.
- Saxe, G. B., Taylor, E. V., McIntosh, C. & Gearhart, M. (2005). Representing Fractions with Standard Notation: A Developmental Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36(2)**, pp. 37-157.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Third grade students' fraction concept learning based on Lesh translation model

Han, Hyesook

Korea University Center for Curriculum and Instruction Studies, Anam-dong Seongbuk-Gu,

Seoul, 136-701 Korea.

Email: hanhyesook@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate the effects of the use of RNP curriculum based on Lesh translation model on third grade students' understandings of fraction concepts and problem solving ability. Students' conceptual understandings of fractions and problem solving ability were improved by the use of the curriculum. Various manipulative experiences and translation processes between and among representations facilitated students' conceptual understandings of fractions and contributed to the development of problem solving strategies. Especially, in problem situations including fraction ordering which was not covered during the study, mental images of fractions constructed by the experiences with manipulatives played a central role as a problem solving strategy.

* ZDM classification : D32

* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97U20

* Key Words : fraction concept learning, RNP curriculum, problem solving ability, conceptual understanding, Lesh translation model