

# 독립좌표연성법을 이용한 정사각형 구멍을 갖는 단순지지 원판의 자유진동해석

## Free Vibration Analysis of a Simply-supported Circular Plate with a Concentric Square Hole by the Independent Coordinate Coupling Method

허 석† · 곽 문 규\*

Seok Heo and Moon Kyu Kwak

(2008년 11월 26일 접수 ; 2009년 1월 12일 심사완료)

**Key Words** : Independent Coordinate Coupling Method(독립좌표연성법), Circular Plate(원판), Square Hole(정사각 구멍)

### ABSTRACT

This paper presents the free vibration analysis of a circular plate with a concentric square hole. The boundary condition is the edge of the square hole is free and the outer circular plate is simply supported. Due to the geometric abnormality, this analysis does not permit an exact solution. The present problem deals with the numerical calculation of the natural frequencies and mode shapes of vibration of the structure by independent coordinate coupling method(ICCM). The numerical results show the efficacy of the ICCM and changes in natural frequencies and modes due to the square hole size.

### 1. 서 론

균일한 직사각형 판과 원형 판은 기계구조물로서 다양한 산업 현장에서 사용되고 있다. 이러한 형상 이외에 삼각형, 이등변사변형, 타원형 등 여러 형상들에 대한 자유진동문제에 관한 연구들이 보고되고 있으며, Leissa<sup>(1)</sup>의 보고서에 잘 정리되어있다. 기존의 연구들을 보면 직사각형 구멍을 갖는 직사각형 판<sup>(2,3)</sup>, 원형 구멍을 갖는 원형 판<sup>(4,5)</sup>에 관한 고유진동 문제의 해석은 유사한 형태로 인하여 Rayleigh-Ritz방법을 이용하면 간단히 해석할 수 있다. 반대로 원형 구멍을 갖는 직사각형 판, 정사각형 구멍을 갖는 원형 판의 연구들도 보고되고 있다. 그러나 구멍

의 기하학적 형태가 판의 기하학적 형태와 일치하지 않기 때문에 고유진동문제의 해석이 용이하지 않다.

최근에 Kwak 등<sup>(6)</sup>은 직사각형 또는 원형구멍을 갖는 직사각형판의 자유진동해석을 위한 독립좌표연성법(independent coordinate coupling method)을 개발하였다. 이 방법은 전체와 국부영역에 대한 독립된 좌표를 사용하며, 두 좌표계 사이의 관계를 이용하여 변환하는 방법이다. 독립좌표연성법의 장점은 구멍의 영향을 원형 평판의 좌표계에 근거하여 계산하는 것이 아니라 구멍의 에너지를 구멍에 적합한 좌표계로 계산하고 구멍 영역내의 두 좌표간의 적합조건을 적용하여 구멍으로 인한 에너지 차감분을 산출해내는 방식이다. Heo 등<sup>(7,8)</sup>의 연구에서는, 경계조건이 단순지지-자유, 고정-자유, 자유-자유인 원판 또는 편심된 원형 구멍을 갖는 원형 판에 대한 엄밀 해를 Mathematica를 이용하여 구하였으며, 독립좌표연성법의 계산결과가 합당한지 증명하기 위하여, 두 결과를 비교하였다.

† 교신저자; 정회원, 건국대학교 인공근육연구센터  
E-mail : heoseok@konkuk.ac.kr  
Tel : (02)3436-7091, Fax : (02)444-7091

\* 정회원, 동국대학교 기계공학과

이 논문에서는 중앙에 정사각형의 구멍을 갖는 원형 판의 고유진동문제에 관한 연구는 매우 흥미롭지만 아쉽게도 보고된 연구들은 거의 없다. 현재는 Avalos 등<sup>(9)</sup>이 정사각형 구멍을 갖는 단순지지 또는 고정된 원형판의 고유진동문제를 Rayleigh-Ritz방법과 유한요소방법을 이용하여 해석하고 보고한 것이 전부이다.

이 연구에서는 중앙에 사각형의 구멍을 갖는 단순지지 원형판의 고유진동문제를 Rayleigh-Ritz방법을 이용하여 해석하는데 있어 두 개의 독립된 좌표를 이용하는 독립좌표연성법을 사용하였다. 먼저, 정사각형 구멍의 크기변화에 따른 원형 판의 고유진동수와 고유모드 변화를 조사한다. 구하여진 수치해석 결과는 유한요소코드인 ANSYS<sup>(10)</sup>를 이용하여 비교 및 검증하기로 한다.

### 2. 원형 평판의 자유진동문제

Fig. 1에서와 같이, 반지름이  $R$ , 두께  $h$ 인 균일한 원형 평판의 운동에너지와 탄성에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \dot{w}^2 r dr d\theta \quad (1a)$$

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] \right] r dr d\theta \quad (1b)$$

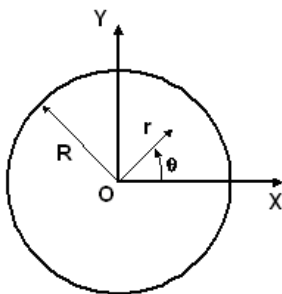


Fig. 1 Schematic diagram of the circular plate

여기서,  $\rho$ 는 질량 밀도,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $E$ 는 영의 계수,  $\nu$ 는 푸아송 비,  $w$ 는 변위,  $\dot{w}$ 는 속도를 나타낸다.

원형 평판의 경우 고유진동수와 고유모드에 대한 엄밀해가 존재하며 따라서 변위는 고유함수와 일반좌표계의 조합으로 표현될 수 있다.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(r, \theta) q_i(t) = \Phi(r, \theta) q(t) \quad (2)$$

여기서,  $\Phi_i(r, \theta)$ 는 균일한 원형 평판의 허용함수를 나타내고,  $q(t)$ 는 일반좌표계 벡터를 나타낸다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하고 고유함수의 직교성을 이용하면, 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}, \quad V = \frac{1}{2} q^T K q \quad (3a-d)$$

$$M = \rho h \pi R^2 I, \quad K = \frac{\pi D}{R^2} \Lambda$$

여기서,  $I$ 는 단위행렬,  $\Lambda$ 는 대각선에 고유치 값의 4제곱,  $\lambda_i^4 (i=1, 2, \dots, n)$ 가 배치된  $n \times n$  행렬이며,  $\lambda_i^4 = \omega_i^2 \rho h R^4 / D$ ,  $\omega_i$ 는  $i$ 번째 고유진동수이다.

원형 평판의 고유함수를 각 경계조건에 대해 정리하면 다음과 같다. 단순지지의 경우는 고유함수와 행렬  $\Lambda$ 가 다음과 같이 표시된다.

$$\Phi_i(r, \theta) = A_i \left[ J_n \left( \lambda_i \frac{r}{R} \right) + C_i I_n \left( \lambda_i \frac{r}{R} \right) \right] f_i(\theta), \quad i=1, 2, \dots \quad (4a, b)$$

$$\Lambda = \text{diag} \left[ \left[ \lambda_1^4 \quad \lambda_2^4 \quad \lambda_3^4 \quad \dots \quad \lambda_n^4 \right] \right]$$

여기서,  $J_n, I_n$ 는 제 1종 베셀함수와  $n$ 차의 수정된 베셀함수를 나타낸다.  $A_i, C_i, f_i(\theta)$ 는 경계조건에 대한 고유함수의 상수들이며 참고문헌 (7)에 나타난 것과 같다.

### 3. 정사각형 평판에 대한 Rayleigh-Ritz방법의 적용

Fig. 2에서와 같이,  $a_c$ 는  $x_c$ 축 방향의 길이,  $b_c$ 는

$y_c$  축 방향의 길이를 나타낸다. 이와 같은 정사각형 판에 대해 운동에너지와 탄성에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$T_c = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{a_c} \int_0^{b_c} \dot{w}_c^2 dx_c dy_c \quad (5)$$

$$V_c = \frac{1}{2} D \int_0^{a_c} \int_0^{b_c} \left[ \left( \frac{\partial^2 w_c}{\partial x_c^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_c}{\partial y_c^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w_c}{\partial x_c^2} \frac{\partial^2 w_c}{\partial y_c^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w_c}{\partial x_c \partial y_c} \right)^2 \right] dx_c dy_c \quad (6)$$

여기서  $w_c = w_c(x_c, y_c, t)$ 는 판의 변위를 나타내며  $\rho$ 는 평판의 질량밀도,  $h$ 는 평판의 두께,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $E$ 는 영의 계수,  $\nu$ 는 푸아송 비를 나타낸다. 위 식에 무차원변수,  $\xi_c = x_c/a_c$ ,  $\eta_c = y_c/b_c$ 를 도입하고 탄성변위에 대해 다음과 같이 표현해 보자.

$$w_c(\xi_c, \eta_c, t) = \sum_{i=1}^{n_c} \Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c) q_{ci}(t) = \Phi_c(\xi_c, \eta_c) q_c(t) \quad (7)$$

여기서  $\Phi_c(\xi_c, \eta_c) = [\Phi_{c1} \Phi_{c2} \dots \Phi_{cm}]$ 는 평판의 탄성 변위에 대한  $1 \times m$ 의 이차원 허용함수 행렬을 나타내며,  $q_c(t) = [q_{c1} q_{c2} \dots q_{cm}]^T$ 는  $m \times 1$ 의 일반좌표계 벡터를 나타낸다. 여기서  $m$ 은 이차원 허용함수의 총수이다. 식(7)을 식(5)와 (6)에 대입하면 운동에너지와 탄성에너지에 대해 다음과 같은 식이 유도된다.

$$T_c = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T M_c \dot{q}_c, \quad M_c = \rho h a_c b_c \bar{M}_c \quad (8a,b)$$

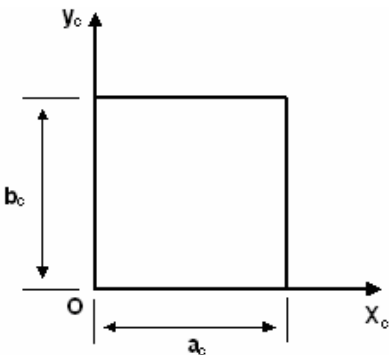


Fig. 2 Schematic diagram of the square plate

$$V_c = \frac{1}{2} q_c^T K_c q_c, \quad K_c = \frac{D b_c}{a_c^3} \bar{K}_c \quad (9a,b)$$

여기서

$$\bar{M}_c = \int_0^1 \int_0^1 \Phi_c^T \Phi_c d\xi_c d\eta_c \quad (10)$$

$$\bar{K}_c = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c^2} + \alpha_c^4 \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \eta_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \eta_c^2} + \nu \alpha_c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \eta_c^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \eta_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c^2} \right) + 2(1-\nu) \alpha_c^2 \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c \partial \eta_c} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c \partial \eta_c} \right] d\xi_c d\eta_c \quad (11)$$

$\bar{M}_c, \bar{K}_c$ 는 무차원화된 질량, 강성 행렬이며  $\alpha_c = a_c/b_c$ 이다. 라그랑지 방정식에 식(8)과 (9)를 대입하면 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\rho h a_c b_c \bar{M}_c \ddot{q} + \frac{D b_c}{a_c^3} \bar{K}_c q = 0 \quad (12)$$

그리고 자유진동의 경우에 대해  $q = A e^{i\omega t}$ 를 대입하면 고유치 문제는 다음과 같이 무차원화된 식으로 귀결된다.

$$(\bar{K} - \bar{\omega}^2 \bar{M}) A = 0 \quad (13)$$

여기서

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho h a_c^4}{D} \omega^2 \quad (14)$$

고유치 문제, 식(13)을 풀기 위해서는 먼저 질량과 강성행렬을 유도하여야 한다. 이를 위해 이차원 허용함수를 변수 분리하는 방법을 적용해 각 방향으로 분리해 보자. 이 경우 식(7)의 허용함수 요소는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c) = \phi_{ci}(\xi_c) \psi_{ci}(\eta_c), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

식(15)를 식(10)과 (11)에 대입하면 무차원 질량, 강성 행렬이 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{M}_{cij} = x_{cij} y_{cij} \quad (16)$$

$$\bar{K}_{cij} = \hat{x}_{cij} y_{cij} + \alpha_c^4 x_{cij} \hat{y}_{cij} + \alpha_c^2 \nu (\bar{x}_{cij} \bar{y}_{cij} + \tilde{x}_{cij} \tilde{y}_{cij}) + \alpha_c^2 (1-\nu) \bar{x}_{cij} \bar{y}_{cij} \quad i, j=1, 2, \dots, m \quad (17)$$

$$y_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \\ \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma & \Gamma & \dots & \Gamma \end{bmatrix} \quad (21b)$$

여기서

$$x_{cij} = \int_0^1 \phi_{ci} \phi_{cj} d\xi_c, \quad \bar{x}_{cij} = \int_0^1 \phi'_{ci} \phi'_{cj} d\xi_c \quad (18a,b)$$

$$\hat{x}_{cij} = \int_0^1 \phi_{ci}'' \phi_{cj}'' d\xi_c, \quad \tilde{x}_{cij} = \int_0^1 \phi_{ci} \phi_{cj}'' d\xi_c \quad (18c,d)$$

$$y_{cij} = \int_0^1 \psi_{ci} \psi_{cj} d\eta_c, \quad \bar{y}_{cij} = \int_0^1 \psi'_{ci} \psi'_{cj} d\eta_c \quad (18e,f)$$

$$\hat{y}_{cij} = \int_0^1 \psi_{ci}'' \psi_{cj}'' d\eta_c, \quad \tilde{y}_{cij} = \int_0^1 \psi_{ci} \psi_{cj}'' d\eta_c \quad (18g,h)$$

만일  $x_c, y_c$  축 방향으로  $n_c$  개의 허용함수를 도입한다면 평판의 변위를 표현하는데 총  $n_c^2$ 의 허용함수가 사용된다. 즉,  $m = n_c^2$ 의 관계식이 성립한다.  $x_c, y_c$  축 방향의 허용함수를 각각  $\chi_i (i=1, 2, \dots, n)$  와  $\gamma_i (i=1, 2, \dots, n)$  라고 한다면 식 (15)에서 도입한 허용함수와의 관계가 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_{ck} = \begin{cases} \chi_1 & 1 \leq k \leq n \\ \chi_2 & n+1 \leq k \leq 2n \\ \chi_3 & 2n+1 \leq k \leq 3n \\ \vdots & \\ \chi_n & (n-1)n+1 \leq k \leq n^2 \end{cases} \quad (19)$$

$$\psi_{ck} = \begin{cases} \gamma_k & 1 \leq k \leq n \\ \gamma_{k-n} & n+1 \leq k \leq 2n \\ \gamma_{k-2n} & 2n+1 \leq k \leq 3n \\ \vdots & \\ \gamma_{k-(n-1)n} & (n-1)n+1 \leq k \leq n^2 \end{cases} \quad (20)$$

따라서 질량행렬과 강성행렬의 계산에 필요한 적분값, 식 (18)이 최종적으로 다음과 같은 형태를 가지게 된다. 여기서는  $x_c, y_c$ 에 대한 표현식만 제공한다.  $\bar{x}_c, \hat{x}_c, \tilde{x}_c, \bar{y}_c, \hat{y}_c, \tilde{y}_c$ 의 표현식도 이와 유사하다.

$$x_c = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \bar{I} & \Sigma_{12} \bar{I} & \dots & \Sigma_{1n} \bar{I} \\ \Sigma_{21} \bar{I} & \Sigma_{22} \bar{I} & \dots & \Sigma_{2n} \bar{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{n1} \bar{I} & \Sigma_{n2} \bar{I} & \dots & \Sigma_{nn} \bar{I} \end{bmatrix} \quad (21a)$$

여기서  $\bar{I}$ 는 모든 요소가 1인  $n_c \times n_c$  행렬이며

$$\Sigma_{ij} = \int_0^1 \chi_i \chi_j d\xi_c, \quad \Gamma_{ij} = \int_0^1 \gamma_i \gamma_j d\eta_c \quad (22a,b)$$

$i, j=1, 2, \dots, n$  이다. 또한 다른 행렬 요소 계산을 위한 식은 다음과 같다.

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \int_0^1 \chi_i' \chi_j' d\xi_c, \quad \hat{\Sigma}_{ij} = \int_0^1 \chi_i'' \chi_j'' d\xi_c \quad (22c,d)$$

$$\tilde{\Sigma}_{ij} = \int_0^1 \chi_i \chi_j'' d\xi_c, \quad \bar{\Gamma}_{ij} = \int_0^1 \gamma_i' \gamma_j' d\eta_c \quad (22e,f)$$

$$\hat{\Gamma}_{ij} = \int_0^1 \gamma_i'' \gamma_j'' d\eta_c, \quad \tilde{\Gamma}_{ij} = \int_0^1 \gamma_i \gamma_j'' d\eta_c \quad (22g,h)$$

모든 변이 자유인 경우에 대해서 각 방향으로 다음과 같은 자유-자유 보의 고유벡터를 허용함수로 고려해 보자.

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = \sqrt{12} \left( \xi_c - \frac{1}{2} \right) \quad (23a,b)$$

$$\chi_{i+2} = \cosh \lambda_{ci} \xi_c + \cos \lambda_{ci} \xi_c - \sigma_{ci} (\sinh \lambda_{ci} \xi_c + \sin \lambda_{ci} \xi_c) \quad (23c)$$

여기서  $i = 1, 2, \dots, n-2$  이고

$\lambda_{ci} = 4.730, 7.853, 10.996, 14.137, \dots$  이며  $\sigma_{ci} = (\cosh \lambda_{ci} - \cos \lambda_{ci}) / (\sinh \lambda_{ci} - \sin \lambda_{ci})$  이다. 그리고 첫 번째와 두 번째 모드는 강제 운동을 나타낸다. 적분을 수행하면 모든 변이 자유인 정사각형 평판의 고유진동수와 고유모드를 구할 수 있다.

#### 4. 독립좌표연성법의 적용

Fig. 3과 같이 정사각형 구멍을 갖는 원형 판을 고려해 보자. 정사각형 구멍을 가지는 경우 원형 판의 전체 좌표계를 사용하여 정사각형 구멍에 해당하는 에너지를 표현하기는 쉽지 않다. 또한 정사각형

구멍에 대하여 수치적분을 수행하는 것도 쉬운 일이 아니다. 그래서 독립좌표연성법을 사용하여 이러한 문제들을 피하고자 한다. 독립좌표연성법은 각각 다른 일반 좌표계로 원형 판과 정사각형 구멍에 대한 에너지 식을 유도하고 구멍내에서 변위가 같아야 한다는 조건을 사용해 국부좌표계를 전체좌표계로 변환하는 것이다.

정사각형 구멍을 갖는 원형 판의 운동에너지와 탄성에너지는 원형 판의 에너지에서 정사각형 판의 에너지를 차감해서 얻어진다.

$$T_{total} = T - T_c, \quad V_{total} = V - V_c \quad (24a,b)$$

식 (3)과 식 (8), (9)를 식 (24)에 대입하여 전체 운동에너지와 탄성에너지를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{total} &= T - T_c \\ &= \frac{1}{2} \rho h \pi R^2 \dot{q}^T \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}_c^T (\rho h a_c b_c \bar{M}_c) \dot{q}_c \\ &= \frac{1}{2} \rho h \pi R^2 (\dot{q}^T \dot{q} - \frac{a_c b_c}{\pi R^2} \dot{q}_c^T \bar{M}_c \dot{q}_c) \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} V_{total} &= V - V_c \\ &= \frac{1}{2} D \frac{\pi}{R^2} q^T \Lambda q - \frac{1}{2} q_c^T (D \frac{b_c}{a_c^3} \bar{K}_c) q_c \\ &= \frac{1}{2} D \frac{\pi}{R^2} (q^T \Lambda q - \frac{R^2 b_c}{\pi a_c^3} q_c^T \bar{K}_c q_c) \end{aligned} \quad (25b)$$

구멍 영역내에서의 변위 일치 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$w_c(x_c, y_c) = w(r, \theta) \quad (26)$$

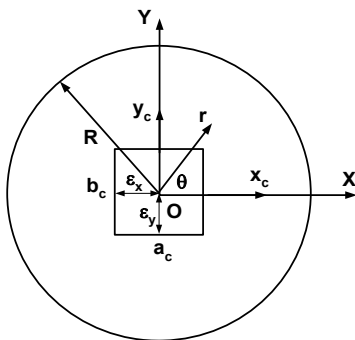


Fig. 3 The simply-supported circular plate with a free edge square hole with local axis

식 (2), (7) 그리고 (26)을 고려하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n_c} \Phi_{ej}(\xi_c, \eta_c) q_{ej}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(r, \theta) q_j(t) \quad (27)$$

식 (27)에  $\Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c)$  를 곱하고 적분을 수행하면 다음식이 유도된다.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n_c} \int_0^1 \int_0^1 \Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c) \Phi_{ej}(\xi_c, \eta_c) d\xi_c d\eta_c q_{ej}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c) \Phi_j(r, \theta) d\xi_c d\eta_c q_j(t) \end{aligned} \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_c$$

$\Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c)$  의 직교성을 이용하면 식 (28)은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} q_{ci}(t) &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \Phi_{ci}(\xi_c, \eta_c) \Phi_j(r, \theta) d\xi_c d\eta_c q_j(t) \\ &= \sum_{k=1}^n (T_c)_{ik} q_{jk}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_c \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$q_c = T_c q \quad (30)$$

여기서  $T_c$  는  $n_c \times n$  행렬이다. 정사각형 구멍영역에 대한 적분을 수행하기 위해서는 국부좌표계와 전체좌표계의 관계식이 필요하다. 그 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \bar{r} = \beta \sqrt{(\bar{\epsilon}_x + \xi_c)^2 + \frac{1}{\alpha_c^2} (\bar{\epsilon}_y + \eta_c)^2} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\bar{\epsilon}_y + \eta_c}{\alpha_c (\bar{\epsilon}_x + \xi_c)} \right) \end{cases} \quad (31a,b)$$

여기서

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{a_c}{2}, \quad \epsilon_y = -\frac{b_c}{2}, \quad \bar{\epsilon}_x = \frac{\epsilon_x}{a_c}, \\ \bar{\epsilon}_y &= \frac{\epsilon_y}{b_c}, \quad \alpha_c = \frac{a_c}{b_c}, \quad \beta = \frac{a_c}{R} \end{aligned} \quad (32a\sim f)$$

식 (30)을 식 (25)에 대입하면 전체운동에너지와 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{total} = \frac{1}{2} \rho h \pi R^2 (\dot{q}^T \dot{q} - \frac{\beta^2}{\pi \alpha_c} \dot{q}_c^T \bar{M}_c \dot{q}_c) \quad (33a)$$

$$V_{total} = \frac{1}{2} D \frac{\pi}{R^2} (q^T \Lambda q - \frac{1}{\pi \alpha_c \beta^2} q_c^T \bar{K}_c q_c) \quad (33b)$$

식 (30)을 식 (33)에 넣어서 정리하면

$$T_{total} = \frac{1}{2} \rho h \pi R^2 \dot{q}^T \bar{M}_r \dot{q}, \quad V_{total} = \frac{1}{2} D \frac{\pi}{R^2} q^T \bar{K}_r q \quad (34a,b)$$

이고, 여기서

$$\bar{M}_r = I - \frac{\beta^2}{\pi \alpha_c} T_c^T \bar{M}_c T_c, \quad \bar{K}_r = \Lambda - \frac{1}{\pi \alpha_c \beta^2} T_c^T \bar{K}_c T_c \quad (35a,b)$$

이다. 따라서, 중앙에 정사각형 구멍을 갖는 원형 판에 대한 무차원화된 고유치 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$[\bar{K}_r - \bar{\omega}_i^2 \bar{M}_r] A = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

여기서  $\bar{\omega}_i = \omega_i R^2 \sqrt{\rho h / D}$  이며 무차원화된 고유진동수를 나타낸다.

### 5. 수치해석

이 연구에서는  $\nu = 0.3, \alpha = 1.0$  이고 중앙에 정사각형의 구멍을 갖는 단순지지 원형 판의 고유진동수를 독립좌표연성법을 이용하여 구하였다.

고유함수는 원형 판에 대하여  $n = 100$ , 정사각형 구멍에 대하여  $n_c = 10$  을 고려하여 수치계산을 수행하였다. 무차원화된 고유진동수 및 모드형상은 식 (36)으로부터 구할 수 있다.

Fig. 4는 단순지지-자유조건에 대하여 정사각형 구멍의 크기가  $\beta = 0.0 \sim 1.0$  즉, 정사각형 구멍의 한 변의 길이가 원형 판의 지름에 대하여 0~50%일 때 독립좌표연성법과 유한요소방법(ANSYS)를 사용하여 구멍의 크기변화에 따른 고유진동수의 변화를 관찰하였다.

1차 고유진동수는 구멍의 크기가 커짐에 따라 큰 변화를 보이지 않지만, 2,3차는  $\beta = 0.5$  이후부터 고유진동수가 조금씩 감소하는 것을 볼 수 있다.

4,5차의 고유진동수는  $\beta = 0.4$  이후부터 고유진동수가 감소하다가  $\beta = 0.5$ 에서부터 고유진동수가 4차는 감소하고 5차는 증가한다. 6차 고유진동수는  $\beta = 0.6$  까지 상승하다가 이후부터 감소한다. 저차의 영역에서 볼 때, 6차 고유진동수가 구멍의 크기변화에 가장 민감하게 반응하는 것을 알 수 있다. 7,8차는  $\beta = 0.6$ 까지 일정하다가 이후부터는 고유진동수가 7차는 감소, 8차는 증가한다. 9,10차는  $\beta = 0.5$ 까지 조금씩 감소하다가 이후부터 증가하여  $\beta = 0.7$  이후부터 고유진동수가 분리된다. 이와 같이 대체적으로 정사각형 구멍이  $\beta = 0.3$ 까지는 고유진동수의 변화가 거의

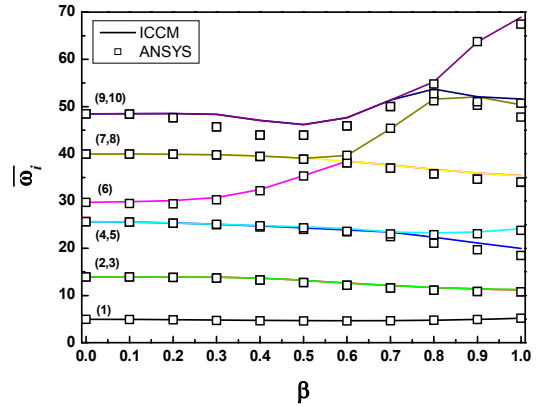


Fig. 4 Non-dimensionalized natural frequency vs. various  $\beta$  for a simply-supported circular plate with a free edge square hole

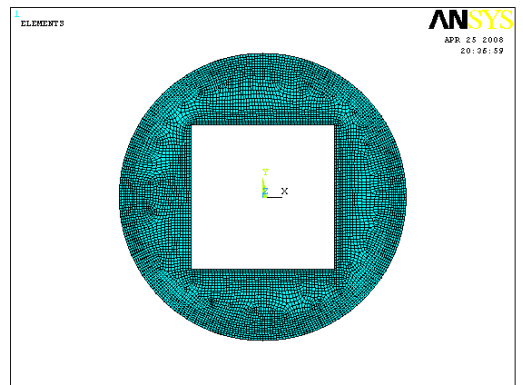


Fig. 5 Mesh configurations by ANSYS for  $\alpha = 1.0, \beta = 1.0$

**Table 1** Mode shapes of a simply-supported circular plate with a concentric square hole for  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 1.0$

| Mode order | ICCM | ANSYS |
|------------|------|-------|
| 1          |      |       |
| 2          |      |       |
| 3          |      |       |
| 4          |      |       |
| 5          |      |       |
| 6          |      |       |

없지만,  $\beta=0.4$ 이후부터는 1~5차의 고유진동수는 6~10차의 고유진동수에 비하여 큰 변화를 보이지 않는다.

유한요소해석에 사용된 재료의 정보는  $h=2$  mm,  $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $E=69$  GPa,  $\nu=0.3$ ,  $R=1$  m,  $a_c=b_c=1$  m (따라서,  $\alpha=1.0$ )이 사용되었다. Fig. 5는  $\alpha=1.0$ ,  $\beta=1.0$ 인 경우의 유한요소 방법에 의한 메쉬 구성을 보인다. 사용된 요소는 SHELL63이며 6313개의 element와 6517개의 node를 사용하였다.

Table 1에서는 정사각형 구멍의 한 변의 길이가 원형 판의 지름에 대하여 50% ( $\beta=1.0$ )일 때, 독립좌표연성법과 유한요소방법을 이용하여 구한 모드형상을 보여준다. 독립좌표연성법에 의한 결과가 잘 일치함을 볼 수 있다.

### 6. 결 론

이 연구에서는 중앙에 정사각형 구멍을 갖는 원

형 판의 자유진동특성을 해석하기 위하여 독립좌표연성법을 이용하였다. 외부와 내부의 경계조건이 단순지지-자유인 구조물의 구멍의 크기가 변함에 따른 고유진동수를 독립좌표연성법을 이용하여 구하고 유한요소방법을 사용하여 검증하였다. 수치해석결과로부터 1~5차까지의 고유진동수는 구멍의 크기변화에 대한 영향을  $\beta=0.5$  이후부터 받으며 6~10차의 고유진동수는  $\beta=0.3$  이후부터 영향을 받는다. 또한, 독립좌표연성법을 이용하여 정사각형 구멍의 크기가 원형 판에 대하여 50%일 때, 원형 판의 고유진동모드를 구하여 유한요소방법에 의한 결과와 비교하였다. 두 방법을 사용하여 얻은 결과는 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

따라서, 독립좌표연성법이 주어진 구조물의 자유진동해석에 효과적임을 확인하였다.

### 후 기

이 연구는 동국대학교 논문게재 장려금 지원으로 이루어졌으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP160.
- (2) Paramasivam, P., 1973, "Free Vibration of Square Plates with Square Opening," Journal of Sound Vibration, Vol. 30, pp. 173~178.
- (3) Ali, R. and Atwal, S. J., 1980, "Prediction of Natural Frequencies of Vibration of Rectangular Plates with Rectangular Cutouts," Computers and Structures, Vol. 12, pp. 819~823.
- (4) Vogel, S. M. and Skinner, D. W., 1965, "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 926~931.
- (5) Kurasia, H. B. and Rawtani, S., 1978, "Vibration Analysis of Circular Plates with Eccentric Hole," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, No. 1, pp. 215~217.
- (6) Kwak, M. K. and Han, S. B., 2007, "Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with a Hole

by Means of Independent Coordinate Coupling Method,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 306, No. 1~2, pp. 12~30.

(7) Heo, S. and Kwak, M. K., 2008, “Free Vibration Analysis of an Annular Plate by the Independent Coordinate Coupling Method,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 18, No. 5, pp. 564~571.

(8) Heo, S. and Kwak, M. K., 2008, “Free Vibration Analysis of a Circular Plate with an Eccentric Circular Hole by the Independent Coordinate Coupling

Method,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 18, No. 6, pp. 681~689.

(9) Avalos, D. R., Larrondo, H. A., Laura, P. A. A. and Sonzogni, V., 1998, “Transverse Vibration of a Circular Plate with a Concentric Square Hole with Free Edges,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, No. 5, pp. 889~891.

(10) Hatch, M. R., 2001, “Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS,” Chapman and Hall/CRC.