韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 1호, 2009. 2. 145-174

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 1, Feb. 2009. 145-174

분수 개념에 대한 초등학생들의 비형식적 지식 분석
- 1~3학년 중심으로 -

오 유 경 (울산천곡초등학교)
김 진 호 (대구교육대학교)[1]

아동들이 형식 교육을 받기 이전에도 수학을 이해하고 있으며 학습능력에 따라 이런 이해에 차이가 있을 것이라는 가정을 검증하기 위해서 본 연구를 실시하였다. 이를 위해서 초등학교 1, 2, 3 학년 학생들이 분수를 학습하기 전에 형성하고 있는 분수에 대한 개념 그리고 학년 및 학습능력에 따른 분수 개념들의 이해 정도를 알아보았다. 학습능력은 추론능력 및 학업성취도를 조합한 것으로 조작적 정의를 하였으며, 학습능력에 따라 학년별로 6명씩(상, 중, 하 각 2명)을 연구 대상으로 선정하였다. 분수개념에 대한 과제를 개발하고, 구조화된 면담을 실시하였으며, 질적 분석을 위해 비디오 녹화, 면담 프로토콜, 관찰 등을 통해 아동의 반응을 수집하고, 아동들의 반응은 유형에 따라 분석하였다.
분석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 아동들은 형식 교육을 받기 이전에 분수에 대한 다양한 비형식적 지식을 형성하고 있었으며, 이 중에는 분수의 형식적 학습에 바탕이 될 수 있는 것과 오개념을 유도할 수 있는 것이 존재하였다. 또한 아동이 형성한 비형식적 지식에는 학년, 학습 수준에 따라 차이가 존재하였다. 이는 비형식적 지식이 다양한 학습 경험과, 일상생활의 경험에 영향을 받기 때문인 것으로 분석되었다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

모든 인간은 지식을 스스로 구성할 수 있는 지적 능력을 소유한 존재이며 실제 문제 해결 상황에서 자신이 구성한 지식을 적극 이용하여 당면한 문제를 해결할 수 있는 지성을 지니고 있다고 본다(김진호, 2008). 인간은 현실 세계에서 문제를 해결해 나가면서 자신이 가진 지식을 바탕으로 새로운 지식을 재구성하면서 지식을 확장한다. 지식을 구성하는 것은 기존 지식을 충만하게 가진 성인들에게만 가능한 일이 아니며 어린이들도 지식을 구성할 수 있다.

---

* 접수일(2009년 1월 13일), 심사(수정)일(1차: 2009년 1월 29일, 2차: 2월 10일), 게재확정일자(2009년 2월 12일)
* ZDM 분류 : D12
* MSC2000 분류 : 97C99
* 주제어 : 비형식적 지식, 분수, 구조화된 면담, 학습능력
1) 교신저자

어떠한 것에 대해 이미 어느 정도 알고 있는 어린이들이 덜 알고 있는 어린이들보다 그 개념을 더 쉽게 학습한다(Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974). 다시 말해 어린이들의 사고는 백지 상태에서 일어나지 않는다. 어린이들은 자신이 가지고 있던 기존의 지식들을 변화, 발전시키면서 지식을 확장해 나간다. 이것을 Piaget는 동화, 조절, 평형화의 과정으로 설명하였다. 동화는 새로운 자극을 자신이 기존에 가지고 있던 스키마에 적합하도록 만드는 과정이다. 조절은 새로운 자극에 맞추어 자신의 스키마를 변형하는 과정이며 평형화는 동화와 조절의 두 과정 모두를 포함하는 과정이다. 이는 기존의 스키마와 새로운 자극의 전체적인 상호작용이며 인지 발달을 일으키는 기본이 된다. 이 모든 과정을 Piaget는 인간의 발달은 현실에 대한 적응으로 보았으며 이것은 단순히 환경에 적응하는 수동적인 과정이 아니라, 자신의 지식의 구조를 계속적으로 재구성하는 능동적인 과정이다.

Baroody(1987)는 비형식적 지식을 학교에서 공식적으로 가르치는 문자화된 기호와 상징체계로서의 아동이 일상생활의 수학적 문제 사태를 경험하고 이를 비형식적으로 해결하는 과정에서 얻은 직관적인 지식이라고 정의하였다. 어린이들은 일상생활의 수학적 문제 상황을 통해 비형식적인 지식을 형성하고, 이러한 과정을 반복하면서 자신의 지식을 확장해 나간다. 능동적인 지식 구성자로서의 어린이를 가정하고 있는 구성주의적 접근에서는 수학을 하는 것이 단순히 기계적인 수행이나 이미 결정된 법칙을 개인이 따라가는 것이 아니라, 수학적인 문제 상황에서 스스로 문제를 형성하고 해결하기 위한 전략을 계발함으로써 수학적 사고를 하는 활동으로 본다(이진영, 1998). 또한 어린이들이 형성한 비형식적 수학적 개념들은 그 나름의 개념 형성의 근거를 지니고 있으며 이것은 학교에서의 형식적 수학적 지식을 학습하는데 토대를 제공할 수 있는 자원 역할을 한다(김진호, 2002).

어린이들은 현실 세계에서 구성한 풍부한 비형식적 수학 지식을 가지고 학교 수업에 임함에도 불구하고 어린이들이 학교 수학 학습을 어려워하는 이유 중 하나는 구체적이고 직관적인 일상의 언어를 사용하는 비형식적 지식과는 달리, 학교에서 학습하는 형식적 지식은 기호화되어 있으며 상징화, 추상화 되어 있기 때문이다. 또한 학교에서의 형식적인 수학 지식의 수업은 학교 밖에서 어린이들이 형성한 비형식적 지식과는 유사점이 거의 없는 형식적인 문제 해결로 고착되었기 때문이다. 다시 말해 학생들의 수학적 개념에 대한 낮은 성취와 빈약한 이해의 한 원인은 형식적 지식의 부족이 아니라, 형식적인 지식과 비형식적인 지식을 연결하는데 실패했기 때문이라고 할 수 있다(김진호, 2002). 따라서 어린이들의 수학 학습을 돕기 위해서는 어린이들이 형성한 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결고리를 찾는 것이 필요하다.

학습이란 새로운 지식과 이미 알고 있는 지식 간의 조절과 동화의 능동적인 과정이기 때문에 아동이 구성한 비형식적 지식은 학교에서 배우는 형식적 수학 지식을 학습하는데 있어 결정적인 역할을 한다. 교사들은 형식적 수업을 보다 의미 있고 흥미롭게 하기 위해서는 아동들의 비형식적 수학을 분석할 필요가 있다. 이는 성공적인 학교 학습을 증가시킬 수 있을 뿐 아니라, 수학의 정의적인 측면에 있어서 자신감을 길러주는 등 큰 영향을 준다. 또한 자신의 비형식적인 사고를 바탕으로 학교의 형식적 수업을 할 때, 보다 의미 있는 지식을 구성할 수 있게 된다(이진영, 1998). 따라서 효과

적인 수학 학습을 위해서 교사는 아동이 형성한 비형식적 지식에 대해서 충분한 교수법적 내용지식을 가지고 있어야 한다.

아동이 학교 수학 수업에서 어려워하는 개념 중 하나는 분수이다. 현 7차 교육과정에서는 3-가 단계에서부터 등분할을 통한 조작활동을 통해 분수를 도입하고 있다. 그리고 매 학년 마다 분수 개념을 비롯하여 분수 연산을 가르치고 있지만, 적지 않은 학생들이 분수 개념조차 제대로 형성하지 못하고 있다(최영주, 2005). 아동들이 분수 학습을 어려워하는 이유로 분수가 여러 가지 복잡한 의미를 가지고 있으며, 분수에 대한 개념적 이해가 부족하며, 분수 학습을 비형식적 지식을 바탕으로 학습하지 않아서 등을 들 수 있다. 효과적인 분수 학습을 위해서는 아동이 형성한 비형식적인 지식을 바탕으로 전체-부분, 연산자, 측정, 몫, 비 등의 여러 가지 의미를 포괄한 분수 개념에 관한 학습이 되어야한다. 그러므로 초등학교 학생들이 학교에서의 형식적인 분수 수업을 받기 전에 가지고 있는 분수에 관한 비형식적 지식에 대한 연구가 필요하다.

본 연구는 초등학교 학생의 분수 개념에 대한 비형식적 지식을 알아보기 위해 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

가. 분수 학습 전 어린이들이 형성한 비형식적 분수 개념은 어떠한가?

나. 어린이들이 형성한 비형식적 분수 개념은 학습 능력과 학년에 따라 개념의 이해 정도에 어떤 차이를 보이는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비형식적 지식

가. 비형식적 지식의 의미

지난 몇 년 동안 많은 연구자들은 이해라는 것이 기존의 지식과 새로운 지식 사이의 개인의 기존의 인지구조에 의존함에 대한 의견에 동의하였다(Carpenter, 1986; Greeno, 1978; Hiebert & Carpenter, 1992). 학생들의 이해의 발달에 관련된 최근의 이론은 학생들이 수학적 기호에 관한 의미를 구성하는데 초점을 맞춤으로서 기존의 지식과 새로운 지식 사이의 관계를 형성할 수 있다고 주장하고 있다. 최근의 여러 연구자들은 학생들이 형식적 수업에 가져오는 지식과 그 지식이 학생들의 배움과 교사들의 수업에서 어떠한 역할을 하는지에 대해서 초점을 맞추기 시작하였다(Brown, Collins, & Duguid, 1989; Carpenter & Fennema, 1991; Greeno, 1986). 이러한 지식은 직관적 지식(Leinhardt, 1988), 상황적 지식(Brown, Collis & Duguid, 1989), 비형식적 지식(Ginsburg, 1982; Saxe, 1988)이라는 몇 가지 이름으로 논의되었다. 이름이 무엇이든 이러한 지식은 실생활에서 상황적 지식

이 개개인의 학생들에 의해서 그것이 옳든, 옳지 않든지 상관없이 구성되어 지며, 실생활에서 자신들에게 친숙한 상황과 관련된 상황의 문제에 대한 반응들에 의해서 얻어진다는 것과 학생들에게 실생활의 상황으로부터 제시된 문제 상황에 대해서 학생들이 이용할 수 있는 지식이라는 특징을 가진다. 이러한 지식은 학교에서의 형식적인 지도로부터 생겼다기보다는 개개인의 실생활 경험으로부터 발생했다고 보아야 할 것이다(Mack, 1990).

Baroody(1987)는 학교에서 공식적으로 가르치는 문자화된 기호와 상징체계로서의 형식적 수학과 구분하여 아동이 일상생활의 수학적 문제 사태를 경험하고 이를 비형식적으로 해결해가는 과정에서 얻은 직관적인 수학적 지식을 비형식적 수학이라고 정의하였으며, Becker와 Selter(1996)는 아동이 학교 밖에서 획득한 능력 및 지식뿐 아니라, 직접적인 지도 없이 학교에서 계발한 개념들을 포함하는 것이라 했다. 즉, 비형식적 지식은 아동 스스로에 의해 발명되고 구성된 지식이거나 아동이 일상생활에 적응할 수 있도록 돕기 위해 성인에 의해 전수된 지식이다(Kim, 2002). 뿐만 아니라, 비형식적 지식은 단순히 일상생활의 경험에서만 획득한 지식뿐만 아니라 수업 중 교사, 수학 교과서에서 제시하는 표준적인 방법이 아닌 스스로 구성해 낸 지식까지 포함한다. 6+8을 해결하기 위해 이전에 학습한 7+7의 수 구구 전략을 이용하여 문제를 해결한 경우 사용한 사전 지식 역시 비형식적 지식이라고 할 수 있다.

요약해보면, 비형식적 지식이란 구조화, 체계화, 엄밀화 되어 있는 형식적 수학(학교수학)과 달리 일상생활 및 학습 중에 아동 스스로가 창안, 구성한 지식을 의미한다. 이러한 비형식적 지식은 상징적인 기호 조작에 의존하기 보다는 구체적인 상황이나 문맥을 통해 시각적으로 이뤄진다는 것과 구체적이고 직관적이며, 특수하고 일상 언어를 사용한다(백선수 2004)는 점과 함께 구체물이나 기억에 의존하며 수가 점점 커지면 한계를 지닌다(이진영, 1998)라는 것으로 그 특징을 말할 수 있다.

나. 비형식적 지식의 교육적 중요성

구성주의에서 학습은 아동이 동화와 조절이라는 과정을 통하여 학습자의 기존 인지 구조를 조정해 나가는 과정이다. 새로운 개념이 자신의 기존 지식과 어떠한 관계를 맺으려고 할 때, 새로운 개념은 기존의 지식과 통합되고 발전되며, 의미 있는 학습이 될 수 있다(신준식, 1996). 아동에게 새로운 지식은 선행 지식의 깊이와 폭에 의해 그 이해의 정도가 결정된다는 구성주의자들의 관점을 바탕으로 둔다면 그 선행 지식은 아동이 형성한 비형식적 지식이어야 한다(김진호, 2002).

아동은 저마다 다른 지식을 구성하며, 이미 구성한 지식이 옳든 옳지 않든지, 끊임없이 새로운 지식을 구성해 나간다. 새로운 개념을 학습할 때, 아동이 이전에 어떠한 지식을 구성했는지에 따라서 지식 구성이 다르게 이뤄질 수 있다면 아동이 이미 형성한 비형식적 지식은 아동의 학습에 가장 큰 바탕이 될 수 있다. 뿐만 아니라, 지식의 구성에서 기존에 가진 인지구조에 적합한 새로운 지식을 가장 잘 구성한다는 점에서도 아동들에게 의미 있는 지식 구성을 위해서는, 학생들이 일상생활에서 경험한 것으로 구성한 비형식적 지식을 교수 학습에 활용해야 한다(홍은숙, 2007). 지식의 구성 과정이

기존의 지식을 바탕으로 한다는 것에서 아동이 구성한 비형식적 지식이 새로운 지식의 구성에 바탕이 되는 것은 당연하다.

아동들은 어떠한 개념에 대해서 형성한 비형식적 지식을 통해 이해하고 있음에도 불구하고, 학교에서 학습하는 형식적 지식을 제대로 이해하지 못하는 경우가 있다. 이것은 학교에서 가르치고자 하는 형식적 지식과 아동이 일상생활에서 구성한 비형식적 지식 사이에 단절이 있음을 의미한다. 이는 어린이가 수학을 하는 것이 성인이 생각하는 수학과는 다르다는 것을 말한다. 아동이 스스로 이해를 구성하기를 원한다면, 어린이가 수학의 어떠한 개념에 대해 지식을 어떻게 구성하고 있는지와 함께 아동들의 비형식적 지식을 이해할 필요가 있다(백선수, 2004).

수학 학습에서 비형식적 지식이 중요하다 할지라도 한계를 가진다. 먼저 비형식적 지식은 문서적 기록으로 남지 않는다는 것과 그로 인해 당시 문제를 해결했다 할지라도 그 문제 해결 방법을 잊기 싶다는 단점을 가진다. 또한 비형식적 지식은 전적으로 일관성이 있거나 논리성을 가지는 것은 아니다. 하지만 학교에서 아동들이 새로운 개념을 학습 할 때, 아동이 기존에 가지고 있는 비형식적 지식을 적극적으로 이용한다면 아동들은 새로운 개념을 비형식적 지식에 연결하여 그것을 쉽게 받아들일 수 있으며, 자신의 비형식적 지식을 더욱 발달시켜서 수학적 개념이나 원리를 좀 더 깊이 있게 이해할 수 있게 될 것이다.

따라서 학습을 '기존의 경험에 새로운 경험을 통합함으로써 의미를 창출해나가는 하나의 과정'으로 보고 새로운 지식을 획득하기 위해서는 그와 관련된 사전 지식이 필수적이라는 관점에서 비형식적 지식에 대한 다양한 분석에 대한 다양한 연구가 필요하다.

2. 분수

가. 여러 가지 의미로서의 분수의 개념

분수는 현실에서의 필요에 의해 발생하였으나, 수학이 이론적으로 발달함에 따라 수학 내적인 문제를 해결하기 위한 수단으로서 그 의미가 점차 확장되었다(Davydov & Tsvetkovich, 1991). 분수는 먼저 숫자를 쓰는 어떠한 형식을 의미한다. 이러한 의미에서 분수는 $\frac{b}{a}$(a≠0)의 형식으로 쓰는 숫자이다. 이 중에서도 a처럼 아래의 숫자를 분모, 위의 숫자를 분자라고 부른다. 이것처럼 분수란 단어는 숫자를 쓰는 형식을 가리킬 때가 있다.

Lamon(1999)은 분수에는 기수법(記數法)으로서의 분수 말고도 수 개념으로서의 분수에 대해서도 언급하였다. 수로서의 분수에서 중요한 것은 $\frac{1}{4}$ 또는 2/8, $\frac{2}{8}$ 등을 어떻게 부르느냐 하는 것이 아니라 분수 내에 잠재하고 있는 그들의 관계인 것이다.

이처럼 분수는 기수법, 수로서의 분수 외에도 분수 기호(symbol)의 바탕이 되는 여러 가지 개념적 이해, 의미 해석을 의미하는 경우도 있다. 분수는 다양한 의미가 모여서 형성된 개념으로,

Skemp(2000)는 이와 같은 것을 2차 추상이라고 하였다. 또한 이것은 초등학교 아동들이 분수 개념을 어려워하는 한 원인이 된다.

<표 Ⅱ-1>과 같이 많은 연구자들이 유리수의 의미를 여러 가지로 분석하였다. Kieren(1976)은 분수가 전체-부분의 비교, 소수, 비, 몫, 연산자, 측도 등 최소 6가지의 뜻을 가지고 있다고 하였다. Freudenthal(1983)은 분수를 유리수 개념의 현상학적 근원으로 보고 눈으로 보거나, 느끼거나, 접거나 손으로 저울로 부분을 무게를 재어 양이나 크기를 비교하는 것과 같은 경험적이고 활동적인 측면에서의 분할자(fracture), 부분-전체의 개념을 서로 다른 전체의 부분들을 비교하는 것으로 확장하여 비교자(compare), 연산자(operator)의 세 가지 측면에서 언급하였다. Nesher(1985)는 전체-부분 관계, 몫, 비, 연산자, 확률 5가지로, Behr, Post & Lesh(1993)는 몫, 비, 비율, 연산자, 측도, 소수, 직선에서 좌표 등으로 분수의 의미를 분석하였다(신준식, 1996 재인용). 또한 Mack(1987)은 분수를 등분할, 수로서의 분수, 연산자로서의 분수로 나누었다. 그리고 배종수(1999)는 분수를 등분할 활동으로서의 분수(조작분수), 추상적인 수로서의 분수(양의분수), 비율로서의 분수(비율분수), 몫으로서의 분수(몫의 분수)로 분류하고, 순수하게 분수로서의 의미를 나타내는 것은 두 가지이며, 다른 두 가지는 비율과 나눗셈에서 유도된 것이라고 밝혔다.

<표 Ⅱ-1> 여러 가지 분수의 의미

연구자	분수의 의미						
Freudenthal	분할자	비교자	연산자				
Kieren	전체-부분의 비교	소수	비	몫	연산자	측도	
Nesher	전체-부분 관계	몫	비	연산자	확률		
Rational Number Project	몫	비	비율	연산자	측도	소수	직선에서 좌표
Mack	분할로서의 분수	수로서의 분수,	연산자로서의 분수				
배종수	조작분수	양의 분수	비율 분수	몫의 분수			

앞서 진술하였듯이 분수는 여러 가지 의미를 통괄하는 개념이다. 그렇다고 해서 그 의미가 완전히 독립적인 의미를 갖는 것은 아니다. 연구자에 따라 분수의 특성이 같아도 사용하는 용어가 다를 수도 있으며, 여러 가지의 개념 가운데에서도 다른 개념의 바탕이 되는 경우도 있고, 개념들 사이에 어느 정도 포함 관계를 형성하기도 한다.

3. 선행연구고찰

이 절에서는 분수 개념에 관해 아동들이 형성한 비형식적 지식에 관해 이루어진 선행 연구들에 대해서 살펴보려고 한다.

아동들은 수업에 사전 지식(prior knowledge)을 가지고 임하며, 이는 범자연수의 연산에 대한 아동

들의 이해에 대한 연구를 통해 이미 충분히 입증되었다(Carpenter & Moser, 1983). 하지만, 분수에 대한 아동들의 이해에 관한 연구결과에 기초하여 보았을 때, 아동들이 분수에 관한 사전 지식을 충분히 가지고 있다거나, 사전 지식이 수업의 기초를 제공한다는 것은 명확하지 않다(Mack, 1987). 분수에 대한 아동들의 이해에 대한 연구는 분수에 대한 아동들의 지식을 특징화하는 것보다는 오개념에 대해 더 초점을 맞추어져 있었다. 몇몇의 연구는 적지 않은 아동들이 분수 아이디어에 대해 개념적인 이해를 하지 못하고 있음과 분수의 연산 과정에서 보이는–동분모 또는 이분모 분수를 더 할 때 분자끼리 더한다거나 분모끼리 더하는–일반적인 오류를 보여주었다(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Erlwanger, 1973; Kerslake, 1986). 그러나 이러한 연구들은 주로 형식적인 기호나 알고리즘적인 절차에 관한 학생들의 이해에 대해서만 검사하였으며 분수에 대한 아동들의 직관적인 이해에 대해서는 검사하지 않았음을 Mack(1987)은 밝히고 있다.

Mack(1987)은 교수·학습 활동 중에서 분수에 대한 학생들의 이해의 발달 정도를 평가하였다. 연구 과정에서 아동은 분수에 관한 비형식적 지식을 가지고 형식적 학습에 임하며, 자신이 가진 비형식적 지식을 분수의 기호와 절차에 연관시킬 수 있다는 것과 분수를 학습할 때 비형식적 지식에 관련하면 더 잘 이해할 수 있음과 함께 현실 세계와 관련된 분수의 표현 방법들이 분수 학습이 상당히 도움이 된다고 밝혔다. 그리고 분수 개념에 대해 부족한 이해를 가진 아동들에게 올바른 분수 개념 형성을 위한 교수 방법을 제시하였다.

홍은숙(2007)은 분수 개념을 아직 학습하지 않은 아동들이 가지고 있는 비형식적 지식을 조사하여, 이것을 분수 개념의 학습에 어떻게 적용·활용할 수 있는지에 대해서 밝히고자 하였다. 1, 2학년 학생들에게 등분할, 동치분수, 단위 분수의 크기 비교의 면담과제로 면담을 실시하였다. 연구를 통하여 형식적 학습 이전에도 아동들이 분수와 관련된 비형식적 지식을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있음과 그 문제해결 전략이 다양하였음을 알아냈었다. 또한 분수 개념에 관한 아동들이 형성한 비형식적 지식에는 올바르지 않은 형태가 존재하여 오개념을 유도할 수 있는 것들이 있었으므로 비형식적 지식을 활용하여 교수 학습 활동을 해야 한다고 하였다.

또한 최영주(2005)는 형식적인 분수 학습이 어느 정도 이루어진 4~6학년 학생 총 400명을 대상으로 분수의 기본적인 개념에 대해 아동들의 이해도와 오개념을 평가지를 통해 분석하였다. 그 결과 아동들이 분수 개념 자체를 많이 어려워하고 있음을 밝혔다. 아동들이 분수 개념에 대한 오개념을 보이는 한 그 원인을 수학 학습 이론과 교수학적 요인으로 설명하여 교과서에 제시되어 있는 제한된 문제 형태들로 인한 것임을 밝혔다. 뿐만 아니라 분수를 학습할 때에는 학습자가 형성한 비형식적 지식을 이용하고, 교수·학습 자료로서 일상생활에서 쉽게 제시할 수 있는 자료들을 제시하여, 분수라는 개념이 어렵지 않다는 것과 분수의 생성 배경과 필요성을 충분히 이해시켜 스스로 분수 학습의 필요성을 깨닫게 해야 함을 강조하였다.

위와 같은 선행 연구들은 분수 학습의 어려움과 함께 아동이 분수에 대해 형식적인 학습을 하기 전에도 일상생활의 경험을 통해서 분수에 관한 비형식적 지식을 형성할 수 있으며, 자신이 구성한

지식을 활용하여 직관적으로 문제 상황을 이해하고 다양하게 해결할 수 있음을 보여 준다. 하지만 이들 연구들의 거의 대부분이 형식적 학습을 잘 따라 오지 못한 아동들을 위한 수업 연구 방법(Mack, 1987; Lamon, 1999)에 대해서 한정되어 있는 경우가 많았다. 아동이 일상생활에서 형성한 비형식적 지식을 활용하여 형식적 학습을 하게 하는 것은 의미 있는 일이다. 이러한 연구들은 아동 스스로 지식을 구성할 수 있음과 함께 자신이 형성한 비형식적 지식을 활용한다면 새로운 개념을 더 잘 이해할 수 있을 것이라는 구성주의적 학습관에 잘 부합한다. 하지만 비형식적 지식을 활용한 수업 이전에 아동이 형성한 비형식적 지식을 분석하는 것에 먼저 초점이 맞춰져야만 할 것이다.

따라서 본 연구는 아동들의 비형식적 지식에 바탕을 둔 우리나라 수학 교육과정에 적절하게 포함시킬 수 있는 기초자료로서, 분수에 대한 우리나라 초등학교 아동들의 비형식적 분수 개념의 특성을 살펴보는 것이 목적이므로, 보다 세부적으로 분수개념, 학습능력, 학년에 따라 아동의 사고가 어떠한지에 대해서 알아보고자 하는데 그 목적이 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

분수의 형식적 학습이 이루어지기 전인 1, 2, 3학년 학생들의 사고의 공통적인 특성과, 변화의 양상을 알기 위해서 다음과 같은 연구 절차를 세웠다.

1. 연구 대상

본 연구 목적은 초등학교 1학년, 2학년, 3학년 학생들이 일상생활의 경험을 통해 형성한 비형식적 분수 개념을 알아보기 위해서 울산광역시 북구에 소재한 C초등학교 1, 2, 3학년별로 6명씩 선정하였다.

추론 능력과 학업 성취도를 포함하는 학습 능력에 따른 연구대상을 선정하기 위해서 먼저 한국가이던스에서 개발한 추론검사를 통해 추론 능력을 상·중·하로 구분하였으며 학업성취도 검사를 실시하여 아동을 다시 상·중·하로 나누었다. 그리고 두 가지 검사 모두에서 상인 아동 2명, 중인 아동 2명, 하인 아동 2씩을 학년별 6명씩 총 18명을 연구대상으로 선정하였다.

<표 Ⅲ-1> 학습 능력에 따른 연구대상 선정

	1학년(N=28)			2학년(N=31)			3학년(N=34)		
성취도 / 추론 능력	상	중	하	상	중	하	상	중	하
상	2	0	0	5	1	0	3	0	0
중	9	6	5	4	7	3	4	8	1
하	1	0	5	0	6	5	2	11	5
연구 대상	2명중 2명	6명중 2명	5명중 2명	5명중 2명	7명중 2명	5명중 2명	3명중 2명	8명중 2명	5명중 2명2
	6명			6명			6명		
	총 18명								

2. 연구 방법

본 연구는 아동들이 분수의 학습 전에 형성한 다양한 비형식적 지식을 알아보는 것이 목적이므로, 개별 면담의 유형 중에서도 과제와 질문들이 미리 계획 되어 있는 구조화된 면담(이하 면담)을 통해서 분수에 관한 아동의 사고 과정을 알아보고자 하였다. 면담에 필요한 면담 과제를 개발하고, 면담을 실시하여, 아동들의 반응을 통한 질적 연구를 한다. 아동의 면담은 비디오 녹화를 통해서 면담의 내용을 기록한다.

가. 면담 과제의 개발

1) 분수 개념에 따라 초기 과제 개발

본 연구를 위해 먼저 수학 교과서와 기존의 연구 문헌(홍은숙, 2007; Lamon, 1999; Marshall, 1993)을 바탕으로 초기 과제를 개발하였다. 전체-부분으로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비로서의 분수, 양으로서의 분수, 측정으로서의 분수, 연산자로서의 분수 중에서 초등학교 학습 중에서 독립적으로 학습이 이루어지는 전체-부분으로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비로서의 분수, 측정으로서의 분수만을 선택하여 면담을 실시하였다. 연산자, 양으로서의 분수에 대해서 따로 면담을 실시하지 않은 까닭은 먼저 양으로서의 분수는 모든 분수의 개념에서 아동이 형성한 지식의 정도를 가늠해 볼 수 있기 때문이며, 연산자로서의 분수는 실제 생활에서 사용되는 예를 찾기가 쉽지 않고, 해당 과제를 해결하기 위해서는 곱셈과 나눗셈 그리고 분수에 관한 개념이 이미 형성되어 있어야 하므로, 연구 대상에 해당하는 저학년 아동들의 학습 수준에 적합하지 않기에 생략하였다.

2)예비 면담 실시

초기 과제로, 예비 면담을 실시하였다. 이것은 초기 과제가 가진 문제점을 발견하고 수정하여 최종 과제를 선정하기 위함과, 면담자의 면담 기술을 늘리기 위한 목적으로 실시되었다. 예비 면담은 2008년 4월~5월 사이에서 이루어졌으며, 그 면담 대상은 연구 대상의 기준에는 적합하였으나 최종 연구 대상으로 선정되지 않은 아동으로 하였다.

예비 검사 결과 아동들이 표현을 이해하지 못하거나, 비형식적 지식이 형성되지 않은 개념에 대한 과제는 제외시키기로 하였다.

3)초기 과제 수정을 통한 새로운 과제 개발

예비 면담을 통해서 1, 2, 3학년 학생들에게 친숙한 소재를 바탕으로 과제를 수정하였으며, 분수가 여러 가지 개념으로 분화되어 있지만, 그 자체로서 독립적이기는 어렵기 때문에 과제 구성에 있어서, 가능한 그 개념을 알아 볼 수 있도록 구성하였다. 하지만 필요할 경우 면담 중 과제에 포함되어 있는 다른 개념에 대한 면담을 실시하여 아동이 가진 비형식적 지식을 보다 다양한 면에서 분석 할 수 있도록 하였다. 본 연구에서 사용한 면담 과제는 <표 Ⅲ-2>와 같이 제시되었다.

<표 III-2> 면담 과제

몫으로서의 분수	빵이 3개가 있습니다. 2사람이 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 한 사람이 먹게 되는 양은 얼마만큼 입니까?
비율로서의 분수	짱구 가족 4명이 모두 감기에 걸렸습니다. 짱구 가족 모두에게 꿀물을 타 주려고 합니다. 꿀물은 물 1컵에 꿀을 세 스푼씩 넣으면 됩니다. 짱구 가족 모두에게 꿀물을 만들어 주기 위해서 꿀을 얼마만큼이 필요하나요?
전체와 부분으로서의 분수	다희가 가지고 있는 사탕의 반 만큼을 너에게 주었어. 너는 지금 사탕을 3개를 가지고 있어. 그렇다면 처음에 다희는 사탕을 몇 개를 가지고 있었을까요?
측정으로서의 분수	막대를 가지고 다음의 빈 칸을 채워 보세요. 막대는 얼마만큼이 필요한가요?

몫으로서의 분수 과제는 실생활의 경험을 활용할 수 있도록 빵 3개를 2명이서 나누어 먹는 내용을 제시하고 빵의 모양을 먼저 동그라미 도양으로 제시를 하였다. 필요할 경우 과제 해결에 대해서 아동의 사고를 좀 더 알아보기 위해서 빵 3개를 4명이서 나누어 먹는 상황을 질문하기도 하였다. 비율로서의 분수에 대해서는 아동들에게 친근한 만화 캐릭터를 통해서 1:3=4:x를 구하는 과제를 제시하였다. 과제를 해결한 아동에 대해 필요할 경우 2:3=6:x의 상황을 제시하기도 하였다. 전체-부분으로서의 분수 과제는 일상생활에서 사용하는 '반'과 '반의 반'이라는 단어를 통해서 반이 x개 일 때 전체의 개수를 알아보는 과제 상황으로 설정하였다. 이 과제는 이산량에 관한 등분과 함께 부분과 전체의 관계에 대한 사고를 조사하기 위해 설정하였다. 전체의 개수를 알아보지 못할 경우에는 등분할 과제를 제시하여 아동의 사고를 좀 더 조사하고자 하였다. 측정으로서의 분수 과제는 단위길이들을 제시한 다음 단위길이를 분할해야 잴 수 있는 길이를 제시한 다음 그만큼을 채우는 활동을 통해서 길이를 측정해 보는 과정을 유도하였다.

나. 면담 절차

아동들에게 과제들을 이야기로 제시하고 과제를 이해했는지 알아보기 위해 피면담자에게 과제를 재진술 해보게 하였다. 과제를 이해하지 못하였을 때에는 아동에게 보충 설명을 해주었다. 면담을 실시 할 때에는 과제를 제시하고, 아동의 행동을 관찰하고, 그 해결 방법에 대해서 설명하게 하며, 어떻게 알게 되었는지에 대해서 질문하였다. 아동 수준에 따라서 문항 내에서의 숫자 조절 등의 수정을 통해서 아동이 형성한 비형식적 지식이 어느 정도인지 알아보았으며 여러 가지 방법으로 생각할 수 있도록 생각할 수 있는 충분한 시간을 주었다.

다. 면담 실행

면담은 1명씩 개별적으로 실시하였으며, 아침 자습시간, 점심시간, 방과 후의 시간을 활용하였다. 면담을 실시하기 전에 학생들마다 1~2회 정도 사전 면담을 실시하여 친밀감을 형성하고 피면담자의

기본적인 성향을 파악하고자 하였다.

3. 자료 수집

가. 면담 전 사전 자료

1) 추론능력 검사지

연구 대상 선정을 위하여 먼저 추론 능력을 알아보기 위하여 추론 능력 검사를 실시하였다. 한국가이던스의 검사 도구를 선택하였는데, 이는 학년별로 다른 검사지를 사용하였다는 것과 수리력과 추리력 검사를 통해 추론 능력에 대해서 집중적인 검사를 할 수 있다는 장점을 가지고 있었기 때문이었다. 이 검사 도구를 통해 아동의 수리력(numerical ability)과 추리력(reasoning ability)을 조사할 수 있었다.

2) 성취도 평가

추론 능력 평가는 표준화된 평가이기 때문에 한 번의 평가만으로는 아동의 학습 능력을 전반적으로 평가하기에는 다소 부족한 점이 있었다. 따라서 추론 능력 평가를 보안하기 위하여 성취도 평가 결과를 사용하였다.

나. 면담 중의 자료 수집

비디오 촬영과 면담 중 관찰, 활동지, 면담 일지를 통해 면담 중 자료를 수집하였다. 연구자가 면담을 하면서 관찰할 수 있는 것 이외의 다른 모든 활동을 다시 확인하기 위해 면담마다 비디오로 촬영을 하였다. 면담을 하기 전에 아동에게 미리 비디오 촬영에 대해서 양해를 구했지만, 비디오 촬영에서 주는 심리적인 부담감을 줄이기 위해서 가능한 작은 비디오를 준비하고, 면담 장면이 전체적으로 조망되는 곳에 고정을 하여 촬영을 하였다.

면담이 이루어지는 동안 어린이의 활동 모습을 면밀하게 관찰하였다. 이는 아동이 과제를 해결하는 과정에서 사용하는 문제 해결 전략이나, 사고 과정을 분석하는데 도움이 되었다. 면담 중의 관찰을 통해서 어린이의 심리 파악을 통해서 제시된 과제보다 상위 수준의 문항을 제시할 것인지, 하위 수준의 과제를 제시할 것인지에 대해서 결정하는 도움을 주었다.

면담의 과제에 따라서 활동지가 필요한 경우와 필요 없는 경우가 있었다. 활동지는 활동별로 모아서 면담 후에 자세히 분석하였고, 어린이의 사고 과정 또는 문제 해결 전략에 대해서 분석하는 데 사용하였다.

매 면담 과정과 면담 직후와 면담의 과정에서 알게 된 사항에 대해서 기록하는 면담 일지를 작성하였다. 면담 과정에서 알게 된 점을 가능한 빠르게 정리하기 위해서 메모나 문서 작성을 통해서 기록을 남겼다.

4. 자료의 분석 방법

아동들이 일상생활의 다양한 경험을 통해서 여러 가지 수학의 개념에 대한 비형식적 지식개념을 형성하고 그것을 분석하기 위해 본 연구에서 설정한 연구 문제를 토대로 자료가 수집되었다. 수집된 자료는 다음과 같은 방법으로 분석되었다.

가. 프로토콜 분석

먼저 수집된 비디오 자료들을 통해서 프로토콜 분석을 하였다.

나. 부호화(coding)

프로토콜 분석 자료를 이용하여 자료들을 부호화하였다. <표 Ⅲ-3>과 같이 각 분수 개념의 영문 약자의 첫 글자를 따서 전체-부분으로서의 분수는 P로, 비로서의 분수는 R, 몫으로서의 분수는 Q, 측정으로서의 분수는 M으로 나타내었다. 아동을 나타내기 위해서 먼저 해당 아동의 학년을 나타내고, 학습 수준을 상, 중, 하로 표시하였으며, (1), (2)로 아동을 구분하였다. 그리고 교사는 T로 나타내었으며, 반응 번호는 001부터 시작하도록 하였다.

<표 Ⅲ-3> 코딩 시스템

분수개념	-	학년	학습수준	학생구분	학생	교사	-	말한 순서
P(전체-부분으로서의 분수) R(비로서의 분수) Q(몫으로서의 분수) M(측정으로서의 분수)	-	① ② ③	상 중 하	(1) (2)	S	T	-	000

다. 범주화(categorizing)

부호화된 자료를 범주화하여 아동들의 반응 유형에 따라 분류, 정리한다. 번호가 부여된 프로토콜 자료와 아동 활동지, 면담 일지를 참고해서 비슷한 사고 과정을 유형끼리 분류하여 그 특징을 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 분수 개념에 따른 비형식적 지식 분석

가. 몫으로서의 분수

몫으로서의 분수에 관해서 아동들은 먼저 $3 \div 2 = \frac{3}{2}$에 해당하는 등분제의 과제(<표 Ⅲ-2>참고)를

받았다. 아동들의 반응은 <표 Ⅳ-1>와 같이 3가지로 나눌 수 있었다.

<표 Ⅳ-1> 몫으로서의 분수 과제에 관한 아동 반응 분석

<table>
<tr><th>아동 반응의 범주</th><th colspan="2">반응한 아동</th></tr>
<tr><td>원 세 개 중 하나 만 2등분하여 한 개 반으로 분할</td><td colspan="2">Q①상(1), Q①상(2)
Q②상(1), Q②상(2), Q②중(2)
Q③상(1), Q③상(2), Q③중(1), Q③중(2), Q③하(1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">원 세 개 모두를 2등분</td><td>전체와 부분의 관계를 인식한 경우</td><td>Q②중(1)
Q③하(1)</td></tr>
<tr><td>전체와 부분의 관계를 인식하지 못한 경우</td><td>Q①중(1), Q①중(2)
Q②하(1)</td></tr>
<tr><td>피제수·제수의 교환</td><td colspan="2">Q①하(1), Q①하(2)
Q②하(2)</td></tr>
</table>

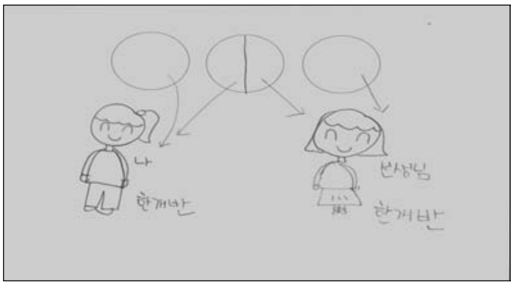
1) 원 세 개 중 하나만 2등분하여 한 개 반으로 분할한 경우

아동들이 등분제의 몫의 과제 상황에 대한 사고과정을 알아보기 위해서 "*어떻게 했는지 설명해줄래?*", 또는 "*왜 이렇게 나누었어?*"라는 질문을 했으며, 이 범주에 속하는 아동들의 반응은 다음과 같다.

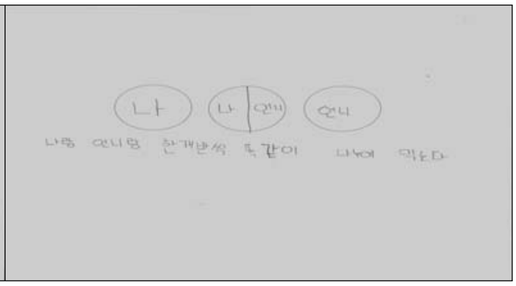
Q①상(1)S-016 : 먼저 세 개니깐, 세 개중 두 개를 먼저 하나 씩 나눈 다음, 남은 하나를 반으로 나누었어요.

Q①상(2)S-004 : 빵 한 개를 반으로 나누면 되요. 빵 한 개 한 개를 가지고 남은 빵 하나를 반으로 갈라서 먹으면 되요.

위와 같이 반응 한 아이들은 모두 다 자신의 몫으로 한 개 반씩을 가진다고 반응을 보였다. 먼저 반응을 통해 아동들이 피제수(원 3개)와 제수(2명)인 등분제의 과제 상황을 이해하였음과 이산량을 등분 할 수 있음을 알 수 있었다. <그림 Ⅳ-1>와 <그림 Ⅳ-2>처럼 아동들은 주어진 원 세 개 중에서 가운데의 원을 2등분을 하여 자신의 몫을 표현하였다. 면담 중 아동들은 '씩'이라는 용어를 자주 사용하였는데 이 단어는 수량이나 크기가 되풀이되는 접미사이다. 아동들은 '~씩'이라는 표현을 통해서 상대방과 자신이 가지는 양에 대해서 동일한 양이 반복됨을 표현하는 경우도 있었다.



<그림 Ⅳ-1> Q②중(2)의 활동지



<그림 Ⅳ-2> Q①상(1) 활동지

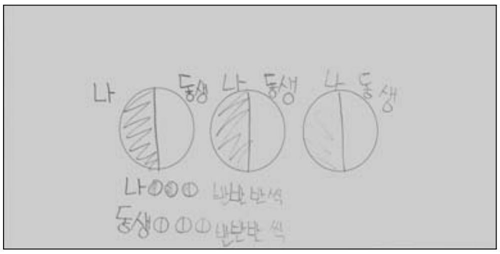
2) 원 세 개 모두를 2등분 한 경우

주어진 과제 상황에서 원 세 개를 각각 2등분하는 아동들이 존재하였으며 이 반응은 다시 크게 두 가지로 분류할 수 있었다. 원 세 개를 2등분 한 결과로 자신의 몫이 한 개 반이라고 반응한 아동과 세 개라고 반응한 아동으로 나눌 수 있었다. 두 반응은 보존 개념 형성과 전체와 부분간의 관계에 대한 이해의 차이라고 볼 수 있다.

먼저 등분의 결과를 한 개 반이라고 반응한 아동의 반응은 다음과 같았다.

Q②중(1)S-008: (각 동그라미의 반을 가리키며) 여기에 반개, 여기에 반개, 여기에 반개

두 번째는 이산량 3을 2등분 할 수 있었지만, 분할된 조각을 독립된 전체로 인식한 반응이었다. 이 경우 아동들은 분할 전·후의 부분과 전체의 관계를 인식하지 못하였을 뿐, 보존 개념을 전혀 형성하지 못한 것은 아니었다. 또한 이 범주의 아동 중에는 <그림 Ⅳ-3>과 같이 몫의 양을 '반반반'과 같이 자신의 수로 표현하는 경우도 존재하였다.

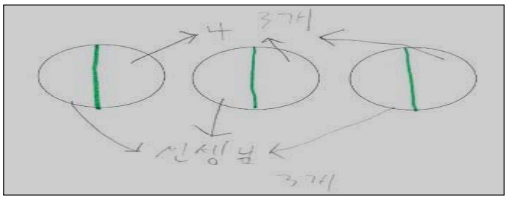


<그림 Ⅳ-3> Q②중(1)의 활동지

다음은 <그림 Ⅳ-4>와 같이 자신의 몫을 3개씩이라고 답을 한 아동들이다. 이 아동들은 분할의 결과로서만 대상을 생각할 뿐, 분할 전의 전체에 대한 사고가 부족하였다. 또한 아동에게 분할에 대한 보존 개념 부족하다는 것을 보여주고 있다. 이 범주에 해당하는 아동들의 반응은 다음과 같다.

Q①중(1)S-012 : 처음에 세 개가 있고, 이걸 반씩 나누었어요. (나누어진 부분들을 하나하나 가리키며 혼잣말로) 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯. (칠해진 부분을 가리키며) 이렇게 반씩을 세 개를 먹는 거니깐... 세 개에요.

Q①중(2)S-00 : (동그라미의 반을 차례대로 가리키며) 하나, 둘, 셋 이 부분들을 제가 먹고 남은건 선생님이 드시면 되요. 선생님과 저는 빵을 세 개씩 먹게 되는 거예요.

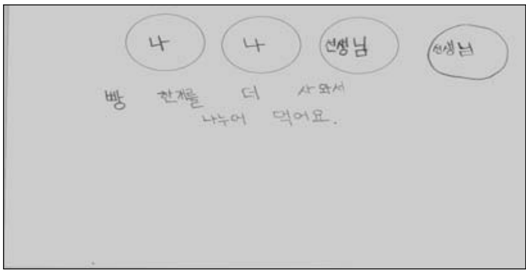


<그림 Ⅳ-4> Q①중(1)의 활동지

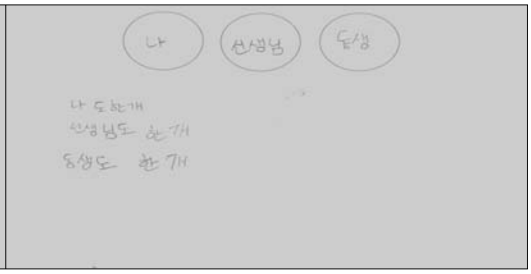
3) 피제수와 제수의 교환

주어진 과제는 피제수가 홀수인 3이며 제수는 짝수인 2인 상황이다. 이에 대해서 아동들은 나눠야 할 대상을 그대로 두는 대신에, <그림 Ⅳ-5>와 같이 피제수 3에 대해서 제수인 2를 그의 배수인 2나 4로 늘리거나, <그림 Ⅳ-6>과 같이 피제수인 3을 2로 줄이거나, 제수인 2를 3으로 늘이는 반응을 보였다. 이는 등분의 상황에서 대상 또는 단위는 나누어질 수 있다는 사고가 형성되지 않은 것으로 파악할 수 있다. 이 범주에 해당하는 아동들의 반응은 다음과 같다.

Q①하(1)S-010 : 하나는 그냥 두어야 되요.
Q①하(2)S-010 : 하나는 동생을 주면 되요. 그럼 빵도 세 개 우리도 세 명이니깐 하나씩 먹으면 되요.



<그림 Ⅳ-5> Q①하(1)의 활동지



<그림 Ⅳ-6> Q①하(2)의 활동지

나. 비로서의 분수

비로서의 분수에 관해서는 1:3=4:x의 과제가 주어졌고, 이에 대한 아동들의 반응은 크게 <표 Ⅳ-2>와 같이 세 가지로 나눌 수 있었다.

<표 Ⅳ-2> 비로서의 분수 과제에 대한 아동 반응 분석

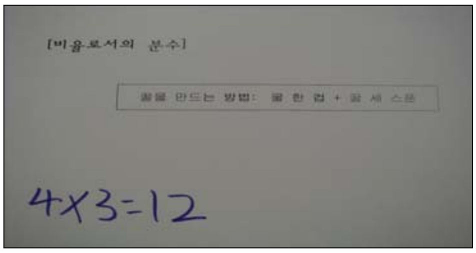
아동 반응의 범주		반응한 아동
곱셈적 사고	동수누가	R①상(2), R①중(1) R②상(2), R②중(1), R②중(2) R③중(2), R③하(2)
	곱셈구구	R①상(1) R②상(1) R③상(1), R③상(2), R③중(1)
가・감을 이용하여 규칙 찾기		R①중(2) R②하(1), R②하(2)
모호한 반응		R①하(1), R①하(2), R③하(1)

첫 번째로, 비의 상황을 곱셈구구 또는 동수누가를 이용한 곱셈적인 사고를 통하여 과제를 해결하였고, 두 번째는 비의 상황을 가・감을 이용한 규칙성을 찾아 과제를 해결한 경우, 세 번째는 모호한 반응의 경우가 있었다.

1) 곱셈 구구의 이용

주어진 과제에 대해서 곱셈 구구를 이용하여 과제를 해결한 아동의 반응은 다음과 같았다. 그리고 <그림 Ⅳ-7>와 같이 표현하였다.

R①상(1)S-002 : 12스푼이요. 곱하기로 풀었어요. 3곱하기 4가 12잖아요.
R②상(1)S-015 : 그냥 곱하면 3이랑 4랑 곱하면 12가 되요. 그래서 12스푼이요.



<그림 Ⅳ-7> R②상(1)의 활동지

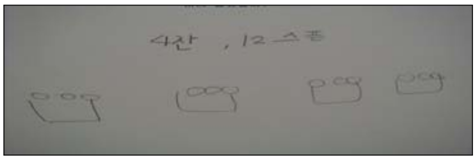
면담 과정에서 곱셈구구를 이용한 이유에 대해서 아동들은 동수누가를 이용하여 곱셈구구를 이용하였음을 설명하였다. 이를 통해 아동의 곱셈적 사고는 동수누가를 바탕으로 곱셈구구로 이어짐을 알 수 있었다.

R①상(1)S-004 : 3스푼씩이 4개가 필요하니까요.
R②상(1)S-029 : 3스푼씩 네 컵을 만들어야 하니깐 3을 네 번씩을 더한 게 되니까요. 곱하기를 하면 되요.

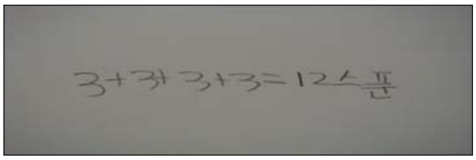
2) 동수누가의 이용

주어진 과제 상황에서 아동은 그림을 그리거나, 수식을 이용하여 자신의 사고를 표현하였다. 단순히 차례대로 하나씩 세어보기, 묶어서 세어보기, 수식을 이용하기와 같이 동일한 동수누가적인 사고에도 불구하고, 아동들은 <그림 Ⅳ-80>, <그림 Ⅳ-9>과 같이 다양한 문제 해결 전략을 보여주었다. 동수누가를 이용하여 과제를 해결한 아동의 반응은 다음과 같다.

R①상(2)S-010 : 6+6을 하였어요. 두 컵에는 6스푼씩이 필요해요.
R②상(2)S-008 : 3+3+3+3=12이니깐 모두 12스푼이 필요해요.



<그림 Ⅳ-8> R②중(2) 활동지



<그림 Ⅳ-9> R③중(2) 활동지

3) 가·감을 이용한 규칙 찾기

비로서의 분수에 관한 과제에서 단순히 덧셈과 뺄셈의 상황만을 이용하여 규칙성을 찾고자 하는 반응이 존재하였다. 이에 해당하는 아동들은 비에 관련된 과제를 명확하게 인식하지 못하였으며, 숫자들 사이의 규칙성만을 찾아서 과제를 해결하고자 하는 경향이 나타났다.

R①중(2)S-016 : 꿀물은 모두 4잔이 있고 꿀은 3스푼이 필요해서 4랑 3을 더했더니 7이 나왔어요.
R②하(1)S-008 : 그럼요. 1컵에 3스푼이 더 많아요. 그러니깐 컵보다 2 스푼이 더 많아요. 그러니깐 4컵이 필요하니깐 모두 6스푼이 필요해요.

4) 모호한 반응

비로서의 분수의 과제에서 모호한 반응은 대부분 과제를 제대로 이해하지 못하여 과제 해결을 포기하는 경우였다. 아동의 반응은 다음과 같다.

R①하(1)S-009 : 모르겠어요. (주저하면서) 어떻게 해야 할지 모르겠어요.
R①하(2)S-010 : 이건 너무 어려운 것 같아요.

다. 전체와 부분으로서의 분수

먼저 전체와 부분간의 관계에 대한 아동의 사고를 알아보기 위해서, 일상 언어인 반이라는 용어를 통하여 현재 아동이 반만큼 몇 개를 가지고 있다면 처음에는 얼마만큼을 가지고 있는가에 대한 과제(<표 Ⅲ-2> 참고)를 제시하였다. 아동의 반응은 <표 Ⅳ-3>와 같이 크게 2 가지로 나눌 수 있었다. 가장 먼저, 반이란 용어가 주어진 전체 양에 대한 2등분을 뜻함을 알고, 가역적 사고를 통해서 처음

의 양을 유추하는 아동과, 반이라는 양을 절대적인 양으로 인식한 아동으로 나눌 수 있었다.

<표 Ⅳ-3> 전체와 부분으로서의 분수 과제에 대한 아동 반응 분석

아동 반응의 범주	반응한 아동
반에서 전체의 양 유추	P①상(1), P①상(2), P①중(2) P②상(1)S, P②상(2), P②중(1), P②중(2) P③상(1)S, P③상(2), P③중(1), P③중(2)
반에서 전체의 양을 유추 하지 못함	P①중(1), P①하(1), P①하(2) P②하(1), P②하(2) P③하(1), P③하(2)

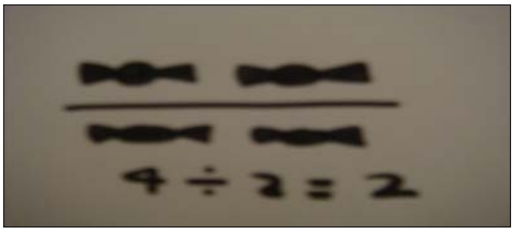
1) 전체의 양 유추 가능

반이라는 일상 언어를 주어진 전체의 양을 2등분한 상대적인 양임을 이해하고, 전체의 양을 유추한 아동은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙연산을 통해서 과제를 해결한 아동과 그림을 그려서 해결한 아동으로 나눌 수 있었다. 이 범주에 해당하는 아동들의 반응은 다음과 같다.

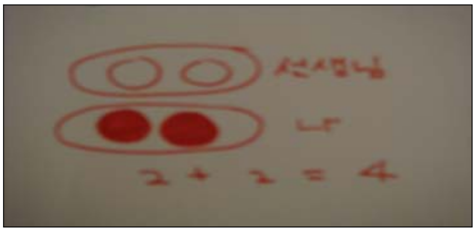
P①상(1)S-004 : 반을 줬다고 했으니까요. (3개의 원을 2줄로 그린다)반을 줬다고 했으니깐. (2줄 사이를 선으로 가르면서) 이걸 반을 가르니깐 3개씩이 되잖아요. 그러니깐 처음에는 선생님이 6개를 가지고 있었어요.

P①상(2)S-008 : 아~(알겠다는 듯이) 선생님은 처음에 4개를 가지고 있었어요. 반이 2개 만큼이니깐 2개에다가 2개를 더하면 4개가 되어요. 맞죠?

이 범주에 해당하고 그림을 그려서 해결한 아동의 활동지는 <그림 Ⅳ-10>, <그림 Ⅳ-11>와 같다.



<그림 Ⅳ-10> P②상(2)의 활동지



<그림 Ⅳ-11> P①상(2)의 활동지

2) 전체의 양을 유추 불가능

전체와 부분에 관한 과제에 대한 반응 중에는 반이라는 일상 언어가 상대적인 양을 뜻함을 이해하지 못하고 절대적인 양으로 이해한 아동이 존재하였다. 이에 해당하는 아동은 처음에 질문 받은 양의 반만큼을 계속해서 반이라고 생각해서 나오는 반응이었다. 이 아동은 반이라는 양이 상대적인

양을 뜻함으로 전체의 양에 따라서 달라짐에 대한 개념이 부족한 것으로 나타났다. 다시 말해 이에 해당하는 아동들은 양으로서의 분수에 대한 개념이 부족한 것이다.

P②하(1)T-009: 2개의 반은 얼마 만큼이니?
P②하(1)S-010: 1개요.
P②하(1)T-011: 4개의 반은 얼마 만큼이니?
P②하(1)S-012: 반은 1개에요.

라. 측정으로서의 분수

측정으로서의 분수에 관한 과제는 처음 분수가 유래되었던 것처럼 길이에 관한 과제(<표Ⅲ-2> 참고)로 아동에게 면담을 하였다. 면담을 통하여 <표 Ⅳ-4>와 같이 단위가 나누어 질 수 있다는 사고를 통해 주어진 양을 측정할 수 있는 길이를 만들어 낼 수 있는 아동과 단위를 나누지 못하여 측정할 길이를 만들어 내지 못한 아동으로 분류 할 수 있었다.

<표 Ⅳ-4> 측정으로서의 분수과제에 대한 아동 반응 분석

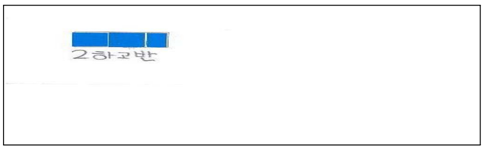
아동 반응의 범주	반응한 아동
단위 분할 가능	M①상(1), M①상(2) M②상(1), M②상(2), M②중(2) M③상(1), M③상(2), M③중(1), M③중(2), M③하(1)
단위 분할 불가능	M①중(1), M①중(2), M①하(1), M①하(2) M①중(1), M①하(1), M①하(2) M③하(2)

아동이 형성한 측정으로서의 분수 개념을 알아보기 위해서 단위 길이 여러 개를 제시하고 $2\frac{1}{2}$과 $2\frac{1}{4}$의 길이를 제시하고, 그 길이만큼 붙여보게 하는 과제를 제시하였다.

1) 단위 분할 가능

주어진 단위 길이를 분할하고, 주어진 길이를 측정할 새로운 단위를 만들어 낸 아동들의 반응은 다음과 같았으며, 활동지는 <그림 Ⅳ-12>와 같다.

M②중(2)S-008: 아니요. 이건(고민하며) 2 반 만큼이에요.
M②중(2)T-009: 2 반 만큼이라고?
M②중(2)S-010: (2칸을 가리키며)이건 2만큼이고, (반을 가리키며)이만큼은 반이니깐 2 반 만큼이에요.

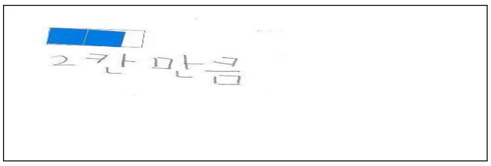


<그림 Ⅳ-12> M②중(2)의 활동지

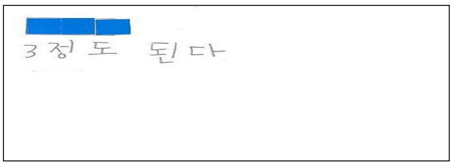
2) 단위 분할 불가능

측정에 관한 분수에 관한 과제 해결에서 단위를 분할하지 못하는 아동들도 있었다. <그림 Ⅳ-13>, <그림 Ⅳ-14>과 같이 아동들은 단순히 주어진 단위 길이 만큼만으로 길이를 측정을 하였다. 아동의 반응은 다음과 같다.

M①중(2)S-013: 2만큼 되는 것 같아요. 남는 부분은 그냥 두면 되요.
M①하(2)S-012: 마지막 칸이 좀 모자라긴 하지만 이건 3정도 되는 것 같아요.



<그림 Ⅳ-13> M①중(2)의 활동지



<그림 Ⅳ-14> M①하(2) 활동지

단위를 분할 할 수 있는 아동들은 소수에 대한 사고와 수와 수 사이에 다른 수들이 존재할 수 있음을 인식이 가능하다. 수와 수 사이의 존재하는 수의 인식은 수로서의 분수에 대한 인식의 기초가 되며, 유리수 성질에 대한 인식의 바탕이 된다.

마. 논의

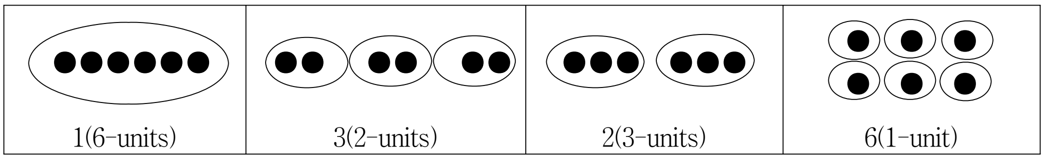
분수는 다양한 개념이 하나의 개념을 이루는 수학의 한 개념이다. 아동들은 일상생활의 경험과 사전 지식, 전수 받은 지식 등을 바탕으로 분수에 관하여 비형식적 지식을 형성하고 있었다. 그리고 주어진 과제를 다양한 전략을 사용하여 해결하였다.

1, 2학년 아동들이 형성한 분수에 대한 비형식적 지식을 조사한 연구(홍은숙, 2007)에서 원을 8등분한 2조각과 4등분한 1조각의 비교하는 과제를 통해서 동치분수에 관한 아동의 사고를 분석하였다. 그 과정에서 아동들이 양의 보존 개념의 형성 정도에 따라 다른 반응을 보임을 알아냈다. 양의 보존 개념이 형성되어 있는 아동의 경우 전체적인 크기를 파악하거나, 직·간접적인 비교를 통해 두 양이 동일하다고 반응하였다. 하지만 이 연구는 양의 보존 개념이 형성되지 않은 아동은 주어진 양이 동일하더라도 나누어진 조각의 수로 그 양을 판단하는 경향이 있다고 보고하고 있다. 이는 아동이 전체의 조각의 수에는 상관없이 부분 조각의 수로만 크기를 파악하고 있음을 보여주고 있는 것이다. 이와 같이 아동의 분수 과제에서 양의 보존 개념에 대한 아동의 사고 과정은 본 연구의 몫으로서의

분수 과제에서도 찾아 볼 수 있었다. 몫의 분수 과제를 통해서 아동이 형성한 양의 보존 개념을 비교해 볼 수 있었다. 양의 보존 개념이 형성되어 있는 아동은 주어진 원 세 개 중 하나만을 2등분하여 자신의 몫을 한 개 반이라 반응하거나, 원 세 개 모두를 2등분 하였다. 하지만 양의 보존 개념을 형성하지 못한 아동은 원 세 개를 모두 2등분 하였을 때 분할된 조각을 하나로 인식하여 자신의 몫을 세 개라고 반응하였다. 양의 보존 개념은 분수 개념의 기초가 되며 전체와 부분의 관계를 이해하는 바탕이 된다. 이 개념을 아동이 형성하지 못할 경우 이후의 분수 학습에서 오개념을 형성할 가능성이 높다. 이를 위해서 분수 학습 전 또는 학습 중에 분할 전·후의 양의 보존 개념에 대한 형식적 학습을 통해서 양의 보존에 대한 올바른 개념을 형성이 이루어져야 할 것이다.

분수에 관한 과제에서 아동들의 반응은 단위에 대한 인식의 차이가 그 바탕이 된다. 단위의 인식에 대한 아동의 사고 과정은 본 연구에서 몫으로서의 분수와 측정으로서의 분수에서 알아볼 수 있었다. 아동이 이산량(빵 3개)의 2명이서 나누는 배분 상황에서 이산량 하나씩을 전체로 인식하고, 그 단위가 3개가 있는 것(3-1units)으로 인식하고 있음을 알 수 있다.

단위에 대한 인식의 부족 또는 부재는 이후 분수의 형식적 학습에서 오개념을 일으킬 소지가 있다. 분수 학습에서는 단위를 어떻게 정하느냐에 따라서 표현되는 양은 같다 할지라도 그 수는 달라질 수 있다. 아래의 <그림 Ⅳ-17>과 같이 양이 동일하다 해도 단위를 어떻게 정하느냐에 따라 분수의 이름도 달라진다. 다시 말해 단위에 따라 분수의 이름이 다르게 초래되는 것이다.



<그림 Ⅳ-17> 단위에 따른 표현의 차이

Lamon(1999)은 분수 학습에서의 아동의 명확한 이해를 위해서 단위에 대한 학습이 더욱 강조되어야 함을 언급하며, 단위에 대한 개념 인식은 전체와 부분으로서의 분수의 학습과 동치분수, 이산량에 대한 분수 학습에 결정적인 역할을 함을 말하였다.

이에 대해서는 최영주(2005)가 분석한 분수 학습 이후 아동이 형성한 오개념에서 확인할 수 있었다. 4, 5, 6 학년 아동 중에서는 전체가 1이 아닌 데서 전체를 1로 생각하는 오개념을 가진 아동이 존재하였다. 이에 해당하는 아동들은 각각의 원을 전체로 보아 답을 한 경우이며, 이는 아동들이 전체의 단위를 제대로 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

연속량의 상황에서의 분할은 부분-전체 구조에서 전체를 1로 보는 것이 용이하므로 이산적인 분할 상황보다 이해하기 쉽기 때문에 분수 개념을 도입할 때 연속량을 사용하는 것이 바람직하다는 관점에서 제 7차 교육과정에서는 3-가 단계의 아동들에게 연속량 상황을 통한 분수를 학습하게 하고 있다. 그러나 3-가 단계에서 연속량 상황만을 학습한 아동들은 이산량 상황에서 분수 개념에 대한 오개념을 일으키게 된다.

따라서 단위에 대한 개념에 대해서 아동에게 부족하거나 존재하지 않은 부분에 대해서 직접적인 조작 활동을 바탕으로 한 형식적 학습이 필요하다.

2. 추론 능력과 학년 간 차이에 따른 비형식적 분수 개념

가. 양의 보존 개념, 전체와 부분의 관계에 대한 관계 인식

네 가지 분수에 관한 과제의 면담을 통해서 아동이 형성한 지식에서 양의 보존, 전체와 부분의 관계에 대한 인식의 차이가 있음을 관찰할 수 있었다. 양의 보존, 전체와 부분의 관계에 대한 개념 형성의 부족은 묶으로서의 분수 과제 상황에서는 원 세 개를 모두 2등분 한 다음 분할 된 낱개 모두를 하나라고 인식하는 경우로 나타났다.

<표 Ⅳ-5> 양의 보존 개념, 전체와 부분의 관계에 대한 인식 차이

학년	1						2						3					
학습능력	상		중		하		상		중		하		상		중		하	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
양의 보존 개념	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
전체와 부분간의 관계 인식	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○

<표 Ⅳ-5>에서처럼 양의 보존 개념과 전체와 부분의 관계의 개념은 학습능력에 상관없이 3학년 아동 모두가 형성하고 있음을 보여주고 있다. 2학년의 경우 학습능력이 하 수준인 아동 1명을 제외한 모두가 양의 보존 개념과 전체와 부분간의 관계의 개념을 형성하고 있으며, 1학년의 경우 학습능력이 상 수준인 아동 2명만이 형성하고 있었다. 이를 통해 학년에 따라 분수의 개념의 이해 정도가 차이가 나타남을 알 수 있었다. 또한 학년이 낮다고 해서 그 개념을 형성하지 못하는 것은 아니었다. 1학년의 경우 추론 능력이 상 수준의 아동 2명 모두가 양의 보존 개념, 전체와 부분의 관계에 대해 상위 학년의 아동처럼 사고하고 있음을 보여주고 있다.

나. 수로서의 분수와 단위의 분할에 대한 인식 차이

측정의 분수 면담 중 아동이 수로서의 분수를 어떻게 인식하는지에 대해서 간단히 면담하였다. 자연수와 자연수 사이의 수 존재 유무에 관한 과제를 <표 Ⅳ-6>과 같이 아동에게 제시하였다.

<표 Ⅳ-6> 수로서의 분수에 관한 과제

- 4와 6사이에는 5라는 숫자가 있어요. 그리고 1과 3사이에는 2가 있어요. 그러면 0과 1사이에는 어떤 숫자가 있을까요?

이 면담을 통해서 <표 Ⅳ-7>에서처럼 수로서의 분수에 대한 학년간의 개념 구성 정도의 차이가 크게 나타남을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-7> 수로서의 분수에 대한 인식 차이 분석

학년	1						2						3					
학습능력	상		중		하		상		중		하		상		중		하	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
수로서의 분수인식	○	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○

1, 2학년 중 학습 능력이 상 수준인 아동 2명을 제외한 대부분의 1, 2학년 아동들이 자연수와 자연수 사이에는 수가 존재하지 않는다는 반응을 보인 반면에 대부분의 3학년 아동들이 자연수 사이의 수의 존재에 대해서 정확히는 아니더라도 인식하고 있음을 알 수 있었다. 이는 2학년에서부터 시작되는 길이재기에 대한 학습이 이루어진 까닭으로 보인다. 자연수와 자연수 사이의 수에 대해서 아동들은 자를 예를 들어 설명을 많이 하였다. 그 까닭은 2학년부터 자를 이용하여 길이재기에 대한 학습이 이뤄지기 때문이다. 이를 통해 아동들의 분수에 대한 비형식적 지식이 이전의 학습 경험이 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

M③중(1)S-016: 0과 1을 잘게 나누면 0.3 이나 0.4 가 있어요. 자에 보면 1과 2 사이가 나눠져 있어요. 그걸 보면 알 수 있어요.
M③상(2)S-010: 네. 이 부분을 (8과 9 사이) 더 잘게 나누면 매우 많은 수를 만들어 낼 수 있어요.

또한 면담 중 <표 Ⅳ-8>과 같이 단위 분할에 대한 사고의 차이를 알아 볼 수 있었다.

<표 Ⅳ-8> 단위 분할에 대한 인식 차이 분석

학년	1						2						3					
학습능력	상		중		하		상		중		하		상		중		하	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
단위의 분할	○	○	×	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○	○	○	×

단위 분할에 대한 인식의 차이는 측정으로서의 분수에 관한 과제 상황의 면담에서 분석할 수 있었다. 학습 능력이 상인 3개 학년 아동들 모두와 3학년에서 학습 능력 수준이 하인 아동 1명을 제외하고는 단위를 분할할 수 있는 대상으로 보았다. 이는 측정으로서의 분수에 대해서 단위를 분할 할 수 없음에 대해 분할 할 수 있음으로 개념이 발달한다는 점을 알 수 있었다.

단위 분할의 개념에 대해서는 3학년 아동들의 경우 학습 능력이 하 수준의 아동 1명을 제외하고는 모두는 단위를 분할 할 수 있는 대상으로 보고 있다. 이를 통해서 일상생활의 다양한 경험과 학

습 경험의 축적을 통해서 단위 분할에 대한 개념이 발달할 수 있음을 알 수 있다.

또한 1학년의 학습 수준이 상인 아동 2명 모두 역시 단위를 분할 할 수 있는 대상으로 보았다. 이는 학습 수준이 높은 아동들은 상위 학년의 아동들과 같은 개념을 형성할 수 있음과 단순히 학년의 낮음이 수학적 개념 부족으로 연결되는 것은 아님을 의미한다.

다. 곱셈적 사고의 차이

비로서의 분수 과제 상황에서 <표 Ⅳ-9>와 같이 아동의 문제 해결 유형이 다름을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-9> 곱셈적 사고의 차이

학년	1						2						3					
학습 능력	상		중		하		상		중		하		상		중		하	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
곱셈적 사고	○	○	○	×	×	×	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	×	○

비로서의 분수 과제 상황에서 동수누가와 곱셈구구로 과제를 해결한 아동과 그렇지 못한 아동으로 나눌 수 있었다. 1학년에서는 학습 능력이 상, 중인 아동과 2학년에서는 학습 능력이 상, 중인 아동, 3학년에서는 학습 능력이 하 인 아동을 제외한 모든 아동이 비로서의 분수 과제에서 곱셈적 사고를 이용하여 과제를 해결하였다. 곱셈적인 사고 안에서도 학습 능력이 우수한 아동은 곱셈 구구를 직접 사용하여 식을 구성할 수 있었으며 학습 능력이 중인 아동들은 동수누가를 이용하여 과제를 해결하였다. 이를 통해서 아동의 문제 해결 전략이 동수누가를 통해서 곱셈구구로 발달됨을 알 수 있었다.

비로서의 몫의 과제 상황에서 면담 중 학습 수준이 상인 1학년 아동이 2학년 나 단계에서 학습이 이루어지는 곱셈 구구를 이용하여 과제를 해결하는 모습이 관찰되었다. 이 아동은 평소에 선행학습을 하지 않는다고 사전 면담에서 응답하였기에 곱셈구구에 대해서 어떻게 알게 되었는지에 대해서 면담하였다.

R①상(1)T-007 : 곱하기는 어떻게 알게 되었니?
R①상(1)S-007 : 곱하기는 수학 만화책을 보고 알았어요. 수학 만화책은 참 많아요. 그리고 잘 모르는 것은 엄마에게 물어보면 가르쳐 주세요.

위의 면담 과정에서 아동의 비형식적 지식은 자발적으로 이루어지는 일상생활 속의 독서와 어른에게서 전수되는 지식을 통해서 구성 될 수 있음을 알 수 있었다.

학습 능력이 낮은 아동들의 경우에는 과제 이해 정도가 다른 아동들에 비해서 부족함과 함께 곱셈적 사고가 여전히 형성되지 못하고 있음이 관찰되었다.

3학년 아동의 경우 학습 수준이 하인 아동 1명을 제외한 모두가 곱셈적인 사고를 통해서 과제를 해결하였다. 하지만 전 단계에 해당하는 2학년 나 단계에서 곱셈구구를 학습한 상황임에 불구하고 아동 모두가 곱셈구구를 통해서 과제를 해결한 것은 아니었다. 이를 통해서 아동들에게 형식적인 학습이 이루어졌다 하더라도 그것이 모두 아동들에게 의미 있는 지식 구성으로 이어지는 것은 아니라는 것을 알 수 있었다.

라. 논의

아동들은 다양한 분수 개념에 대해서 학습 능력과 학년에 상관없이 어느 정도의 비형식적 지식을 형성하고 있었다. 학년에 따라서는 학년이 높아질수록 과제를 좀 더 정확한 수학 개념을 통해서 해결하였으며, 수학 개념이 좀 더 많이 정교하게 형성되어 있었음을 알 수 있었다. 이는 과제 해결에 대해서 이전의 학습한 경험이 도움이 되었음과 일상생활의 경험의 누적으로 인하여 좀 더 많은 지식을 형성하고 그 지식을 구체화 시켰음을 알 수 있었다. 하지만 이전에 학습한 수학 개념이 실생활 과제로 주어졌을 때, 그것을 학습한 아동 모두가 이용하는 것은 아니었다. 이를 통해 수학 개념이 형식적 학습을 통해 학습이 이루어졌다 할지라도 그것이 반드시 아동이 완벽하게 이해한 것은 아님을 알 수 있다.

또한 이전에 학습한 절차가 이후의 분수 개념 학습에 방해의 원인이 되기도 한다. Mack(1987)은 분수의 덧셈 학습에서 아동들이 앞서 학습한 덧셈을 이용하여 분모끼리, 분자끼리 더하여 분수의 덧셈을 하는 모습을 관찰하였다. 또한 이 연구에서는 Leinhardt가 분수에 대한 비형식적 지식은 비수학적인 형식에서만 존재하며, 과제가 수학적으로 보이지 않을 때에만 가능하다는 주장에 대해서 반대하며 아동들의 비형식적 수학이 수학적 형식에서도 충분히 나타날 수 있다고 주장하였다. 실제로 분모가 1인 분수의 크기 비교 면담 과정에서 아동들은 피자 조각을 통해서 문제를 해결하는 모습을 보여주었다. 이와 같이 아동에게 형성된 모든 비형식적 지식은 그것이 옳든 옳지 않든지 다음의 지식 구성에 미치게 된다.

학습 능력에 따라서도 분수 개념에 대한 지식 구성의 차이가 존재하였다. 학습 능력이 상인 아동들은 학년에 상관없이 분수 학습의 토대가 되는 양의 보존 개념, 전체와 부분간의 관계에 대한 개념, 단위에 대한 개념, 곱셈 개념이 어느 정도 형성되어 있었다. 학습 능력이 상인 아동들은 상위 학년의 아동과 같은 개념을 형성할 수 있었다. 이를 통해 학습 능력이 높은 아동일수록 일상생활의 다양한 경험을 통해 수학 개념을 형성해 나가고 있음을 알 수 있다. 하지만 학습 능력이 하인 아동들은 분수 개념의 바탕이 되는 양의 보존 개념, 단위의 개념, 곱셈 개념 등에 대한 지식의 부재와 부족을 관찰할 수 있었다. 이는 이후의 형식적 분수 학습에서 아동들이 분수에 대해서 오개념을 형성할 수 있는 원인이 된다.

모든 아동들은 일상생활의 다양한 경험과 이전의 학습 경험들을 통하여 다양한 비형식적 지식을 형성하고 있었다. 형식적인 분수 학습 이전의 아동들에게 분수가 포함된 과제 상황을 제시하였을 때

아동들은 자신의 비형식적 지식을 이용하여 과제를 해결하고자 하였다. 그것이 옳든, 옳지 않든지 아동의 이후 분수 개념 형성에 영향을 미칠 것이다. 따라서 아동에게 의미 있는 분수 개념 학습을 위해서 그 바탕은 아동이 형성한 비형식적 지식이 되어야 할 것이다.

Ⅴ. 결 론

분수 개념 마다 아동들은 저마다의 비형식적 지식을 형성하고 있었다. 몫에 관한 분수에 대해서는 이산량에 대한 분배상황에서 2등분과 분할 전후에 관한 양의 보존 개념과 함께 부분과 전체의 관계에 대한 사고의 차이에 대해서 알아 볼 수 있었다. 비로서의 분수에 대해서는 아동의 형식적인 학습 이전의 곱셈적 사고를 이용하여 과제 상황을 해결하는 아동의 모습을 찾을 수 있었다. 곱셈적인 사고에서도 곱셈구구를 이용하는 경우와 동수누가를 이용한 경우로 나눌 수 있었다. 곱셈과 나눗셈이 바탕이 된 비로서의 분수에 관한 과제 상황에서도 단순히 덧셈과 뺄셈의 규칙성만을 의존하여 과제를 해결하는 아동도 존재하였다. 전체와 부분의 분수에서는 이산량의 분할 전의 양을 유추하는 과제가 주어졌을 때 전체 양을 알기 위해서 가역적인 사고를 통해서 처음의 양을 유추하는 아동과 그렇지 못한 아동이 존재하였다. 측정으로서의 분수에 대해서는 단위의 분할이 가능한 아동과 불가능한 아동이 존재하였으며 그에 대한 사고과정을 알아볼 수 있었다.

또한 분수 개념에 관해 학년간의 차이를 어느 정도 보여주었다. 학년간의 차이에서는 과제 해결에서 이전에 학습한 형식적 학습이 비형식적 분수 개념에 어느 정도 영향을 주고 있음을 알 수 있었다. 주어진 과제 상황에서 학년이 높을수록 사용하는 전략이 더욱 다양하였다. 특히 3학년의 경우 이전 학년에서 자를 이용한 길이 재기 학습을 통해서 수로서의 분수에 대한 개념을 어느 정도 형성하고 있음을 보여주었다. 하지만 이전의 학습 모두가 아동에게 의미 있는 지식 구성으로 이루어지는 것은 아니었다. 3학년은 곱셈구구를 학습한 상황이었으므로, 과제 해결 상황에서 곱셈적 사고를 적극 이용하는 것을 보여주었다. 하지만 이미 학습한 상황임에 불구하고 모든 아동들이 곱셈구구로 과제를 해결하는 것은 아닌 것으로 보아 형식적 학습이 아동 모두에게 의미 있는 지식 구성이 바로 이루어지는 것은 아님을 알 수 있었다.

학습 능력에 대해서도 형성한 분수 개념에서 차이를 보였다. 1학년과 2학년에서 학습 능력이 높을수록 양의 보존 개념, 전체와 부분간의 관계 인식, 단위의 분할, 가역적 사고의 가능으로 인해서 분수 개념에 대해서 지식을 형성하고 있음을 보여주었다. 하지만 1학년과 2학년에서 학습 능력이 하수준의 아동들은 전반적으로 분수 개념에 대해서 옳지 않은 개념을 형성하고 있거나 개념의 부재를 보여주었다. 이는 이후의 분수 학습에서 오개념을 형성할 여지가 있으므로 형식적 학습을 통해서 의미 있는 지식 구성으로 이어져야 할 것이며 그 바탕은 아동의 비형식적 지식이 되어야 할 것이다.

아동들은 일상생활에서 다양한 문제 해결 경험을 통해서 분수에 대한 비형식적 지식을 어느 정도 형성하고 있으며 아동들에게 분수가 포함된 과제 상황을 제시하였을 때 아동들이 자신이 형성한 비

형식적 지식을 이용하여 문제 해결을 하고자 하였다. 따라서 아동에게 의미 있는 분수 개념 지식 형성을 위해서 비형식적 지식을 분수 개념 지도에 활용하여야 한다.

참고 문헌

김진호 (2002). 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. 학교수학, 4(4), pp. 555-563.

김진호 (2008). 학습자 중심 수업에 대한 오해와 진실. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 11(2), pp.81-94.

배종수 (1999). 초등수학교육 내용지도법. 서울: 경문사.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방법 개발. 한국교원대학교 대학원 미간행 박사학위논문.

신준식 (1996). 실제적 접근 방법에 의한 분수 교수 학습에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 미간행 박사학위논문.

이진영 (1998). 초등학교 아동의 나눗셈 전략 분석. 이화여자대학교 대학원 미간행 석사학위논문.

최영주 (2005). 초등학교 학생들의 분수 오개념 분석 및 분수 개념 형성 지도방안. 전주교육대학교 교육대학원 미간행 석사학위논문.

홍은숙 (2007). 분수개념에 관한 비형식적 지식 분석. 서울교육대학교 교육대학원 미간행 석사학위논문.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. NY: Teachers College Press.

Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde(Eds.), *International handbook of mathematical education* (pp.511-564). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983) Rational-number concepts. In R. Lesh, & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp.91-126). FL: Academic Press Inc.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R,. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15(5), pp.323-341.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), pp.32-42.

Carpenter, T. P. (1986). Concepts knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implication from research on the initial learning of arithmetic. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and* *procedural knowledge: The case of mathematics*(pp.113-132). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1991). Research and cognitively guided instruction. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon(Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics*(pp.2-17). NY: State of New York University Press.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp.7-44). NY: Academic Press Inc.

Davydov, V. V., & Tsvetkovich, Z. H. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problem in Mathematics,* 13(1), pp.13-64.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conceptions of rules and answer in PIP mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), pp.7-25.

Freudenthal, H. (1983). *A didactical phenomenology of mathematics.* Netherlands: E. Reidel.

Ginsburg, H. P. (1982). *Children's arithmetic.* TX: Pro-Ed.

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedure knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist*, 12(3), 262-283.

Greeno, J. G. (1986). Collaborative teaching and making sense of symbols: Comment on Lampert's "Knowing, doing, and teaching multiplication." *Cognition and Instruction*, 3(4), 343-347.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws(Eds), *Handbook of research on mathematics and learning*(pp.65-97). NY: Macmilan.

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Learning and the development of cognition.* MA: Harvard University Press.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors.* A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. England: NFER-NELSON

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational num-bers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*(pp. 101-144). The Georgia Center of Learning and Teaching mathematics and Department of Mathematics Education.

Kim, J. (2002). Development of instructional Units connecting informal and formal mathematical knowledge of equivalency and addition. Unpublished Doctoral Dissertation, Columbia University.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and rations for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leinhardt G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist*, 23(2), pp.119-144.

Mack, N. K. (1987). *Learning fractions with understanding: Eight clinical studies*. Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(1), pp.16-32.

Marshall, S. P. (1993). *Assessment of rational number understanding: A schema-based approach*. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*(pp.261-288). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Saxe, G. B. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Psychologist,* 17(6), pp.14-21.

Skemp. R. R. (2000). <u>수학 학습 심리학</u> (황우형 역.). 서울: 사이언스북스. (원문은 1987년에 출판됨)

Analysis of Informal Fraction Concepts First to Third Graders Have Already Established

Oh, Yu Kyeong

Ulsan Chungok Elementary School

E-mail : oyk1217@naver.com

Kim, Jinho

Department of Mathematics Education, Daegu National University of Education

E-mail : jk478kim@dnue.ac.kr

Based on the thinking that people can understand more clearly when the problem is related with their prior knowledge, the Purpose of this study was to analysis students' informal knowledge, which is constructed through their mathematical experience in the context of real-world situations.

According to this purpose, the following research questions were.

1) What is the characteristics of students' informal knowledge about fraction before formal fraction instruction in school?

2) What is the difference of informal knowledge of fraction according to reasoning ability and grade.

To investigate these questions, 18 children of first, second and third grade(6 children per each grade) in C elementary school were selected. Among the various concept of fraction, part-whole fraction, quotient fraction, ratio fraction and measure fraction were selected for the interview. I recorded the interview on digital camera, drew up a protocol about interview contents, and analyzed and discussed them after numbering and comment.

The conclusions are as follows:

First, students already constructed informal knowledge before they learned formal knowledge about fraction. Among students' informal knowledge they knew correct concepts based on formal knowledge, but they also have ideas that would lead to misconceptions.

Second, the informal knowledge constructed by children were different according to grade. This is because the informal knowledge is influenced by various experience on learning and everyday life. And the students having higher reasoning ability represented higher levels of knowledge.

Third, because children are using informal knowledge from everyday life to learn formal knowledge, we should use these informal knowledge to instruct more efficiently.

* ZDM classification : D12

* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97C99

* Key Words : Informal Knowledge, Fraction, Structured Interview, Learning competence